

一类随机信号的谱分析

R.M. Fortet

(法国第六巴黎大学概率论研究室)

符号和标记

$\overline{a}$ 复数 a 的共轭复数。

$\tilde{\phi}(\cdot)$ 函数 $\phi(\cdot)$ 的Fourier变换。

$\tilde{f}$ 分布 f 的Fourier变换。

$\langle f, z \rangle$ 在向量空间 Z 上线性泛函 f 对应于元素 $z \in Z$ 的数。

$$D_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) f(\cdot) = \frac{\partial^h}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_n^{\alpha_n}} f(\cdot)$$

整数 $h > 0$; $\alpha_j \geq 0$, 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = h$;

$f(t) = f(t_1, \dots, t_n)$ 是 $t = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathbf{R}^n$ 的函数。

$$D_0 f(\cdot) = f(\cdot)$$

$$D_n f(\cdot) = \frac{d^h}{dt^h} f(\cdot) \quad \text{当 } n=1 \quad (t=t_1)。$$

$D_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) f$, $D_0 f$, $D_n f$: 同样的意义, 但用于一个分布 f 。

$v.a.$ 缩写: 随机变量。

$e.m.$ 缩写: 数学期望。

$f.a.$ 缩写: 随机函数。

$E(X)$ 随机变量 X 的数学期望。

$d.a.$ 缩写: 随机分布。

B_n $\mathbf{R}^n$ 中的Borel σ -代数。

一、关于分布函数的说明

本报告的主要目的是要说明分布函数的理论为随机信号的研究提供了有效的计算方法。

关于分布函数的理论, I.M. Gelfand, G.E. Chilov, N. Y. Vilenkin⁽¹⁾ 或者 L. Schwartz⁽²⁾ 已作了非常广泛的叙述。这里, 我仅就该理论的几个要点作一下扼要的说明。

(a) 函数类 S_n

我们用 S_n (n 为 ≥ 1 的整数) 表示满足下列条件的(复)函数 $\phi(t)$, $t \in \mathbf{R}^n$ 的向量空间:

(1) $\phi(\cdot)$ 具有各阶偏导数;

(2) 对所有整数 $h \geq 0$ 和所有满足 $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = h$ 的整数 $\alpha_j \geq 0 (j=1, \dots, n)$, 以及对所有的整数 $q_j \geq 0 (j=1, \dots, n)$, 存在一个常数 $C_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)$ 使得

$$|t_1^{q_1} \dots t_n^{q_n} D_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \phi(t_1, \dots, t_n)| \leq C_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)^*$$

$\forall t \in \mathbf{R}_n$

设 $\phi_k(\cdot) \in S_n$, $\{\phi_k(\cdot); k=1, 2, \dots\}$ 是函数列; 我们称它在 S_n 中趋向于 0 (当 $k \rightarrow +\infty$), 如果 (按上面的记号):

(1) 对所有 h, q_j, α_j , 存在一个与 k 无关的常数 $C_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)$, 使得对一切 k 及一切 $t \in \mathbf{R}^n$ 有

$$|t_1^{q_1} \dots t_n^{q_n} D_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \phi_k(t_1, \dots, t_n)| \leq C_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n; q_1, \dots, q_n)$$

(2) 对所有 h, α_j , 极限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \phi_k(t_1, \dots, t_n) = 0 \text{ 对 } \mathbf{R}^n \text{ 中的任何有限部分 } t \text{ 是一致的.}$$

例(1.1) 属于 S_1 的函数 $\phi(\cdot)$ 的一个例子是函数

$$\phi(t) = e^{-t^2} \quad (n=1; t=t_1)$$

Fourier 变换 $\phi(\cdot) \in S_n$ 的 Fourier 变换 $\tilde{\phi}(\cdot)$ 定义为

$$\tilde{\phi}(\nu) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i(\nu, t)} \phi(t) dt \quad (\nu \in \mathbf{R}^n) \quad (1.1)$$

其中 (ν, t) 是指表达式 $\sum_{j=1}^n \nu_j t_j$. 我们有:

定理 (1.1) Fourier 变换 (1.1) 是 S_n 自身的一一对应的并且双方连续的线性变换, 其反演式为

$$\phi(t) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{2\pi i(\nu, t)} \tilde{\phi}(\nu) d\nu \quad (1.2)$$

下面, 我们要用到:

$n=1$ 的情况 ($t=t_1, \nu=\nu_1, (\nu, t)=\nu t$);

$n=2$ 的情况, 在这种情况下, 对于 $\phi(\cdot, \cdot) \in S_2$ 我们把 (1.1) 改为下列方便的形式:

$$\tilde{\phi}(\nu_1, \nu_2) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2\pi i(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2)} \phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.3)**$$

(b) S_1 一分布

为了书写方便起见, 我们仅限于对 $n=1$ 的情况引进分布的概念, 它可以立即被推广至任意 n 的情况。

我们把 S_1 上的所有连续的线性泛函 f 称作 S_1 -分布。这就是说, 如果在 S_1 中 $\phi(\cdot)$ 趋于 0, 那么 $\langle f, \phi(\cdot) \rangle$ 亦趋于 0。

一个 S_1 -分布 f , 我们说它趋于 S_1 -分布 g , 如果对 所有 $\phi(\cdot) \in S_1$, $\langle f, \phi(\cdot) \rangle$ 趋于 $\langle g, \phi(\cdot) \rangle$ 。我们用 $\mathbf{D}(S_1)$ 来表示全体 S_1 -分布的集合。

例(1.2) 假定 $m(dt)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个 σ -可加的集函数, 如果存在 $\alpha > 0$, 使得

* 原文不等式右端为 $C_h(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ——译者

** 此式原文有误。——译者

$$\int_{\mathbf{R}} (1+t^2)^{-a} |m|(dt) < +\infty \quad (1.3)^*$$

那么, 等式

$$\langle m, \phi(\cdot) \rangle = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) \overline{m}(dt) \quad \forall m(\cdot) \in S_1 \quad (1.4)$$

确定了一个 S_1 -分布 m , 它等价于 $m(dt)$ 。

一个特殊的情况是 $m(dt) = f(t)dt$, $f(t)$ 是密度, 这时 (1.4) 式变为:

$$\langle m, \phi(\cdot) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \overline{f(t)} dt \quad (1.5)$$

我们可以说, 普通函数 $f(\cdot)$ 通过 (1.5) 式与一个 S_1 -分布等价。

例 (1.3) 考虑函数 $f(t) = 1/t$, 它不能按 (1.5) 式直接看作为一个分布, 因为对于 $\phi(\cdot) \in S_1$, 积分 $\int_{\mathbf{R}} \frac{\phi(t)}{t} dt$ 一般来讲是没有意义的。但是, 我们可以用下式定义一个 S_1 -分布 I , 或“逆分布”:

$$\langle I, \phi(\cdot) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|t| > \varepsilon} \frac{\phi(t)}{t} dt \quad \forall \phi(\cdot) \in S_1 \quad (1.6)$$

它等价于

$$\langle I, \phi(\cdot) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt$$

也等价于

$$\langle I, \phi(\cdot) \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Log} |t| D_1 \phi(t) dt$$

(C) S_1 -分布的一般形式

令 H_m (m 为 ≥ 0 的整数) 是函数 $\phi(t)$ ($t \in \mathbf{R}$) 的一个集合, 它满足:

(1) 对于 $0 \leq h \leq m$, $D_h \phi(\cdot)$ 存在并且在 B_1 上可测;

$$(2) A_m(\phi)^2 = \sum_{h=0}^m \int_{\mathbf{R}} |D_h \phi(t)|^2 (1+t^2)^{2m} dt < +\infty \quad (1.7)$$

H_m 为一个 Hilbert 空间, 在这个空间内 $\phi(\cdot) \in H_m$ 与 $\psi(\cdot) \in H_m$ 的复共轭乘积 $\phi(\cdot)_0 \psi(\cdot)$ 定义为:

$$\phi(\cdot)_0 \psi(\cdot) = \sum_{h=0}^m \int_{\mathbf{R}} D_h \phi(t) \overline{D_h \psi(t)} (1+t^2)^{2m} dt \quad (1.8)$$

由 (1.7) 式确定的 $A_m(\phi)^2$ 是 $\phi(\cdot) \in H_m$ 的模。

设 $\phi(\cdot) \in S_1$, 又 $\phi(\cdot) \in H_m$, $m \geq 0$, 可以证明:

定理 (1.2) 如果 $f \in \mathcal{D}(S_1)$, 存在 $m \geq 0$ 和一个属于 H_m 的函数 $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$, 那么, 对一切 $\phi(\cdot) \in S_1$, $\langle f, \phi(\cdot) \rangle$ 等于在 H_m 中 $\phi(\cdot)$ 与 $f(\cdot)$ 的复共轭乘积 $\phi(\cdot)_0 f(\cdot)$ 。换句话说:

*原文公式编号有冲突, 为前后呼应起见, 仍予保留。——译者

$$\langle f, \phi(\cdot) \rangle = \sum_{n=0}^m \int_{\mathbf{R}} D_n \phi(t) \overline{D_n f(t)} (1+t^2)^{-2m} dt \quad (1.9)$$

从 $\langle f, \phi(\cdot) \rangle$ 的这个表达式还可以很容易地推导出其它等价式子, 但是, 我们要考虑其最便于应用的形式。

(d) S_1 -分布的导数

一个 S_1 -分布 f 的导数是由下式定义的 S_1 -分布 $D_1 f$:

$$\langle D_1 f, \phi(\cdot) \rangle = -\langle f, D_1 \phi(\cdot) \rangle, \quad \forall \phi(\cdot) \in S_1$$

(e) S_1 -分布与一个函数的乘积

假定 $\lambda(t)$ 是一个 $t \in \mathbf{R}$ 的 (复) 函数, 对于任何 $\phi(\cdot) \in S_1$, 函数 $\lambda(\cdot)\phi(\cdot) \in S_1$; 这种函数的一个例子是 $\lambda(t) = t^q$ (q 是 ≥ 0 的整数)。我们把 S_1 -分布 f 与函数 $\lambda(\cdot)$ 的乘积定义为 S_1 -分布 $g = \lambda(\cdot)f$:

$$\langle g, \phi(\cdot) \rangle = \langle f, \lambda(t)\phi(\cdot) \rangle, \quad \forall \phi(\cdot) \in S_1 \quad (1.10)$$

(f) S_1 -分布的 Fourier 变换

一个 S_1 -分布 f 的 Fourier 变换是一个 S_1 -分布 $\tilde{f}$, 定义作:

$$\langle \tilde{f}, \tilde{\phi}(\cdot) \rangle = \langle f, \phi(\cdot) \rangle, \quad \forall \tilde{\phi}(\cdot) \in S_1$$

这样确定的 Fourier 变换是 $\mathbf{D}(S_1)$ 自身的一一对应的双方连续的线性变换。

定理(1.3) 一个 S_1 -分布 f 的导数 $D_1 f$ 的 Fourier 变换 $\tilde{D_1 f}$ 是 $\tilde{f}$ 与函数 $2\pi i t$ 的乘积。

二、一个多维随机变量的非线性函数的数学期望的计算

作为第一个应用, 我们将引出一个多维 v.a. 的非线性函数的 e.m. 的计算。这个应用是我们所熟知的, 这里仅作简单的说明。

设 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是一个概率密度为 $\rho(x_1, \dots, x_n)$ 的实的 n 维的 v.a.; 又设 $\lambda(x_1, \dots, x_n)$ 是 $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{R}^n$ 的实的或复的函数; 我们提出如何计算 $E(\lambda(x_1, \dots, x_n))$ 的问题。

按定义, 问题在于计算积分:

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} \lambda(x_1, \dots, x_n) \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.1)$$

从原则上讲, 当且仅当积分 I 绝对收敛时 $E(\lambda(x_1, \dots, x_n))$ 才存在。但是, 我们要假定函数 $\rho(\cdot)$ 属于类 S_n , 同时 $\lambda(\cdot)$ 要象一个 S_n -分布 λ 那样来看待; 下面我们要系统地利用第一节中的概念和记号。 I 可以理解为:

$$I = \langle \lambda, \rho(\cdot) \rangle \quad (2.2)$$

在这些条件下, 我们承认 $E(\lambda(x_1, \dots, x_n))$ 存在, 并且按定义等于 $\langle \lambda, \rho(\cdot) \rangle$ 。进而要估计 $\langle \lambda, \rho(\cdot) \rangle$ 。根据第一节中引入的记号, 有:

$$\langle \lambda, \rho(\cdot) \rangle = \langle \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}(\cdot) \rangle \quad (2.3)$$

其中 $\tilde{\lambda}$ 是 S_n -分布 λ 的 Fourier 变换, $\tilde{\rho}(\cdot)$ 是 ρ 的 Fourier 变换; 因而 $\tilde{\rho}(v_1, \dots, v_n)$ 是属于 S_n 的 $\{v_1, \dots, v_n\} \in \mathbf{R}^n$ 的函数。事实上:

$$\tilde{\rho}(v_1, \dots, v_n) = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\{-2\pi i \sum_{h=1}^n v_h x_h\} \rho(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (2.4)$$

这就是说, 如果我们令 $\omega_h = -2\pi v_h$ ($h=1, 2, \dots, n$), 那么 ω_h 的函数 $\tilde{\rho}(-(\omega^1/2\pi), \dots, (\omega^n/2\pi))$ 与 n 维 $v.a.$ $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的 (n 维) 特征函数没有区别。

现在我们假定 λ 等价于 $(\mathbf{R}^n, B_n)$ 上的一个集函数 $\tilde{\lambda}(dv_1, \dots, dv_n)$, 而且是 σ -可加的和 σ -有限的, 不管 n 是什么, 它都满足 (1.3) 式, 于是 (2.3) 就可写为:

$$I = \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{\rho}(v_1, \dots, v_n) \tilde{\lambda}(dv_1, \dots, dv_n) \quad (2.5)$$

(2.5) 式的积分计算是容易的。

比如, 我们假定 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 是一个拉普拉斯 $v.a.$, 即

$$E(x_h) = 0 \quad (h=1, 2, \dots, n); \quad (2.6)$$

条件 (2.6) 从原则上来说并不限制我们下面的讨论, 我们只是为了书写简单而已。令:

$$E(x_j x_k) = \gamma_{jk} \quad (j, k=1, 2, \dots, n) \quad (2.7)$$

γ_{jk} 是 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的协方差矩阵 Γ_n 的元素 (参看 R. Fortet^[1], V.5.); 于是

$$\tilde{\rho}(v_1, \dots, v_n) = \exp\{-2\pi^2 \sum_{j,k} \gamma_{jk} v_j v_k\} \quad (2.8)$$

它当且仅当 Γ_n 是正定的时候 (这正是我们的假定) 才属于类 S_n 。 (2.5) 式可以写作:

$$E[\tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)] = \int_{\mathbf{R}^n} \exp\{-2\pi^2 \sum_{j,k} \gamma_{jk} v_j v_k\} \tilde{\lambda}(dv_1, \dots, dv_n) \quad (2.9)$$

它可以直接进行计算。

但是, 我们还要注意到, 按 (2.3) 式:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_{jk}} E[\tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)] = \langle \tilde{\lambda}, \frac{\partial}{\partial \gamma_{jk}} \tilde{\rho}(\cdot) \rangle = -2\pi^2 \langle \tilde{\lambda}, v_j v_k \tilde{\rho}(\cdot) \rangle \quad (2.10)^*$$

因此, 按定理 (1.3)

$$-\frac{\partial}{\partial \gamma_{jk}} E[\tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)] = \frac{1}{2} \langle \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \tilde{\lambda}, \rho(\cdot) \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{\lambda}, \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \rho(\cdot) \rangle \quad (2.11)$$

$$\text{即 } \frac{\partial}{\partial \gamma_{jk}} E[\tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)] = -\frac{1}{2} E\left[\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)\right] \quad (2.12)$$

在 (2.11) 式及 (2.12) 式中, $(\partial^2/\partial x_j \partial x_k) \tilde{\lambda}$ 是分布意义上的二阶导数, 按第一节中的记号就是:

$$D_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \tilde{\lambda}, \quad \text{当 } h \neq j, k \text{ 时 } \alpha_h = 0, \alpha_j = \alpha_k = 1$$

如果 (2.11) 及 (2.12) 的第二项可以直接计算, 我们就可以从一个积分推导出 $E[\tilde{\lambda}(x_1, \dots, x_n)]$ 来。

* 此式原文有误。——译者

三、二阶随机的 S_1 -分布

假定 H 是二阶 $v.a.$ 的Hilbert空间,也就是说,它是满足 $E(|Z|^2) < +\infty$ 的 $v.a.$ Z 的集合(一般来说是复的)。

称 H 是一个Hilbert空间,在这个空间里,一个元素 $X \in H$ 与另一个元素 $Y \in H$ 的复共轭乘积定义为 $E(X\bar{Y})$ 。

假定对每一个 $\phi(\cdot) \in S_1$, 相应的 $\langle Z, \phi(\cdot) \rangle \in H$, 并具有如下性质:

$$(1) \forall \phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in S_1, \langle Z, \phi_1(\cdot) + \phi_2(\cdot) \rangle = \langle Z, \phi_1(\cdot) \rangle + \langle Z, \phi_2(\cdot) \rangle$$

$$(2) \forall \phi(\cdot) \in S_1, \rho \in \mathbb{C}, \langle Z, \rho \phi(\cdot) \rangle = \rho \langle Z, \phi(\cdot) \rangle;$$

(3) 如果当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 函数序列 $\{\phi_k(\cdot)\}$ ($\phi_k(\cdot) \in S_1$) 在 S_1 中趋于0, 那么 $\langle Z, \phi(\cdot) \rangle$ 在 H 中趋于 H 中的零元素(也就是说几乎处处等于0的 $v.a.$)。换句话说, 如果 $\{\phi_k(\cdot)\}$ 在 S_1 中趋于0, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} E(|\langle Z, \phi_k(\cdot) \rangle|^2) = 0$$

按定义 Z 是一个二阶随机 S_1 -分布。

正如对所有二阶的 $f.a.$ 一样, 对二阶 S_1 - $d.a.$ 的研究的基本工具是其协方差 $\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ 。它定义为:

$$\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) = E(\langle Z, \phi_1(\cdot) \rangle \overline{\langle Z, \phi_2(\cdot) \rangle}), \phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in S_1^*$$

注意, 如果 $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in S_1$, 那么 $\{t_1, t_2\} \in \mathbb{R}^2$ 的函数 $\phi_1(t_1), \phi_2(t_2)$ 就属于 S_2 。则有:

定理(3.1) 如果 Z 是一个 S_1 - $d.a.$, $\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ 是它的协方差, 那么存在一个唯一的 S_2 -分布 Γ , 使得 $\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot)) = \langle \Gamma, \overline{\phi_1(\cdot)} \phi_2(\cdot) \rangle, \phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot) \in S_1$ 。

利用定理(1.2) (推广到 S_2), 就有可能从 $\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ 的表达式出发给出一个象(1.9)那种的 Γ 的表达式来。有时为了充分利用这一结果, 应当考虑到 Γ 不能是任意的 S_2 -分布, 因为就象一切协方差一样, $\Gamma(\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot))$ 是非负定的; 但是, 用于寻求 Γ 的必要且充分的条件似乎还没有在文献中确立起来。

尽管如此, 我们仍然称 Γ 为 Z 的 S_2 -分布协方差。

(a) 零阶的 S_1 - $d.a.$ 的Fourier变换

零阶的 Z 的 S_1 - $d.a.$ 的Fourier变换是二阶的 $\tilde{Z}$ 的 S_1 - $d.a.$, 它定义为:

$$\langle \tilde{Z}, \tilde{\phi}(\cdot) \rangle = \langle Z, \phi(\cdot) \rangle \quad \forall \phi(\cdot) \in S_1.$$

我们立刻得到:

定理(3.2) $\tilde{Z}$ 的 S_2 - $d.a.$ 协方差是 Z 的 S_2 - $d.a.$ 协方差的Fourier变换 $\tilde{\Gamma}$ 。

(b) 二阶的 S_1 - $d.a.$ 的导数

对于 $\phi(\cdot) \in S_1$, 等式 $\langle D_1 Z, \phi(\cdot) \rangle = -\langle Z, D_1 \phi(\cdot) \rangle$ 确定了一个二阶 $D_1 Z$ 的 S_1 - $d.a.$, 称作 Z 的导数。我们立刻得到:

定理(3.3) $D_1 Z$ 的 S_2 -分布协方差是 S_2 -分布 $D_2(1, 1)\Gamma$, 其中 Γ 是 Z 的 S_2 -分布协方差。

* 原文中此处的 $\phi_2(\cdot)$ 误为 $r_2(\cdot)$ 。——译者

四、脉冲序列的谱

为了表明分布理论对于某些计算的好处和用途，我谈一下下面的特殊问题。

在每一时刻 τ ，有一脉冲，也就是说，有一个 $t \in \mathbf{R}$ 的f. a. $I(\tau, t)$ 。另一方面，我们随机地在 $\mathbf{R}$ 上选取时刻 $\{\tau_j\}$ ， $(j = 0, \pm 1, \dots)$ ；这些 $\{\tau_j\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上构成一个随机的时间分布 R 。假定 $S(t)$ 是由

$$S(t) = \sum_j I(\tau_j, t)$$

所定义的信号。

用下面的方式表达 R 是方便的：对于所有 $\omega \in B_1$ ，有一个属于 ω 的 τ_j 的随机数 $M(\omega)$ ，使得 $M(\omega)$ 是 $(\mathbf{R}, B_1)$ 上的随机测度。(4.1)式可以写作：

$$S(t) = \int_{\mathbf{R}} I(\tau, t) M(d\tau) \quad (4.2)$$

可以证明 $E(M(d\tau_1)M(d\tau_2)) = m_2(d\tau_1, d\tau_2)$ 是 $(\mathbf{R}^2, B_2)$ 上的一个测度；那么（在很少的限制条件下）这是一个 S_2 -分布。

研究 $M(\cdot)$ 依赖于 $I(\tau, t)$ 的情况是有趣的，但是这一点似乎至今尚未得到；我们假定v. a. 族 $I(\tau, t) ((\tau, t) \in \mathbf{R}_2)$ 在随机测度 $M(\cdot)$ 下是独立的。

令 $\gamma(t_1, t_2; \tau_1, \tau_2) = E(I(\tau_1, t_1) \overline{I(\tau_2, t_2)})$

从等式

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_{\mathbf{R}^2} \gamma(t_1, t_2; \tau_1, \tau_2) m_2(d\tau_1, d\tau_2) \quad (4.3)$$

出发，研究信号 $S(t)$ 的协方差 $\Gamma(t_1, t_2) = E(S(t_1) \overline{S(t_2)})$ 是容易的。

(a) 对角线约束

在下面的研究中，我们将探讨至今尚未充分揭示的一些结果。

假定 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的“对角线” $t_2 = t_1$ ；又假定 $m_2(dt_1, dt_2)$ 是 $(\mathbf{R}^2, B_2)$ 上实的或复的 σ -可加的集函数。作为例子， $m_2(dt_1, dt_2)$ 可以是一个测度。

设 $d^{m_2(\omega)}$ 是如下定义的 $\omega \in B_2$ 的函数：

$$d^{m_2(\omega)} = m_2(\omega \cap D), \quad \forall \omega \in B_2;$$

我们称 $d^{m_2(\cdot)}$ 是 $m_2(\cdot)$ 的对角线约束。

我们把 $\mathbf{R}^2$ 看作是具有两条正交轴 ot_1, ot_2 的一个平面。设 π 是由 D 到 ot_1 的投影运算： π 是 D 的子集 δ 和 $\mathbf{R}$ 的子集 $e = \pi(\delta)$ 间的一个一一对应。

于是，考虑 $e \in B_1$ 的集函数 $\nu(e)$ ，它定义为 $\nu(e) = m_2(\pi^{-1}(e))$ ；我们称 $\nu(e)$ 为 $m_2(\cdot)$ 投影的对角线约束；用一般的方法， $(\mathbf{R}^2, B_2)$ 上的 σ -可加函数 $m_2(dt_1, dt_2)$ 的投影对角线约束可以表示为 $P^{m_2}(dt)$ 。

例 (4.1) 设 $\mu(dt)$ 和 $\nu(dt)$ 是 $(\mathbf{R}, B_1)$ 上的两个测度；

考虑：

$-\mu(dt)$ 的离散分量 $\overset{a}{\mu}(dt)$ ；如果它不为零，那么它是由分别位于 $x_j (j = 1, 2, \dots)$ 的值 a_j 构成的；

— $v(dt)$ 的离散分量 $\overset{d}{v}(dt)$; 它是由分别位于点 $y_k (k=1, 2, \dots)$ 的值 b_k 构成的。

如果 z 是 $\mathbf{R}$ 中的这样一个点: 存在一个 j 和 k , 使得 $z=x_j=x_k$; 在 z 放上质量 $a_j b_k$, 这样, 我们就构成一个离散的测度: $\overset{d}{\mu} \oplus \overset{d}{\nu}$; 容易验证: $m_2(dt_1, dt_2) = \mu(dt_1) \nu(dt_2)$ 的投影对角线约束 $\overset{d}{\mu} m_2(dt)$ 等于 $\overset{d}{\mu} \oplus \overset{d}{\nu}$ 。

附注 (4.1) 在例 (4.1) 中, 假定 $\mu(dt)$, $\nu(dt)$ 是测度, 当它是实的或复的 σ -可加集函数时, 推广可以立刻得到。

对假定为 $(\mathbf{R}^2, B_2)$ 上的 σ -可加集函数 $m_2(dt_1, dt_2)$, 我们引进了对角线约束和投影对角线约束的概念。当 $m_2(dt_1, dt_2)$ 是任意一个 S_2 -分布时, 其推广似乎是不可能的。

(b) 相互独立的脉冲列的例子

假定对于 $\tau_2 \neq \tau_1$, $f. a. I(\tau_1, \cdot)$ 和 $I(\tau_2, \cdot)$ 是相互独立的。此外:

(1) 假定 $E\{I(\tau, t)\}$ 仅依赖于 $(t-\tau)$, 令:

$$h_1(t-\tau) = E\{I(\tau, t)\};$$

(2) 假定 $E\{[I(\tau, t_1) - h_1(t_1 - \tau)][I(\tau, t_2) - h_1(t_2 - \tau)]\}$ 仅依赖于 $(t_1 - \tau)$ 和 $(t_2 - \tau)$, 又令:

$$h_2(t_1 - \tau, t_2 - \tau) = E\{[I(\tau, t_1) - h_1(t_1 - \tau)] \cdot [I(\tau, t_2) - h_1(t_2 - \tau)]\}$$

(3) 令 $m_1(\omega) = E\{M(\omega)\}$;

(4) 令 $\mu(\omega) = E\{|M(\omega) - m_1(\omega)|^2\}$;

再假定, 当 $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$ 时, $E\{[M(\omega_1) - \mu(\omega_1)][M(\omega_2) - \mu(\omega_2)]\} = 0$ 那么, 可以求得:

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, t_2) &= \int_{\mathbf{R}} h_1(t_1 - \tau) m_1(d\tau) \int_{\mathbf{R}} \overline{h_1(t_2 - \tau)} m_1(d\tau) \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} h_2(t_1 - \tau, t_2 - \tau) \left[\left(\overset{d}{m_1} \oplus \overset{d}{m_2} \right) (d\tau) + \mu(d\tau) \right] \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}} h_1(t_1 - \tau) \overline{h_1(t_2 - \tau)} \mu(d\tau) \end{aligned} \quad (4.4)$$

(c) 调和协方差

我们可以把 $\Gamma(t_1, t_2)$ 的 Fourier 变换 S_2 -分布 $\widetilde{\Gamma}(dv_1, dv_2)$ 叫做信号 $S(t)$ 的调和协方差; 用符号表示就是:

$$\Gamma(t_1, t_2) = \int_{\mathbf{R}} e^{2\pi i(\nu_1 t_1 + \nu_2 t_2)} \widetilde{\Gamma}(dv_1, dv_2) \quad (4.5)^*$$

一般来说, $\widetilde{\Gamma}(dv_1, dv_2)$ 是 $(\mathbf{R}^2, B_2)$ 上的 σ -可加的复的集函数, 在这种情况下, 我们总是这样假定的。

谱 信号 $S(t)$ 的谱仅是 $\widetilde{\Gamma}(dv_1, dv_2)$ 的投影对角线约束的另一种形式。

*此处原文为 $\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2$ 。—译者

例 (4.2) 作为一个例子, 我们从行之有效的 (4.4) 式出发。假定 $h_1(x)$, $h_2(x, y)$ 的 Fourier 变换 $\tilde{h}_1(v)$, $\tilde{h}_2(v_1, v_2)$ 是函数。用 $\tilde{m}_1, \tilde{\mu}, \tilde{n}$ 分别表示 $m_1(d\tau)$, $\mu(d\tau)$,

$\left(\frac{d}{m_1} \oplus \frac{d}{m_2}\right)(d\tau) + \mu(d\tau)$ 的 Fourier 变换; 那么我们求出:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(dv_1, dv_2) = & \tilde{h}_1(v_1) \overline{\tilde{h}_1(v_2)} \overline{\tilde{m}_1(dv_1)} \overline{\tilde{m}_1(dv_2)} + \tilde{h}_2(v_1, v_2) \tilde{n}(dv_1 - \\ & - v_2) dv_2 + \tilde{h}_1(v_1) \overline{\tilde{h}_1(v_2)} \overline{\tilde{\mu}(dv_1 - v_2)} dv_2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

这就是分布 $\tilde{n}(dv_1 - v_2) dv_2$ 的意义; 在平面 Ov_1, v_2 上通过如下定义的 $OxOy$ 轴:

Ox 是 v_1 递增方向的直线 $v_1 = -v_2$;

Oy 是 v_2 递增方向的直线 $v_1 = v_2$;

假定分布 $\tilde{n}(dv_1)$ 是 (Av_1, B_1) 上的 σ -可加的集函数; 用 ${}_x\tilde{n}(dx)$ 表示它对 Ox 的投影; (Ov_1v_2, B_2) 上的分布 $\tilde{n}(dv_1 - v_2) dv_2$ 同样是 (Oxv, B_2) 上由 $\frac{1}{\sqrt{2}} {}_x\tilde{n}(dx) dy$ 定义的分布, 显然, 它也是 (Oxv, B_2) 上的 σ -可加的集函数。

分布 $\tilde{\mu}(dv_1 - v_2) dv_2$ 也可以类似地解释。

用上面所作的解释, 由 (4.6) 式可立刻推导出谱 ${}_p\tilde{\Gamma}(dv)$ 来:

$${}_p\tilde{\Gamma}(dv) = |h_1(v)|^2 \left(\frac{d}{\tilde{m}_1} \oplus \frac{d}{\tilde{m}_1} \right)(dv) + a^2 \tilde{h}_2(v, v) dv + b^2 |h_1(v)|^2 \quad (4.7)$$

a^2 指的是集函数 $\tilde{n}(dv)$ 在 $v=0$ 所包含的值, b^2 指的是集函数 $\tilde{\mu}(dv)$ 在 $v=0$ 所包含的值。

在 (4.7) 中第一项总是线谱, 第二项和第三项是连续的密度形式的谱。

附注 (4.2) 在随机的或非随机的时刻取样, 对于 $t \in \mathbf{R}$ 的一个 f. a. $Z(t)$, 可以导致形式为:

$$S(t) = \int_{\mathbf{R}} I(\tau, t) Z(\tau) M(d\tau)$$

的信号 $S(t)$ 的讨论。它们可以象 (4.2) 形式的信号那样予以研究, 在别的地方也可推导出这种形式。

参 考 文 献

1. Gelfand, I. M. et al. "Les distributions"; edit. franç., Paris 1967.
2. Schwartz. L. "Théorie des distributions"; 3^e ed, Paris 1966.

(李启虎译 赵克勇校)