时变谱：统一的方法

M. H. Ackroyd

（英国 Loughborough 科技大学）

一、引　　言

对于线性的时变系统或平稳随机过程的研究，我们可以在时间域上或在频率域上进行处理。我们不必同时在这两个域上都进行处理。但是，一旦随机过程的非平稳性占主要地位时，那末仅在一个域上处理就显得不够了。因此就必须研究信号的能量在时间—频率平面内的分布。

我们不仅能听出音乐律音的音调，而且还能感知正在发音的那个时刻。所以，根据我们听觉的情况，看来可以认为信号的能量是分布在时间—频率平面上的。事实上，短时谱或谱图〔1〕已首先应用于语言研究中。除了听觉研究之外，还有一些领域需要同时使用时间和频率这二者的概念。例如：在雷达中，对应于目标的距离和径向速度，接收到的信号既有时延，又有多卜勒频移。在通讯中，信号的瞬时频率是以时间为函数而变化的。当分析非平稳信号源的随机信号时，谱的描述可以包含时间和频率这两个方面。

已有许多不同的作者在信号理论中引进了同时包含时间和频率这两个域的许多概念。而D. Gabor〔2〕是其中最早的一个，显然，这许多形形色色的概念在某些方面必然会有内在联系，但正确地证明它们之间的关系还仅仅是在最近。其中核心的概念看来是信号的时间—频率的能量分布，由式$e(t,f)=s(t)S^*(f)exp(-j2\pi ft)$来决定。在这里$s(t)$是信号的形式，而S(f) 则是它的付氏变换。虽然包含时间和频率的各个概念都能以简单的方法证明与信号的时间—频率能量分布有关，但为了完整的考虑起见，对于包含时间和频率的概念仍要力求给出一个统一的方法。A. W. Rihaczek〔3〕考虑用 e(t,f) 来统一这些概念中的几个。W. D. Mark〔4〕给出了一个非平稳随机过程的谱分析和短时间谱分析的综合讨论，实际上这些讨论是利用e(t,f) 的期望值为基准的。A. A. Kharkevich〔5〕提出了一个初步的统一方法，很有意义，并值得一看。

二、时间—频率能量分布

函数$e(t,f)=s(t)S(f)exp(-j2\pi ft)$ 看来具有这些的性质，这些性质是一个描写信号能量在时间—频率平面上分布的函数所应具有的。例如，如果求这个函数在整个频率域上的积分，那么就得到信号波形的平方值，这样所描述的信号能量的分布是时间的函数：

$$\int e(t,f)df=|s(t)|^2$$

同样，如果在整个时间域上进行积分，则得到的是信号的能量密度谱：

$$\int e(t,f)dt=|S(f)|^2$$

若在整个时间—频率平面上积分，则获得是信号的总能量：

$$\iint e(t,f)dtdf=E$$

当然还有其他一些函数也有这些特点，但选择$e(t,f)$形式的理由是因为它与其它的概念之间有着简单的关系，并且还有明确的物理意义〔3,6〕。

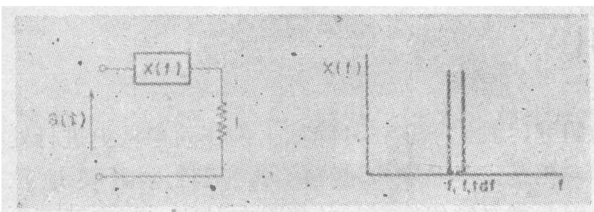

图 1　e(t,f)的物理解释

时间—频率能量的分布能够用虚构的线路元件通过准物理的方法来说明，这个电路元件设想是一个对于所有频率具有无限大电抗而在f_1到f_1+df的无限小频率内电抗为零的电抗电路元件，如图 1 所示。假如把信号波形作为电压那样加在由电抗元件和一个单位电阻串联的电路上，那么$Re\ e(t,f_1)df$就是在t时刻输入电路的功率，这时把$Re\ e(t,f)$表示为在时间t、频率f时每单位带宽的功率是合理的。$Re\ e(t,f)$可能是负值的情况并不与电路理论的定律相矛盾。它相当于原先存储于电抗元件中的能量泄放出来，只有流入电路中的纯能量才是正的，复数量$e(t,f)df$的大小用伏—安表示。

因为时间—频率能量分布的定义包含了信号的傅里叶变换，所以它也包含了信号的整个过程。值得注意的是讨论信号的时间—频率能量分布与讨论信号波形的傅里叶变换是完全相同的。

三、时间和频率的函数

1．模糊度函数

模糊度函数$\chi(\tau,\nu)$ 对雷达和声纳讲来很重要，因为它描写了相关接收机对于具有一定时延和多卜勒频移ν后的匹配信号的响应。模糊度函数可以解释为一个在时间和频率上都位移的自相关函数，它可以定义为：

$$\chi(\tau,\nu)=\int s(t)s^*(t+\tau)exp(-j2\pi\nu t)dt$$

或等价为：

$$\chi(\tau,\nu)=\int S^*(f)S(f+\nu)exp(-j2\pi f\tau)df$$

Stutt〔7〕和Levin〔8〕证明了模糊度函数可以表示为时间—频率能量分布的双重反傅里叶变换：

$$\chi(\tau,\nu)=\iint e(t,f)\exp[-j2\pi(\nu t+f\tau)]dtdf$$

这个公式与信号的能量密度谱和在时间上有时延的信号自相关函数之间的傅里叶变换关系式有着十分有意义的类似。在这情况下，在时间—频率平面上的能量分布和时间频率上都

有位移的自相关函数之间有一个双重傅里叶变换关系。

这个函数的主要应用可能是用来说明模糊度函数是一个怎样特殊的函数。它的双重傅里叶变换$e(t,f)$是这样一个函数，其主截面$e(0,f)$和$e(t,0)$相互形成一傅里叶对（仅相差一换算因子）。任意选择的函数要具有这种特性是几乎不可能的，所以，任意选择的函数几乎不可能成为模糊度函数。

有较大实际用途的一个公式—也是由Stutt[7]求得的。即模糊度函数的模的平方等于时间—频率能量分布的双重自相关函数：

$$\left|\chi(\tau,\nu)\right|^2=\iint e(t,f)e^*(t+\tau,f-\nu)dtdf$$

当模糊度函数的值大致知道时，这个公式常常证明是有用的。$e(t,f)$可以直接从波形形状和它的傅里叶变换来大致描述，这样剩下的问题是大致上计算模糊度函数的大小，这个计算工作或者是靠计算技巧或者是用一片能够按照不同的ν及τ值替代的透明材料来求双重自相关函数。

2．瞬时频率

瞬时频率的概念已被应用于频率调制理论及语言研究中。在真实的窄带信号情况下，瞬时频率粗略地取在小于信号带宽倒数的短区间内每单位时间中过零点数目的一半。在复杂信号的情况下，瞬时频率$f_i(t)$定义为瞬时相位的变化率：

$$f_i(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\arg s(t)$$

瞬时频率与$e(t,f)$关系简单，它不必作诸如信号是窄带的或者$f_i(t)$是慢变化的假设[9]。非常容易证明$f_i(t)$事实上就是在频率轴每一时刻所对应的$e(t,f)$断面的归一化的一阶矩：

$$f_i(t)=\int fe(t,f)df\Big/\int e(t,f)df$$

这个公式指出，即使当信号不是窄带信号或者瞬时频率快速起伏的情况下，瞬时频率就是在给定瞬间时的信号的“中心频率”。

对于信号的群迟延函数也具有一个非常类似的公式：

$$\tau_g(f)=-1/2\pi\ d/df\ \arg\ S(f)$$

3．非平稳随机过程的时变譜

一个实非平稳随机过程的时间自相关函数可定义为：

$$r(t,\tau)=\overline{s(t)s(t+\tau)}$$

这里横线表示系综平均，相应于$r(t,\tau)$中两个变量的一个或者二个变量一起的傅里叶变换的过程还存在有另一种等价的表述。如果对τ求$r(t,\tau)$的傅里叶变换，则求得时变功率谱：

$$R(t,f)=\int r(t,\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau=\int\overline{s(t)s(t+\tau)}\ e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

假定待求函数是非常容易处理的，积分和系综平均的次序可以变换，随机过程的时变谱就可得到。它与随机过程的函数的时间—频率能量谱的系综平均一样：

$$R(t,f)=\overline{s(t)S^*(f)exp(-j2\pi ft)}=\overline{e(t,f)}$$

假如求$R(t,f)$在整个频率域上的积分，则得到以时间为函数的信号功率的期望值：

$$\int R(t,f)df=\overline{s(t)^2}$$

若在整个时间和频率域上积分，则得到信号能量的系综平均值（假定它是有限的）

$$\iint R(t,f)dtdf=\overline{E}$$

对于某些类型的非平稳性，可对时变功率谱求时间平均从而导得一个时间平均功率谱〔5〕，可以把它当做平稳随机过程的功率谱来处理。例如，一个被平稳随机过程振幅调制的正弦波组成一个非平稳随机过程。

然而，求出正弦波的一个整周期内的时变谱的平均并把求出的与时间无关的谱好比调制信号是平稳的，就大多数要求的目的说来已十分足够。

四、短的时间谱分析

研究非平稳信号（例如：在被动声纳中）时，短的时间谱分析是一个重要的方法。短的时间谱或谱图通常由时间域上或频率域上的若干段构成。

1. 时间域上的段

当用这个方法时，需用一组具有不同中心频率的带通滤波器组。对每个滤波器输出进行平方率检波然后再一步进行低通滤波。总的方块图如图 2 所示。

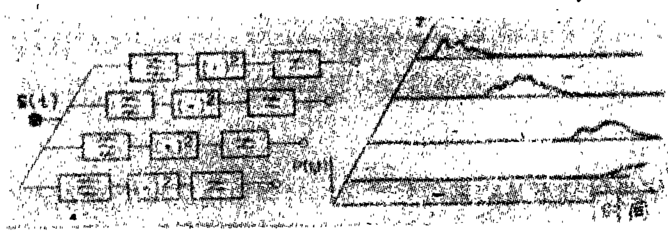

图 2　短的时间谱分析器产生在时间域上的段

每个低通滤波器的输出定义为短时间谱的“一个时间段”$P(t,f)$。引起的问题是短时间谱与信号的时间—频率能量分布之间的关系是怎样的。回答是$P(t,f)$表示在$t-f$平面中经某种程度平滑过后$e(t,f)$的一种变型〔10〕。如果每个带通滤波器有一个转移函数，这个函数由移到其中心频率f_1后的同样的低通原型$H(f)$来组成，并且假如在平方率检波器后不用低通滤波，那末中心频率为f_1的通道的输出可以表示为

$$P(t,f_1)=\left|\int S(f)H(f-f_1)exp(j2\pi ft)df\right|^2$$

这个表达式具有模糊度函数的形式并可以表示成一个双卷积：

$$P(t,f)=\iint e(\tau,\nu)e_h(\tau-t,\ f-\nu)d\tau d\nu$$

这里$e(t,f)$和$e_h(t,f)$分别为信号的时间—频率能量分布和转移函数是$H(f)$的低通原型滤波器的脉冲响应。这样，用相似的带通滤波器组所量测的短的时间谱就是用具有带通滤波器原型的脉冲响应的时间—频率能量分布的卷积平滑$e(t,f)$的一种变型。如果在平方率检波后采

用低通滤波，那末它们的效果仅是在时间轴上得到进一步的平滑。

这相当于在频率轴上带宽为零的函数和所测的短时间谱的另一个双卷积。这样，最后所量测的短时间谱是$e(t,f)$的一种变型，这一变型用具有与所用的带宽和低通滤波器有关的函数的双卷积来予以平滑。

在频率轴上，平滑函数的宽度完全由所用的带通滤波器的带宽确定。在时间轴上，平滑函数有一个最小值，其量级为带通滤波器带宽倒数。在时间轴上的宽度通过增加滤波器的响应时间（降低截止频率）可以从最小值增大到欲有的任何宽度，这里滤波器接在平方率检波器后面。不论在时间轴上还是在频率轴上，表征短的时间谱分析器的平滑函数的区间是沒有上限的。因为带通滤波器的低通原型的脉冲响应有一个为1的最小周期—带宽积，所以它在时间频率平面上有一个为1的最小有效面积。这正好就是说明众所周知的滤波器分析器不能同时在时间和频率上提供高的分辨力的又一种方法。

2．频率域上的段

现在另外一种通常使用的短的时间譜分析方法包括下面几步。先把信号波形乘以转换到时间t_1的窗口函数$w(t)$，然后计算信号波形和窗口函数乘积的付里叶变换。最后求出付里叶变换的平方值在频率轴上于时间t_1时刻确定一个短的时间谱的截面。如果需要，在频率轴上对每一个截面可以用具有一个适当的函数的卷积来予以平滑，而此函数是频率的函数。

通过计算各频率段所完成短的时间谱分析，也可以作为由双卷积处理所得到的$e(t,f)$的变型来说明。这时，如果每个区域作进一步的平滑处理，那末$e(t,f)$同窗口函数$w(t)$的时间频率能量分布和具有同时在时间轴上零宽函数的卷积一起求卷积。在设计这样的谱分析时，在频率轴上根据所要求的分辨力去选择窗口函数$w(t)$的宽度T。此时在频率轴上分辨力为$\frac{1}{T}$量级。如果在频率轴上需要进一步平滑，那末可通过平滑每个截面来达到。如果时间轴上分辨力要好于T而频率轴上需要比$1/T$更好的分辨力，那末就必须采取一个折衷方案。

上述对短的时间谱分析的结果的解释取决于人们的观点。如果信号看成为一个确定性的波形，那么$P(t,f)$可以认为是$e(t,f)$的一种变型，它由于受测量系统所产生的双卷积的影响而失眞。可把这个失眞或抹平设想为希望要有的，因为它会把$e(t,f)$中沒有意义的小的快速起伏抹去。如果认为这个信号是由非平稳随机过程中所取的一个样本函数，那么所量测的时间谱$P(t,f)$可以看为是随机过程的时间相关频谱$R(t,f)$的估值。遗憾的是这种方法为了得出好的$R(t,f)$的估值在选择窗口函数或者滤波器变换函数的宽度和形状时，除掉直感的判断外沒有其他的依据。

五、结　论

在既包含时间又包含频率的信号理论中相互有关的不同概念中，时间频率能量分布$e(t,f)$是一有用的概念。在研究确定新的和非平稳随机信号中它是有用的，通过利用这个函数，就非平稳信号的谱分析讲来，很有希望会对设计程序问题有较好的了解。它对于雷达和声纳的信号处理已经引出了新的方法。

参考文献

1. Koenig, W., Dunn, H. K. and Lacy, L. Y. (1946). "The sound spectrograph." J. A. S. A. 18, 19.
2. Gabor, D. (1946). "Theory of communication." J. IEE, 93 pt. 3, 429—457.
3. Rihaczek, A. W. (1968). 1968 "Signal energy distribution in time and frequency." IEEE IT-14, 369—374.
4. Mark, W. D. (1970). "Spectral analysis of the convolution and filtering of nonstationary stochastic processes." J. Sound Vib. 11, 19—63.
5. Kharkevich, A. A. (1960). "Spectra and Analysis" (Translated from the Russian), Consultants Bureau, New York.
6. Ackroyd, M. H. (1970). "Instantaneous and time-varying spectra-an introduction." Radio Electr, Eng. 39, 145—152.
7. Stutt, C, A. (1964). "Some results on real-part/imaginary-part and magnitude/phase relations in ambiguity functions." IEEE IT-10, 321—327.
8. Le vin, M. J. "Instantaneous spectra and ambiguity functins" IEEE IT-10, 95 97.
9. Ackroyd, M. H. (1970). "Instantaneous spectra and instantaneous frequency." Proc. IEEE 58, 141.
10. Ackroyd, M. H. (1971). "Short-time spectra and time-frequency energy distributions." J. A. S. A. 50, 1229—1231.

討 論

P. L. Stocklin：你提到，测不准原理包含在短的时频谱分析和模糊度函数中。这些能通过$e(t,f)$的函数来说明吗？

回答：因为Gabor的测不准原理讲到波形的持续期间有效值和它的付里叶变换的有效值的乘积不能比1小，所以在$t-f$平面上任何$e(t,f)$函数的最小有效面积大约是1。象任何信号一样，一个滤波器组的低通原型滤波器的脉冲响应受这个限制的影响。在我们做一个短的时间谱分析时，我们用具有最小面积为1的函数的卷积来平滑信号函数$e(t,f)$。

P. L. Stocklin：我不知道，你能否可以根据Gabor的（logons）方法把信号展开为初等函数，在时间频率平面上每个函数都占有最小面积。

回答：这个$e(t,f)$函数无疑地可以用某种方法把信号展开成初等函数来表示，但这还沒有研究过。

P. M. Schultheiss：我不知道，你能否可以对由瞬时相移的导数所定义的瞬时频率的概念谈一谈，当应用到一个平稳随机过程时，它会引起什么困难？在特殊情况下，瞬时频率的矩可能不是无限的。

回答：很抱歉，在这里我对这些不能作有益的评论。V. I. Banimovich〔"关于随机振幅和相移振荡的起伏过程，" ЖТФ 19, №11 (1949), PP. 1231—1259〕的论文中报导了一个高斯随机波形的瞬时频率的统计特性的研究。

J.W. R. Griffiths：我们经常关心的是采用 Woodward 的模拟法如何获得一个所需要的模糊度函数或怎样可以“把沙子推到箱子周围”。对于模糊度函数的各种限制可以用 $e(t,f)$ 来规避吗？

回答：在目前对于模糊度函数的各种已知的限制的意义还不太清楚。〔后来附注〕对于模糊度函数每一个限制相应地对$e(t,f)$ 的函数也必定有某对应的限制。这是因为$e(t,f)$ 是双重付里叶变换，但是考虑对 $e(t,f)$ 各个相应的限制时对于进一步认识模糊度函数的特性是有裨益的。

（贾恩厚　苏小马　李鹏龄译
沈志华　冯绍松校）