

Walsh 函数理论导引

F. Pichler

(奥地利林茨高等学校)

一、引言

本文试图对在通信尤其在信号处理方面获得了重要应用的那部分Walsh函数理论作一介绍。因为此理论与熟知的正弦函数理论和富里叶变换的有关理论大体相似,所以要掌握它是不困难的。一般,本文对涉及的命题不给证明,但为便于进一步研究,我们指明专门的文献。从数学上看,总的说来Walsh函数是描述一种特殊的局部紧阿贝尔群,也即双积群(dyadic group)的特征标。所以此项函数讨论应该看作为一般特征标理论的一种特殊情况。类似的考虑也适用于Walsh-Fourier变换理论;原则上它也可作为群上一般富里叶变换的特殊情况。为此,在第二节中我们简要讨论抽象调和概念的最重要的表达式。但是,这不是说,必须在学习一般理论之后才可学习Walsh函数论和Walsh-Fourier变换论。其要旨是使读者注意到这种嵌入的可能性,从而他可以更好地了解同典型富里叶变换理论的关系,同时也会看到可以预期的理论上的各种可能变化。

第三节涉及Walsh函数的最重要的性质。那里,我们既考虑首先由Fine〔4〕叙述的连续Walsh函数,也考虑数学表示主要由作者〔22〕采用的按连续时间序列次序的Walsh函数,以及数学理论主要由Gibbs〔7, 8, 9, 10, 11,〕发展起来的离散时间有限Walsh函数。

第四节涉及Walsh-Fourier变换。在连续时间Walsh函数的情况下这种变换在数学上比在有限离散Walsh函数情况下仅需要线性代数的基本结果要多一些,因而它很容易理解。

最后,第五节中想列举Walsh函数在通信应用中发展起来的某些理论概念。此项讨论特别包括抽样定理的推广,二进线性滤波器及其最佳化,二进相关函数及其功率谱。关于Walsh函数及其应用的完整文献目录,请参看Bramhall〔2〕。

二、抽象调和分析

局部紧阿贝尔群(LCA-群)是一种阿贝尔群,同时又是一种局部紧豪斯道夫(Hausdorff)空间,它具有可加性,即算子 $x \mapsto -x$ 和 $(x, y) \mapsto x + y$ 是连续的。对于一个给定的LCA群 G ,对每一个 $x \in G$,合成 $(x, y) \mapsto x + y$ 确定一个从 G 到 G 内的同态,其中 G 的零元素 0 映为 G 自身。于是,在任一点 $x \in G$ 的近旁的拓扑性质同 G 的 0 点的近旁的拓扑性质是相等的。对于每一个LCA群 G 存在一个唯一的测度 $\mu(x)$,称为 G 的哈尔(Haar)测度,它是平移不变量。在 G 上给定一个哈尔测度,那么就能引进在 G 上定义的复值函数的积分理论(哈尔积

分)。可以证明, 哈尔可积函数的集合 $L(G)$ 是一个巴拿赫 (Banach) 空间。其次, 人们可以引入平方哈尔可积函数的希尔伯特 (Hilbert) 空间 $L_2(G)$ 。对一给定的 $f \in L_2(G)$, 常希望用比较简单的正交函数的线性组合来表示。这可以用 f 关于LCA群 G 的特征标函数的富里叶变换来达到 (就实数 $\mathbb{R}$ 给定的LCA群而言, 特征标函数是 $\exp(i\omega(\cdot))$, $\omega \in \mathbb{R}$)。 G 的任一特征标函数由下列性质确定。

(1) χ 在 G 上是连续的。

(2) $|\chi(x)| = 1$, 对所有 $x \in G$ 。

(3) $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, 对所有 $x, y \in G$ 。

令 $\hat{G}$ 表示 G 上所有特征标函数构成的集。若在 $\hat{G}$ 中我们引入加法 $+$, 使 $\chi + \chi'(x) = \chi(x) + \chi'(x)$, 那么 $\hat{G}$ 成为阿贝尔群。而且, 能够证明紧开拓扑 $\hat{G}$ 为一个LCA群, 称它为 G 的特征标群。著名的彭德金 (Pontryagin) 对偶性定理指明, $\hat{\hat{G}}$ 的特征标群就是群 G 。对于任一函数 $f \in L(G)$, f 的富里叶变换 $\hat{f}$ 用 $\hat{f}: \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ 表复数集) 定义, 且

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \chi(x) f(x) d\mu(x) \quad \text{对于所有 } \chi \in \hat{G} \quad (1)$$

在上述意义下的富里叶变换的定义能够推广到希尔伯特空间 $L_2(G)$ 。那么, 对于一个给定函数 $f \in L_2(G)$, 能够证明 f 的富里叶变换 $\hat{f}$ 是希尔伯特空间 $L_2(\hat{G})$ 的一个元素, 且有 $\|\hat{f}\| = \|f\|$ (Plancherel定理)。给定两个函数 $h \in L(G)$ 和 $f \in L(G)$, 则 h 同 f 的卷积 $h*f$ 由积分

$$(h*f)(x) = \int_G h(x-y) f(y) d\mu(y) \quad \text{对于所有 } x \in G \quad (2)$$

定义。能够证明 $h*f \in L(G)$ 。卷积定理断言,

$$(h*f)(\chi) = \hat{h}(\chi) \hat{f}(\chi), \text{ 对于所有 } \chi \in \hat{G} \quad (3)$$

关于抽象调和理论的基本要点就介绍到这里。读者如欲详细研究, 请参考 Hewitt 和 Ross[14]以及 Gelfand[6]等的著作。

三、Walsh函数

1. Walsh函数 ψ_y

Walsh函数 ψ_y (Fine的定义*) 实质上是一种已经具体给定的LCA群的特征标函数, 此群即是二进数的双积群 Δ 。 Δ 由全部是0—1的形式为 t_i 的序列的集合组成, $(t_i) = (\dots, 0, t_{-N}, \dots, t_0, t_1, \dots)$, 它是左0不变的。 Δ 中的加号 $\oplus$ 是指逐点模2加法。所以, 若 $t, t' \in \Delta$, 则 $t \oplus t'$ 由0—1序列 $((t \oplus t')_i)$ 给定, 即

$$(t \oplus t')_i = (t_i + t'_i) \bmod 2, \text{ 对所有整数 } i \quad (4)$$

由 $\lambda(t) = \sum_i t_i 2^{-i}$ 定义的映象 $\lambda: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, 把每一个序列 $t \in \Delta$, 同相应的非负实数 $\lambda(t)$ 连

*要提一下, 更一般的LCA群的特征标函数通常也称为Walsh函数。由Levy[17], Vilenkin[28]和Chrestenson[3]引入的函数就是一个例子。

带起来。

而且, 不难引进映象 $\mu: R_+ \rightarrow \Delta$ 和 $\nu: R_+ \rightarrow \Delta$ (R_+ 表示非负实数的集合), 它们用下列方式定义: 当 $t \in R_+$, 映象 $\mu(t)$ 由 0—1 序列 $\mu(t) = (t_i)$ 给定。而系数 t_i 从二进位表示 $t = \sum_i t_i 2^{-i}$ 导出。若 t 是二进位有理数, 即 t 能够用有限个 2 的幂之和表示, 为了得到系数 t_i , 我们必须取 $t \in R_+$ 的有限表示。类似地, 为了定义映象 ν , 我们用 $t = \sum_i t_i 2^{-i}$ 确定 $\nu(t) = (t_i)$ 。现在, 当 t 是二进位有理数时, 必须使用无限的二进位表示。显然, 对所有 $t \in R_+$, 有 $\lambda(\mu(t)) = t$ 和 $\nu(t) = t$ 。再有, 若 t 不是二进位有理数, 则 $\mu(t) = \nu(t)$ 。若 t 是二进位有理数, 那么存在一个整数 M 使得对于序列 $\mu(t) = (t_i)$, 有 $t_M = 1$ 以及对于所有 $i > M$, 有 $t_i = 0$ 。例如, 若取二进位有理数 $t = 7$, 那么 $M = 0$, $\mu(7) = (\dots, 0, 1, 1, 1, 0, \dots)$ 和 $\nu(7) = (\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$ 。在 Walsh 函数的定义中应用了映象 λ 以及同样的 μ 和 ν 。我们会看到, 由 Fine[5] 引进的 Walsh 函数 ψ_y , $y \in R_+$, 在 R_+ 上定义。所以, 严格说来, 它们不是真正的特征标, 因为 R_+ 和二进加法 (dyadic addition) $\oplus$ 合起来 “几乎处处” 仅是一个 LCA 群, 其中二进加法 $\oplus$ 用 $t \oplus s := \lambda(\mu(t) \oplus \mu(s))$ 定义。但是, 零测度总是例外, 所以此项理论没有严格差别。

对于任意 $y \in R_+$, Walsh 函数 ψ_y 的定义为

$$\psi_y(t) := \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \quad \text{若 } \sum_i y_i t_i - 1 \text{ 是偶奇} \quad (t \in R_+) \quad (5)$$

此处系数 y_i 和 t_i 分别由 $\mu(y) = (y_i)$ 和 $\mu(t) = (t_i)$ 给定。根据这个定义, 对于所有 $y, z \in R_+$ (其中序列 $\mu(y) \oplus \mu(z)$ 不是右 1 不变) 的情况, 我们很易推出公式

$$\psi_y(t) \psi_z(t) = \psi_{y \oplus z}(t) \quad \text{对于所有 } t \in R_+ \quad (6)$$

因为使 (6) 不成立的所有数 y, z 的集合是可数的, 因而是零测度, 所以我们可以断言所有 Walsh 函数 ψ_y 组成的集合 $\mathcal{W}$ 作乘法时是 “几乎处处” 封闭的。另外, 因为我们有中间元素 ψ_0 , 以及对于所有 $y \in R_+$, 有 $\psi_y \psi_y = \psi_0$, 我们能够推断 $\mathcal{W}$ “几乎处处” 是一个乘法阿贝尔群。从 ψ_y 的定义容易导出第二个公式, 即对于所有 $y \in R_+$ 和所有配对 (t, t') (其中 $\mu(t) \oplus \mu(t')$ 不是右 1 不变的), 我们有

$$\psi_y(t) \psi_y(t') = \psi_y(t \oplus t') \quad (7)$$

同时我们有

$$\psi_y(t) = \psi_z(y) \quad \text{对于所有的 } y, t \in R_+ \quad (8)$$

至此, 我们避免提及任何有关双积群 Δ 的拓扑方面的结果。就我们的目的来讲, 可以充分地说, 零元素 0 的邻域的基由形式为 $\{(t_i): t_i = 0 \text{ 对于所有 } i < N\}$ 的集给定, 此处 N 表示一个整数。由这个基生成的拓扑使得 Δ 成为一个局部紧群, 而此群是完全不连通的。在 R_+ 上的拓扑由同态 $\lambda: \Delta \rightarrow R_+$ 来导出。就这种拓扑而言, Walsh 函数 ψ_y 是连续的。另一方面就实数 R 的一般拓扑导出的 R_+ 上的拓扑而言, Walsh 函数 $\psi_y, y \neq 0$, 是矩形函数, 因此是不连续的。我们讲一下 Walsh 函数 ψ_y 的另一个性质: 随着 y “接近” 于 z , 两个 Walsh 函数 ψ_y 和 ψ_z 在一个 “长” 的公共区间上有一样的形状。当 y 和 z 之间的距离减少时, 这个区间的长度增加。更精确地说: 对于几乎所有的 $y, z \in R_+$ 及 $z = y + \epsilon$, 给定 $0 < \epsilon < 2^{-M}$, 则对于所有 $t \in (0, 2M)$, 有 $\psi_y(t) = \psi_z(t)$ 。应用所给的定义很容易证明 Walsh 函数的这个性质。对于 $y = 0, 1, 2, 3, \dots$ Walsh 函数 ψ_y 严格地是 J. L. Walsh[30] 原来引入数学中的那个函数。我们也可参看 Palay 的著名论文[20]。

2. Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)

在Harmuth的著作[13]中,提出了一种设计通信系统的新方法。此方法的基础是把信号和系统用Walsh函数来描述。由于历史的以及其他原因,他没有采用Fine定义的Walsh函数,而采用“正常排列为序的”Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)。虽然这些Walsh函数同函数 ψ_p 无本质区别,然而它们具有更类似于三角函数 $\sin 2\pi f(\cdot)$ 和 $\cos 2\pi f(\cdot)$ 的某些性质。类似于三角函数的频率参数 f , sal(s, ·)和cal(s, ·)的参数 s 等于单位长度区间上符号变化数(过零点数)的一半。所以参数 s 表示广义频率,称为叙率*。

而且函数sal(s, ·)都是奇函数,函数cal(s, ·)都是偶函数,两者都定义在实轴上。对于函数sal(s, ·)和cal(s, ·)我们引入下述的定义:对任意的 $s \geq 0$ 函数sal(s, ·)用sal(s, ·): $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 来定义,对 $t \geq 0$,它由下式给定:

$$sal(s, t) := \begin{cases} +1 & \text{若 } \sum_k (s_k + s_{k+1})t_{1-k} \text{ 是偶} \\ -1 & \text{奇} \end{cases} \quad (9)$$

此处系数 s_i 和 t_i 分别由 $\nu(s) = (s_i)$ 和 $\mu(t) = (t_i)$ 来决定。对 $t < 0$,我们定义

$$sal(s, t) := -sal(s, -t) \quad (10)$$

同样,对任意的 $s \geq 0$,函数cal(s, ·)由cal(s, ·): $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 定义,用下式给定:

$$cal(s, t) := \begin{cases} +1 & \text{若 } \sum_k (s_k + s_{k+1})t_{1-k} \text{ 是偶} \\ -1 & \text{奇} \end{cases} \quad (11)$$

现在系数 s_i 来自 $\mu(s) = (s_i)$,而系数 t_i 再用 $\mu(t) = (t_i)$ 来求。对 $t < 0$,我们定义

$$cal(s, t) := cal(s, -t) \quad (12)$$

象对待函数 ψ_p 那样,我们还将提及Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)的某一些性质。导出下列公式并不困难:对任意整数 k ,我们有

$$sal(s, 2^k t) = sal(2^k s, t) \quad \text{对于所有 } s \geq 0 \text{ 和所有 } t \in \mathbb{R} \quad (13)$$

$$cal(s, 2^k t) = cal(2^k s, t) \quad \text{对于所有 } s \geq 0 \text{ 和所有 } t \in \mathbb{R} \quad (14)$$

公式(13)和(14)分别描述Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)的扩展。在三角函数 $\sin 2\pi f(\cdot)$ 和 $\cos 2\pi f(\cdot)$ 的情况下,我们知道平移 $\pi/4f$ 二者就重叠。对于Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)下列公式是成立的:令 s 是二进位有理数,又令整数 M ,它用 $s_M = 1$ 和对于所有 $i > M$, $s_i = 0$ 来给定,此处 $\mu(s) = (s_i)$ 。那么我们有

$$sal(s, t) = cal(s, t - 2^{M-2}) \quad \text{若 } s_{M-1} = 0 \quad (15)$$

$$sal(s, t) = cal(s, t + 2^{M-2}) \quad \text{若 } s_{M-1} = 1 \quad (16)$$

对于 $s = 2^k$ (这里 k 是整数),Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)具有方波的形状。在数学上这些特殊Walsh函数称为Rademacher函数。很易看到, Walsh函数能用Rademacher函数之积来表示。下述有关Rademacher函数的公式有时在实际上是有用的,我们有

$$cal(2^k, t) = sal(2^k, t) sal(2^{k+1}, t), \text{ 对于所有 } t \in \mathbb{R} \quad (17)$$

对 s 是非负整数的Walsh函数sal(s, ·)和cal(s, ·)特别值得我们注意。诚如我们能够证明的那样,集 $\{cal(0, \cdot), cal(2, \cdot), \dots, sal(1, 0), sal(2, \cdot), \dots\}$ 形成希尔伯特空间 $L_2(-1/2, +1/2)$ 上的完备正交函数集。我们将在第四节中讨论这个集。有时,如果这种函数集,例如Walsh函数wal(i, ·)是用下式定义的:

*或称变号率,英文是Sequency。——译注

$$\begin{aligned} wal(2_i, \cdot) &:= cal(i, \cdot) \quad \text{对 } i=0, 1, 2, \dots \text{ 和} \\ wal(2_{i-1}, \cdot) &:= sal(i, \cdot) \quad \text{对 } i=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

那么采用稍有不同记号来得方便。

在实用上有关调制或过滤问题中，下列公式通常是有用的：对 $i, k=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} cal(i, \cdot) cal(k, \cdot) &= cal(i \oplus k, \cdot) \\ cal(i, \cdot) sal(k+1, \cdot) &= sal((i \oplus k) + 1, \cdot) \\ sal(i+1, \cdot) sal(k+1, \cdot) &= cal(i \oplus k, \cdot) \end{aligned} \quad (19)$$

而且，对于函数 $wal(i, \cdot)$ 有

$$wal(i, \cdot) wal(k, \cdot) = wal(i \oplus k, \cdot) \quad (20)$$

最后我们指出 Walsh 函数 $sal(i, \cdot)$ 和 $cal(i, \cdot)$ 同 Fine 的 Walsh 函数 ψ_i 的关系。我们有

$$cal(i, t) = \psi_{i \oplus 2i}(t), \quad \text{对所有 } t \geq 0 \text{ 和 } i = 0, 1, 2, \dots$$

和

$$sal(i, t) = \psi_{(i-1) \oplus (2i-1)}(t), \quad \text{对于所有 } t > 0 \text{ 和 } i = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

图 1 表示在区间 $(-1, +1)$ 上的 Walsh 函数 $cal(i, \cdot)$, $i = 0, 1, \dots, 7$ 和 $sal(i, \cdot)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ 。

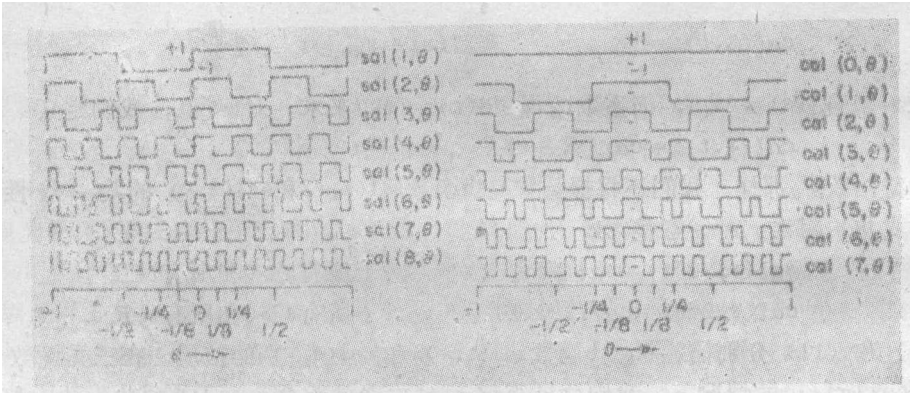


图 1 Walsh 函数 $sal(i, \cdot)$ 和 $cal(i, \cdot)$

3. 离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$

Walsh 函数在通信和信号处理的实际应用中，大多数情况下应用有限离散 Walsh 函数就足够了。这样，理论就变得更为容易，只需要线性代数的一些基本结果。下面我们来定义离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$ 和讨论它们的某些性质。读者若要更仔细地研究，请参看 Gibbs [7, 8, 11], Gibbs 和 Millard [12], Pearl [21] 和 Pichler [25] 的工作。

令 $B(n)$ 表示所有具有 n 个数字的二进位数的集。在 $B(n)$ 中我们用二进位数的逐点“模 2 加法”定义加法 $\oplus$ 。这样 $B(n)$ 便成为双积群 Δ 的一个子群。设集 $N(n) := \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ 由所有小于 2^n 的整数组成。若在 $N(n)$ 中我们根据对于所有 $i, k \in N(n)$, $i \oplus k := \lambda(\mu(i) \oplus \mu(k))$ 来引进“二进加法” (dyadic) $\oplus$, 那么 $N(n)$ 成为一个与 $B(n)$ 同构的群。把群 $B(n)$ 和 $N(n)$ 等同起来对我们而言是方便的。

与 $B(n)$ 连带离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$ 定义为函数 $w(i, \cdot): B(n) \rightarrow C$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2_n - 1$, 它由下式给定:

$$w(i, k) := \begin{cases} +1 & \text{若总和} \sum_{p+q=n-1} i_p k_q \text{是偶} \\ -1 & \text{奇} \end{cases} \quad (i, k \in B(n)) \quad (22)$$

令 $W(n)$ 表示同 $B(n)$ 连带的所有离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$ 的集。对于 $n=3$, 集 $W(n)$ 由表 I 给出。

表 I. 离散 Walsh 函数的集 $W(3)$; $+: = +1$, $-: = -1$

	000	001	010	001	100	101	110	111
$w(0, \cdot)$	+	+	+	+	+	+	+	+
$w(1, \cdot)$	+	+	+	+	-	-	-	-
$w(2, \cdot)$	+	+	-	-	+	+	-	-
$w(3, \cdot)$	+	+	-	-	-	-	+	+
$w(4, \cdot)$	+	-	+	-	+	-	+	-
$w(5, \cdot)$	+	-	+	-	-	+	-	+
$w(6, \cdot)$	+	-	-	+	+	-	-	+
$w(7, \cdot)$	+	-	-	+	-	+	+	-

类似于时间连续 Walsh 函数, 对离散 Walsh 函数有下列公式:

$$w(i, k) = w(k, i) \text{ 对所有 } i, k \in B(n) \quad (23)$$

$$w(i, \cdot)w(j, \cdot) = w(i \oplus j, \cdot) \text{ 对所有 } i, j \in B(n) \quad (24)$$

$$w(i, k)w(i, l) = w(i, k \oplus l) \text{ 对所有 } i, k, l \in B(n) \quad (25)$$

有时, 特别在编码理论中, 把离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$ 修改为 $b(i, \cdot)$ 来得方便, 后者根据下述定义而取值 0 和 1。对每一个 $i \in B(n)$, 函数 $b(i, \cdot): B(n) \rightarrow B(1)$ 由下式定义:

$$b(i, k) := \bigoplus_{p+q=n-1} i_p k_q \quad \text{对于所有 } k \in B(n) \quad (26)$$

此处 $\oplus$ 表示模 2 加法。函数 $b(i, \cdot)$ 称为同 $B(n)$ 连带的布尔 Walsh 函数。我们看到, 布尔 Walsh 函数 $b(i, \cdot)$ 是由离散 Walsh 函数用代换 $+1 \mapsto 0$ 和 $-1 \mapsto 1$ 后导出的。类似于方程 (24) 和 (25) 我们可写得下列公式:

$$b(i, \cdot) \oplus b(j, \cdot) = b(i \oplus j, \cdot) \text{ 对所有 } i, j \in B(n), \quad (27)$$

$$b(i, k) \oplus b(i, l) = b(i, k \oplus l) \text{ 对所有 } i, k, l \in B(n) \quad (28)$$

四、Walsh 调和和分析

因为 Walsh 函数 ψ_y 以及 Walsh 函数 $\text{sal}(s, \cdot)$ 和 $\text{cal}(s, \cdot)$ 本质上都是局部紧阿贝尔群的特征标函数, 所以根据抽象调和和分析我们便能设想出 Walsh 调和和分析理论即 Walsh—Fourier 变换理论。的确是如此, 并且证实了上述的方法。但是至今 Walsh 调和和分析理论的发展同抽象调和和分析没有关系。在此我们只限于考虑此理论的某些基本概念。若要深入研究, 读者请参看 Fine[5], Vilenkin[29], Selfridge[27], Pichler[22] 和 Wiesen[32] 的论

文。在离散Walsh调和与分析情况下，不需要特殊的理论基础，所需的数学工具都是线性代数中熟悉的结论。

1. Walsh-Fourier级数

我们早已经提到，当 s 是整数，由Walsh函数 $\text{sal}(s, \cdot)$ 和 $\text{cal}(s, \cdot)$ 组成的集 $\{\text{cal}(0, \cdot), \text{cal}(1, \cdot), \dots, \text{sal}(1, \cdot), \text{sal}(2, \cdot), \dots\}$ 表示希尔伯特空间 $L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 的一个完备正交函数集。所以每一个函数 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 可用以Walsh函数集为基础的广义富里叶级数(f 的Walsh-Fourier级数)来表示。在点 $t \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，一般，此级数的形式为

$$f(t) = F_c(0)\text{cal}(0, t) + \sum_{i=1}^{\infty} F_c(i)\text{cal}(i, t) + F_s(i)\text{sal}(i, t) \quad (29)$$

此处Walsh-Fourier系数 $F_c(0)$ ， $F_c(i)$ 和 $F_s(i)$ 当 $i=1, 2, 3, \dots$ 时分别由下式给出：

$$F_c(i) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t)\text{cal}(i, t)dt \quad \text{对于所有 } i=0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

$$F_s(i) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(t)\text{sal}(i, t)dt \quad \text{对于所有 } i=1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Walsh-Fourier级数(WF一级数)理论在数学中已有很长的传统。早在J. L. Walsh[30]最初的论文中就对它研究过。以后对于该理论有重要贡献的是Paley[20]，Fine[4]，Morgenthaler[19]，Watari[31]，Weiss[33]和其它人。我们举两个Walsh-Fourier级数的例子。

例1. 我们考虑锯齿函数 $\text{saw} \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，对于所有 $t \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，它定义为 $\text{saw}(t) = t$ 。在时刻 $t \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，Walsh-Fourier级数的形式为

$$\text{saw}(t) = \frac{1}{4}\text{sal}(1, t) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-2} \text{sal}(2^i, t)$$

例2. 我们考虑矩形脉冲 $\text{rect} \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 。对于所有 $t \in (0, 2^{-k-1})$ ， $\text{rect}(t) = 2^{k+1}$ ；对于所有 $t \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (2^{-k-1}, +\frac{1}{2})$ ， $\text{rect}(t) = 0$ 。对于每一时间点 $t \in (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，矩形脉冲的Walsh-Fourier级数为

$$\text{rect}(t) = \sum_{i=0}^{2^k-1} \text{cal}(i, t) + \sum_{i=0}^{2^k} \text{sal}(i, t) \quad (33)$$

每一个Walsh-Fourier级数表示一个由(29)给出的函数 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ ，每个Walsh-Fourier级数确定两个离散函数 $F_c: \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow R$ 和 $F_s: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow R$ ，它们分别由Walsh-Fourier系数 $F_c(i)$ 和 $F_s(i)$ 给定。这些函数称为函数 f 的Walsh-Fourier变换。最后，我们想提出函数 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 的“重积数”(Vielfalt)概念。所谓Walsh函数 $\text{cal}(i, \cdot)$ 或 $\text{cal}(i, \cdot)$ 的重积数是指为求得 $\text{cal}(i, \cdot)$ 或 $\text{sal}(i, \cdot)$ 所需用来相乘的Rademacher函数 $\text{sal}(2^i, \cdot)$ 的最小数目。让我们引进符号 $V(\text{cal}(i, \cdot))$ 和 $V(\text{sal}(i, \cdot))$ ，分别表示 $\text{cal}(i, \cdot)$ 和 $\text{sal}(i, \cdot)$ 的重积数。函数 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 的重积数 $V(f)$ 定义为集 $\{V(\text{cal}$

$(i, \cdot): F_c(i) \neq 0\} \cup \{(\text{sal}(i, \cdot): F_s(i) \neq 0\}$ 的上确界。例如在我们的例子中 $V(\text{saw}) = 1$ 和 $V(\text{rect}) = 2^k$ 。下述的重积数定理已由 Liedl 求得 (例如参看 Weiss (35)):

(a) 若 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 是 k 次多项式函数, 那么有

$$V(f) = k$$

(b) 若 $f \in L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 是连续的, 以及 $V(f) = k$, 那么

f 是 k 次多项式函数。

应该提到, 在 Polyak 和 Shreider 的论文中 [26] 也出现重积数的概念。

2. Walsh-Fourier 变换

令 $f \in L(R)$ 。这样函数 f 的 Walsh-Fourier 变换定义为函数 $F_c: (0, \infty) \rightarrow R$, 并且

$$F_c(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{cal}(i, t) dt \quad \text{对于所有 } s \in (0, \infty) \quad (34)$$

$$F_s(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sal}(i, t) dt \quad \text{对于所有 } s \in (0, \infty) \quad (35)$$

若我们知道了 $f \in L(R)$ 的 Walsh-Fourier 变换 F_c 和 F_s , 那么下述定理指明如何去计算函数 f 。

定理 若函数 $f \in L(R)$ 是连续的并且是有界变分的, 那么对所有 $t \in R$

$$f(t) = \int_0^{\infty} F_c(s) \text{cal}(s, t) ds + \int_0^{\infty} F_s(s) \text{sal}(s, t) ds \quad (36)$$

令 ch_I 表示区间 $I \subset R$ 的特征标函数 $ch_I: R \rightarrow R$; 那就是说, 对所有 $t \in I$, $ch_I(t) = 1$; 对于所有 $t \in R \setminus I$, $ch_I(t) = 0$ 。利用 ch_I 我们下面给出 Walsh-Fourier 变换的例子。

例 1. 令 f 由 $f = \text{cal}(i, \cdot) ch_I$, 及 $I = (-1/2, +1/2)$ 给定, 则 $F_c = ch_{I'}$, 及 $I' = (i, i+1)$, 而 $F_s = 0$ 。

例 2. 令 f 由 $f = \text{sal}(i, \cdot) ch_I$, 及 $I = (-1/2, +1/2)$ 给定, 则 $F_c = 0$ 和 $F_s = ch_{I'}$, 且 $I' = (i-1, i)$ 。

下面我们讨论函数 $f \in L_2(R)$ 的 Walsh-Fourier 变换。对于每一个这样的函数和对于每一个 $r \in R$, 我们用 $f_r = f ch(-r, +r)$ 定义窗 f_r 。显然 $f_r \in L_2(R) \cap L(R)$ 。所以, 存在有 I_r 的 Walsh-Fourier 的变换 $F_{r,c}$ 和 $F_{r,s}$ 。能够证明, 当 r 趋于无限时, 函数 $F_{r,c}$ 和 $F_{r,s}$ 在空间 $L_2(R)$ 中分别收敛于函数 F_c 和 F_s 。按照定义, 这些极限是函数 $f \in L_2(R)$ 的 Walsh-Fourier 变换。下面的 “Plancherel” 定理是正确的:

定理 对于 $f \in L_2(R)$, 我们有 $F_c \in L_2(0, \infty)$ 和 $F_s \in L_2(0, \infty)$ 而且对于几乎所有的 $t \in R$, 我们有

$$f(t) = \int_0^{\infty} F_c(s) \text{cal}(s, t) ds + \int_0^{\infty} F_s(s) \text{sal}(s, t) ds \quad (37)$$

又有

$$\|f\|^2 = \|F_c\|^2 + \|F_s\|^2 \quad (38)$$

下述的卷积积分的推广在 Walsh 函数的通信应用中特别值得注意。令 $f, g \in L(R)$, 这样, f 和 g 的卷积 $f * g$ 可用函数 $f * g: R \rightarrow R$ 定义, 它由下式给定:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \oplus \tau) g(\tau) d\tau \quad (39)$$

此处在 $t < 0$ 时, 二进和数 $t \oplus \tau$ 用 $t \oplus \tau := -(-t \oplus \tau)$ 定义。能够证明二进卷积有下列性质, 对每一个 $f, g, h \in L(R)$, 有

$$f * g \in L(R) \quad (40)$$

$$f * g = g * f \quad (41)$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h \quad (42)$$

$$f * (g * h) = (f * g) * h \quad (43)$$

进而我们还有下述的卷积定理:

定理 令 $f, g \in L(R)$ 和 $h = f * g$ 。又令 $F_c, F_s, G_c, G_s, H_c, H_s$ 分别表示 f, g 和 h 的 Walsh-Fourier 变换。则有 $H_c = F_c G_c$ 和 $H_s = F_s G_s$ 。

最后我们来谈谈平移定理:

定理 令 $f \in L(R) \cup L_2(R)$ 。对每一个 $\lambda \in R$, 令 f_λ 表示平移 λ 的函数, 即 $f_\lambda(t) := f(t \oplus \lambda)$ 。令 F_c, F_s 和 $F_{\lambda, c}, F_{\lambda, s}$ 分别表示 f 和 f_λ 的 Walsh-Fourier 变换。那么对于所有 $s > 0$, 有 $F_{\lambda, c}(s) = \text{cal}(s, \lambda) F_c(s)$, $F_{\lambda, s}(s) = \text{sal}(s, \lambda) F_s(s)$ 。

在上述 Walsh-Fourier 变换的讨论中, 我们优先采用了 Walsh 函数 $\text{sal}(s, \cdot)$ 和 $\text{cal}(s, \cdot)$, 对于 Walsh 函数 ψ_ν 而言, 可以导得一套对等的理论。

3. 离散有限 Walsh 变换

现在我们来考虑离散 Walsh 函数 $w(i, \cdot)$ 的调和分析。我们早已提到, 在这种情况下, 此理论转化成初等线性代数中熟知的许多方法的一部份。所以大概说一说结果就可以了。读者若要仔细研究请参看 Gibbs (7) 和 Pitchler (25) 的著作。

令 $R(n)$ 表示形式为 $f: N(n) \rightarrow R$ 的所有函数 f 组成的线性空间。每个函数 $f \in R(n)$ 可以解释为一个信号。在第三 (3) 节引入的离散 Walsh 函数的集 $W(n)$ 构成空间 $R(n)$ 的完备正交函数集。对所有 $i, j, t \in N(n)$

$$\sum_{t \in N(n)} w(i, t) w(j, t) = \begin{cases} 2^n & \text{若 } i = j \\ 0 & \text{若 } i \neq j \end{cases} \quad (44)$$

就基 $W(n)$ 而言, 每个函数 $f \in R(n)$ 的表示形式为

$$f(t) = 2^{-n} \sum_{i \in N(n)} \hat{f}(i) w(i, t) \quad (t \in N(n)) \quad (45)$$

此处 $\hat{f}(i)$ 表示第 i 个 “Walsh-Fourier 系数”, 并由下述求和公式给出:

$$\hat{f}(i) = \sum_{t \in N(n)} f(t) w(i, t) \quad (i \in N(n)) \quad (46)^*$$

很显然, 方程 (45) 能够看成为函数 $f \in R(n)$ 的 Walsh-Fourier 表示式。在这种情况下, 方程 (46) 对所有 $i \in N(n)$, 由 $\hat{f}: N(n) \rightarrow R$ 及 $i \mapsto \hat{f}(i)$ 来确定 f 的 Walsh-Fourier 变换 $\hat{f}$ 。

两个函数 $f \in R(n)$ 和 $g \in R(n)$ 的双卷积 $f * g$ 定义为

$$(f * g)(t) := \sum_{\tau \in N(n)} f(t \oplus \tau) g(\tau) \quad (i \in N(n)) \quad (47)$$

* 此式原文有误。一译注

与连续情况相似, 我们有下述卷积定理: 对所有 $f, g \in R(n)$

$$(f * g)(i) = \widehat{f}(i) \widehat{g}(i) \quad (i \in N(n)) \quad (48)$$

对任意的 $\tau \in N(n)$, 令 T_τ 表示线性算子 $T_\tau: R(n) \rightarrow R(n)$, 对所有 $t \in N(n)$ 和所有 $f \in R(n)$, 它由 $f \mapsto T_\tau f$ 及 $(T_\tau f)(t) := f(t \oplus \tau)$ 给定。每个算子 T_τ 可以称为二进平移算子。再有, 对每个函数 $g \in R(n)$ 我们用 $C_g: R(n) \rightarrow R(n)$ 和 $f \mapsto C_g f := f * g$ 定义同它结合的二进卷积算子 C_g 。不难看出, 二进卷积和二进平移算子是可以交换的, 也即对所有 $g \in R(n)$ 和对于所有 $\tau \in N(n)$, 我们有

$$C_g T_\tau = T_\tau C_g \quad (49)$$

还有, 不难证明, 二进卷积算子 C_g 的所有本征函数是离散Walsh函数。若 $\widehat{g}(i) \neq 0$, 那么 $w(i, \cdot)$ 是一个本征值为 $\widehat{g}(i)$ 的 C_g 的本征矢量。

为了方便起见, 让我们用矩阵记号来考虑前述的概念。我们令空间 $R(n)$ 和实 2^n -tuples 的 2^n -维欧几里得空间恒等, 并在其中选择单位矢量的标准基。这样, 每一个函数 $f \in R(n)$ 对应于一个形式为 $\widetilde{f} = (f(0), f(1), \dots, f(2^n - 1))$ 的列矢量 $\widetilde{f}$, 此处 $\sim$ 表示转置。于是对于Walsh-Fourier变换运算而言, 我们用矩阵给定 W :

$$W := (w(0, \cdot) | \dots | w(2^n - 1, \cdot)) \quad (50)$$

所以 $f \in R(n)$ 的Walsh-Fourier变换 $\widehat{f}$ 表示为

$$\widehat{f} = W \widetilde{f} \quad (51)$$

二进平移算子 T_τ 的矩阵表示形式为

$$T_\tau := (e_\tau | e_{\tau \oplus 1} | \dots | e_{\tau \oplus 2^n - 1}) \quad (52)$$

此处对 $i \in N(n)$ 列矢量 e_i 表示标准基的单位矢量, 这些单位矢量由 $i = j$ 时 $e_i(j) = 1$ 和当 $i \neq j$ 时, $e_i(j) = 0$ 来给定。每个二进卷积算子 C_g 用矩阵 C_g 来表示, C_g 的形式为

$$C_g := (g | T_1 g | \dots | T_{2^n - 1} g) \quad (53)$$

按定义 $f * g = C_g f$ 和应用卷积定理我们得到 $(f * g)^\wedge = (C_g f)^\wedge = W C_g f = W C_g W^{-1} \widehat{f} = \widehat{g} \widehat{f}$ 。根据这个结果我们看到, 就“Walsh矢量” $w(0, 0), w(1, 1), \dots, w(2^n - 1, \cdot)$ 所给定的基来说, 每一个二进卷积算子 C_g 由一个对角矩阵 $W C_g W^{-1}$ 表示。而

$$W C_g W^{-1} = \text{Diag}(\widehat{g}(0), \dots, \widehat{g}(2^n - 1)) \quad (54)$$

五、应用中的概念

在这最后一节中, 我们讨论一下在通信工程中已经证实是有用的某些概念。选择的材料与作者的个人兴趣有很大关系, 因而不反映目前的技术水平。如欲更多地了解Walsh函数的应用, 请参看关于Walsh函数应用的年会会议录 [1, 18, 34, 35]。

1. Walsh调和与分析中的抽样定理

令 $L_2(R)$ 是信号空间, 那么对于每一个信号 $f \in L_2(R)$, 下述命题是成立的: 假定存在有“截止”叙率 s_0 , 使得所有 $s > s_0$ 时对于Walsh-Fourier变换 F_c 和 F_s , 我们有性质 $F_c(s) = 0$ 和 $F_s(s) = 0$, 则 $f \in L_2(R)$ 由 f 的样本值的序列

$$(\dots, f(-2T), f(-T), f(0), f(T), f(2T), \dots) \quad (55)$$

唯一决定, 此处 T 由 $T: = 1/2s_0$ 来给定。

信号 $f \in L_2(R)$ 可表示为

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT) ch_{[0,T)}(t-mT) \quad (56)$$

把这个定理同经典结果相比, 显然是类似的。但是, 因为在叙率意义下的有限带宽信号是阶梯函数, 所以我们的定理似乎意义不大。Pichla[23]首先用这种形式提出这个定理。更一般的抽样定理已由Kluvanek[15]证明。

2. 二进卷积系统

为了我们的目的, 把关系 $S \subset L_2(R) \times L_2(R)$ 取名为一个时间系统。Walsh-Fourier 变换理论(还类似于富里叶或拉普拉斯变换理论)使我们能把这个系统和“叙率”表示 S_c 和 S_s 联系起来。而后二者由下式给定:

$$S_c := \{(X_c, Y_c) : (x, y) \in S\} \text{ 和 } S_s := \{(X_s, Y_s) : (x, y) \in S\} \quad (57)$$

此处 X_c, X_s 和 Y_c, Y_s 分别表示信号 x 和 y 的Walsh-Fourier变换。对于此种时间系统的某些类型, 叙率表示便于作更方便的描述。二进卷积系统就是这样的一类, 它将在下面予以说明。

对于任意 $h \in L(R)$, 我们用

$$S(h) := \{(x, y) : x \in L_2(R) \text{ 和 } y = h * x\} \quad (58)$$

定义二进卷积系统 $S(h)$, 此处 $*$ 表示二进卷积。我们看到, $S(h)$ 的输出信号 y 是用输入信号 x 同 $S(h)$ 的脉冲响应 h 的卷积来形成的。 $S(h)$ 的叙率表示 $S_c(h)$ 和 $S_s(h)$ 用下式给定:

$$S_c(h) = \{(X_c, Y_c) : (x, y) \in S \text{ 和 } Y_c = H_c X_c\} \quad (59)$$

$$S_s(h) = \{(X_s, Y_s) : (x, y) \in S \text{ 和 } Y_s = H_s X_s\}$$

此处 H_c 和 H_s 表示脉冲响应 h 的Walsh-Fourier变换。该函数也称为二进卷积系统 $S(h)$ 的传递函数。作为叙率表示的一个优点来说传递函数可在叙率域上逐点运算。让我们来谈一下二进卷积系统的某些其它的性质。因为二进卷积是一个线性运算, 所以每一个二进卷积系统就是一个线性系统。二进卷积系统 $S(h)$ 的第二个性是, 相对输入信号的二进平移(dyadic translation)的不变性。若我们有 $(x, y) \in S(h)$, 那么对于所有实平移 $\lambda \in R$, 亦有 $(x_\lambda, y_\lambda) \in S(h)$ 。换言之, 若 $y = h * x$, 那么对于所有实数 $\lambda \in R$ 有 $y_\lambda = h * x_\lambda$ 。所以, 若我们已知 $(x, y) \in S(h)$, 则要计算一个平移 λ 对于输入信号的输出信号是没有问题的。

令 $S(h_1)$ 和 $S(h_2)$ 表示二进卷积系统。 $S(h_1)$ 和 $S(h_2)$ 的并联可用二进卷积系统 $S(h_1 + h_2)$ 来定义。显然, $S(h_1 + h_2)$ 的传递函数由 $H_{1c} + H_{2c}$ 和 $H_{1s} + H_{2s}$ 给定。 $S(h_1)$ 和 $S(h_2)$ 的串联用二进卷积系统 $S(h_1 * h_2)$ 定义。这个复合系统的传递函数由 $H_{1c}H_{2c}$ 和 $H_{1s}H_{2s}$ 给定。所有二进卷积系统的集相对于并联和串联而言就构成了交换代数。很清楚, 在信号空间由 $L_2(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ 或 $R(n)$ 给定的情况下, 也能引进二进卷积系统的概念。

3. Harmuth的叙率带通滤波器

二进卷积系统 $S(h)$ 具有由下式给定的传递函数 H_c 和 H_s :

$$H_c := ch_{[n2^k, (n+1)2^k)} \text{ 和 } H_s := ch_{[n2^k, (n+1)2^k)} \quad (60)$$

此处 $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ 以及 k 表示一个整数。则 $S(h)$ 称为带宽是 2^k 、截止叙率是 $n2^k$ 的带通滤

波器。对 $n=0$ ，叙率的带通滤波器也称为叙率的低通滤波器。可以证明，和方程(60)的传递函数 H_c 和 H_s 相连带的脉冲响应为：

$$h(t) = 2^{k+1} \text{cal}(n2^k, t) \text{ch}_{[0, 2^k)}(t) \quad \text{对所有 } t \in \mathbb{R} \quad (61)$$

由于 h 的特殊形式，就可能象用 $y = h * x$ 给出的那样，把输出信号 y 表示为

$$y(t) = \text{cal}(n2^k, t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \text{ch}_{[0, 2^k)}(t - m2^{-(k+1)}) \quad (62)$$

此处系数 a_m 由下式给定：

$$a_m = 2^{k+1} \int_{m/2^{k+1}}^{(m+1)/2^{k+1}} x(\tau) \text{cal}(n2^k, \tau) d\tau \quad (63)$$

方程(62)能够直接用电子器件实现[13, 23]。

4. 二进相关函数和最佳过虑

在这一节中，我们介绍在二进卷积系统理论的发展中已经完成的一些结果，这些二进卷积系统在均方意义下是最佳的。虽然离散和有限情况更容易处理（见[16, 21]），但这里仍与以前各节一样，考虑连续情况。至于更仔细的研究，可参看[24]。

让我们考虑下列问题：假定 $x \in L_2(\mathbb{R})$ 由和式 $x = u + v$ 给定，此处 u 是实际输入信号， v 是噪声。问题是要寻找一个二进卷积系统 $S(h)$ 使得输出信号 $h * x$ （即对应于受扰输入信号 $x = u + v$ 的输出信号）在均方意义下最佳地近似于输出信号 $h * u$ （即对应于未扰信号 u 的输出信号）。至于以式子来作等价表述，这就是必须寻找一个函数 $h \in L(\mathbb{R})$ ，使得 $\|h * x - h * u\| = \|h * v\|$ 最小。能够证明，当且仅当满足下列广义Wiener-Hopf方程时：

$$r_{ux} - r_x * h = 0 \quad (64)$$

因果性脉冲响应 h ，即对所有 $t < 0$ ， $h(t) = 0$ ，是给定问题的解。此处函数 r_{ux} 和 r_x 分别由下式来定义：

$$\begin{aligned} r_{ux}(t) &= (u * x)(t) & \text{对 } t \geq 0 \\ r_{ux}(t) &= 0 & \text{对 } t < 0 \\ r_x(t) &= (x * x)(t) & \text{对 } t \geq 0 \\ r_x(t) &= 0 & \text{对 } t < 0 \end{aligned}$$

r_{ux} 称为信号 u 和 x 的二进互相关函数； r_x 称为 x 的二进自相关函数。我们看到，方程(64)也能够有下述的解释：当且仅当 $(r, r_{ux}) \in s(h)$ 时，二进卷积系统 $S(h)$ 在上述意义下是最佳的。

把卷积定理用于方程(64)，便得到对最佳系统 $S(h)$ 的条件：

$$R_{ux,c} = H_c R_{x,c} \quad \text{和} \quad R_{ux,s} = H_s R_{x,s} \quad (65)$$

此处 $R_{ux,c}$ ， $R_{ux,s}$ 和 $R_{x,c}$ ， $R_{x,s}$ 分别表示相关函数 r_{ux} 和 r_x 的Walsh-Fourier变换。跟经典理论相似，这些函数可以看作“叙率的功率谱”。所以，若我们知道了 u 和 x 的互功率谱 $R_{ux,c}$ 和 $R_{ux,s}$ ，又知道了 x 的功率谱 $R_{x,c}$ 和 $R_{x,s}$ ，那么利用(65)可以计算最佳二进卷积系统的传递函数 H_c 和 H_s 。

当信号 u 和噪声 v 在二进相关意义下是不相关时（对所有 $t \in \mathbb{R}$ ， $r_{uv}(t) = 0$ ），我们有 $r_x = r_u + r_v$ 和 $r_{ux} = r_u$ 。因而，方程(65)的条件可以写为：

$$H_c = \frac{R_{u,c}}{R_{u,c} + R_{v,c}} \quad \text{和} \quad H_s = \frac{R_{u,s}}{R_{u,s} + R_{v,s}} \quad (66)$$

最后应提一下, 这个结果可以推广到更宽类型的“有限功率”信号, 也即对信号 x 而言, 极限:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt \quad (67)$$

是有限的。

参 考 文 献

1. Bass, C.A. (1970). "1970 Proceedings Applications of Walsh Functions", Washington, D.C. AD 707431.
2. Bramhall, J.N. (1972). "An annotated bibliography on, and related to, Walsh Functions." Technical Memorandum TG1198, The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory, Baltimore, U.S.A.
3. Chrestenson, H.E. (1955). "A class of generalized Walsh Functions", *Pacif. J. Math.* 5, 17—31.
4. Fine, N.J. (1949). "On the Walsh Functions." *Trans. Am. Math. Soc.* 65, 372—414.
5. Fine, N.J. (1950). "The generalized Walsh Functions". *Trans. Am. Math. Soc.* 69, 66—77.
6. Gelfand, I., Raikov, D. and Shilov, G. (1964). "Commutative Normed Rings," Chelsea, Bronx, New York.
7. Gibbs, J.E. (1967). "Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation", NPL; unpublished report.
8. Gibbs, J.E. (1969). "Some properties of functions on the non-negative integers less than 2^n ", NPL; DES Rept №3.
9. Gibbs, J.E. (1970a). Discrete complex Walsh functions in Bass, C.A. (1970) 106—122.
10. Gibbs, J.E. (1970b). Sine waves and Walsh waves in physics in Bass, C.A. (1970), 260—274.
11. Gibbs, J.E. (1970c). "Functions that are solutions of a logical differential equation," NPL; DES Rept №4.
12. Gibbs, J.E. and Millard, M.J. (1969). "Walsh functions as solutions of a logical differential equation", NPL; DES Rept №1.
13. Harmuth, H.F. (1969). "Transmission of Information by Orthogonal Functions", Springer-Verlag, Berlin/New York.
14. Hewitt, E. and Ross, K.A. (1963, 1970). "Abstract Harmonic Analysis 1,2", Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York
15. Kluvanek, I. (1965) "Sampling theorem in abstract harmonic analysis". *Mat.fyz. Cas.* 15, 43—48.

16. LaBarre, J.B.K.(1969). "A transform technique for linear, time-varying, discrete-time systems". University of Michigan, Ann Arbor, Technical Report, SEL №38.
17. Levy, P.(1944). "Sur une generalisation de fonctions orthogonales de M.Rademacher" *Comment. Math. Helv.* 16, 146—152.
18. Lines, P.D.(ed) (1971) "Proceedings of the Symposium Theory and Applications of Walsh Functions". The Hatfield polytechnic, Hatfield, U.K.
19. Morgenthaler, G.W.(1957). "On Walsh-Fourier Series." *Trans. Am. Math. Soc.* 84, 24, 350—360.
20. Paley, R.E.A.C (1932). "A remarkable series of orthogonal functions." *Proc. Lond Math. Soc.* 34, 241—279.
21. Pearl, J. (1971). "Application of Walsh transform to statistical analysis." *IEEE Trans SMC-1*, 111—119.
22. Pichler, F. (1937). Dissertation, Philosophische Fakultät, Universität Innsbruck.
23. Pichler, F.(1968). "Synthese linearer periodisch Zeitvariabler Filter mit vorgeschriebenem Sequenzverhalten", *Arch. Elektr. Übertr.* 22, 150—161.
24. Pichler, F. (1970). "Walsh-Fourier Synthese optimaler Filter". *Arch. Elektr. Übertr.* 24, 350—360.
25. Pichler, F.(1971). "Dyadische Faltungsoperatoren zur Beschreibung linearer systeme." *Sber. Ost. Akad. Wiss. Math-naturw. Kl.* 11 180. Bd.
26. Polyak, B.T. and Shreider, Yu. A. (1962). "The application of Walsh functions in approximate calculations". *Vop. Teor. Mat. Mash.Coll.* 11 174—190. (translation by J.E. Gibbs).
27. Selfridge, R.G. (1955). "Generalized Walsh transform" *Pacif. J. Math.* 5, 451—480
28. Vilenkin, N. J.(1974). "On a class of complete orthogonal systems" *Izv. Akad. nauk. SSSR, ser. matem.* 11, 363—400 (Russian).
29. Vilenkin, N J.(1952). "On the theory of Fourier integral on topological groups". *Mat. Sb. (N.S.)* 30(72), 233—244 (Russian)
30. Walsh, J L.(1923) . "A closed set of normal orthogonal functions" *Am. J. Math.* 45, 5—24.
31. Watari, Ch.(1958). "On generalized Walsh-Fourier series" *Tohoku Math. J. (2)* 10, 211—241.
32. Weiser, F.E. (1964). "Walsh function analysis of instantaneous nonlinear stochastic problems." Dissertation, Polytechnic Institute Brooklyn, 1964.
33. Weiss, P. (1967). "Zusammenhang von Walsh-Fourierreihen mit Polynomen". *Monats. Math.* 71(2), 165—179.
34. Zeek, R.W. and Showalter, A.E.(ed). (1971). "1971 Proceedings Applications of Walsh Functions". Washington D C. AD-727000. Also IEEE Trans. Electromag. Compat. EMC-13, №3, 1—218.
35. Zeek, R.W. and Showalter, A.E. (ed) (1972). "1972 Proceedings Applications of Walsh Functions". Washington D.C. AD-744650.

討 論

P.M.Schultheiss: 假若要把定义域从 $(0, 1)$ 开拓到 $(-\infty, \infty)$, 用什么方法开拓 sal 和 cal 函数?

答: 象我们所做的那样, 对于任意非负实数率, 人们能够定义出许多 sal 和 cal 函数。这些函数的集形成希尔伯特空间 $L_2(-\infty, \infty)$ 的核函数的完备集。

J.W.R.Griffith (评述比较信号带宽的问题):

关于带宽这一主题, 我想就是 Harmuth 本人, 在有人就用 Walsh 函数发生电磁波事——“注意所有这些谐波都是你发生的”——提出抗议时, 对发送所有这些正弦谐波的人提出了抗议。

T.Kooij: 在一个给定的 Walsh 函数的 (完备) 集中, Rademacher 函数的百分比有多大?

答: 严格说来, 仅当 k 是非负整数时 Walsh 函数 $\text{sal}(2^k, \cdot)$ 才称为 Rademacher 函数。所以, 有 2^n 个 Walsh 函数的完备集正好也具有 n 个 Rademacher 函数, 因而百分比应是 $n/2^n$ 。

P.M.Schultheiss: 有没有一个跟 Wiener-Hopf 因子分解问题简单等价的问题?

答: 这个因子分解的问题在这一理论中不出现, 因为在直接用 Walsh-Fourier 变换求解并 Wiener-Hopf 方程时, 你总可以求得合乎因果关系的解。

A.A.Reguchai: 若你有一个连续信号, 你在相等的时间间隔上进行抽样并对样本量化。这是否同变号率有限的信号等价?

答: 在量化一个信号中, 所得结果在相等时间间隔上是不变的, 我们就得到一个变号率有限的信号的变号率; 但是一般讲来, 此结果跟变号率有限的原来信号不同。

R.E.Bogner (评论): 若在每个区间中的值等于在该区间上的平均值, 那么就得到原来信号的正确变号率极限。

P.M.Schultheiss: 你能否给我举出出现二进卷积的问题的一个简单物理例子?

答: 在观察自然界中, 我个人还没有发现可用二进卷积模拟的任何现象。当然, 在许多工程例子中二进卷积可能十分有用。

R.E.Bogner: 在用 DFT 过滤长序列中, 我们需用选择/省略或某些另外的方法以便避免循环卷积。在用 DWT 时, 类似的问题会出现吗?

答: 本人还没有注意到此类问题。

(丁达夫译 张叔英 冯绍松 单荣华校)