评述：用自相关函数来分析和设计信号

B. Veltman, A. Van den Bos等

（荷兰台尔福特工艺大学）

一、自相关函数的外推

在信号频谱分析的经典方法中，功率谱密度是从自相关函数作傅里叶变换来计算的。长期以来认为，比起平均运算来，数字傅里叶变换是更为繁复的处理。所以，傅里叶变换常常是在平均乘积的截出序列上实现的。截出通常是由有限的测量时间（改进统计稳定性），由可允许的计算时间或由于作波长测量时测量采样数目的有限所引起的。由于今天的数字傅里叶变换方法是种快速运算，所以目前人们计算功率谱密度所用方法是首先对所有数据点作变换，随后再平均。

然而，在一些应用中需要首先测量相关函数，例如，在非常高的频率所作的联机测量。使用粗糙量化信号的并联相关器能给出比FFT处理更迅速的数据再现。在自变量由波长代替频率（位置代替时间）的测量中，常常采用相关分析。在这些情况下，所面临的问题是，相关函数的截出效应对功率谱密度的影响。不需要的截出效应可通过使用适当的窗来消除；代价是降低频率的分辨力。

为了增加频率分辨力，可把相关函数外推。对于一个具体的自相关函数的外推，可以认为是一个建立在级数近似上的解析延拓，此级数是从该函数的已知部分上恰当地选择出来的。在这样的近似中特别有兴趣的是“非参量”方法，它意味着，这样的近似不要求或者仅仅稍为要求有关于具体相关函数的假设条件。

在本文中讨论了文献〔1,2〕所提出的两个方法。第一个可认为是无参量处理。它仅假设：时间序列是带宽有限的，且带宽已经知道。这常常是正确的，因为一个时间序列只能描述一个带宽有限的信号。于是自相关函数由带宽有限函数项的级数来近似，此函数项为：角长球波函数（angular prolate spheroidal wave functions）。

第二个方法，被称为最大熵分析，它表现为无参量，因为看来只用自相关函数的一个内在性质。然而它表明，这里有一个隐含着的关于信号为全极点模型的假设。

1．用角长球波函数近似

通常角长球波函数表为时间函数；于是它的傅里叶变换形式是频谱〔3〕。对于相关函

数，自变量是时延，它的变换是功率谱密度。自相关函数$R(\tau)$近似地为：

$$R(\tau)=\sum_{0}^{\infty}A_nS_{0n}\left(W\tau_m,\frac{\tau}{\tau_m}\right)$$

式中

$$A_n(\overline{W}\tau_m)=\frac{1}{U_{0n}^2}\int_{-\tau m}^{+\tau m}S_{on}(W\tau_m,\frac{\tau}{\tau_m})R(\tau)d\tau$$

$$U_{0n}^2=\int_{-\tau m}^{+\tau m}S_{0n}^2(W\tau_m,\frac{\tau}{\tau_m})d\tau$$

W是信号带宽，τ_m是最大时间延迟，S_{on}是更一般的波函数S_{mn}的特殊情况，U_{on}是归一化系数（相对时间函数，U_{on}与波函数在时间区间$-T$到$+T$上的总能量有关）。推导出来的级数是以带宽有限的函数为基础的；它们在整个无限的区间规格化正交，在整个有限区间内正交。波函数正比于有限傅里叶变换的特征函数〔3〕。

波函数S_{on}的数值估计可从Legendre函数的级数获得。为计算波函数的这些Legendre函数以及系数可从标准递推公式求得。

全部计算实行下列步骤：

(a) 选择相关函数的最大时延，把它与已知信号带宽相乘。

(b) 计算Legendre函数以及在所关心的区间上级数的系数。

(c) 计算所关心的区间上的波函数。

(d) 用给定的相关函数部分计算A_n。

(e) 计算在延伸区间上的数值近似。

从这个程序就清楚，涉及计算时间是一个相当大的量。舍入误差的累积立刻会导致掩盖了级数近似的真正的计算值。精心地选择离散量化级是需要的〔4〕。

此方法首先应用到带宽有限相关函数的理想情况：

$$R(\tau)=\frac{\sin W\tau}{W\tau}$$

它假定了外推到两倍给定的区间长度。

图1表示对于$W\tau_m=2\pi$的结果。图2和3表示同样的函数，但所选定的10%带宽有些偏离。图4中对相关函数为

$$R(\tau)=\left[\frac{\sin W\tau/2}{W\tau/2}\right]^2$$

作同样计算。对这些本质上是带宽有限信号，在信号带宽有估值可靠的情况下所给出的结果是十分满意的。假如有人把同样处理用到非带宽有限信号的情况去，结果就会迅速恶化。图5表明对一个具有假定带宽限在－3分贝点的二阶Butterworth滤波器的计算结果。图6是对一阶滤波器的同样计算结果。

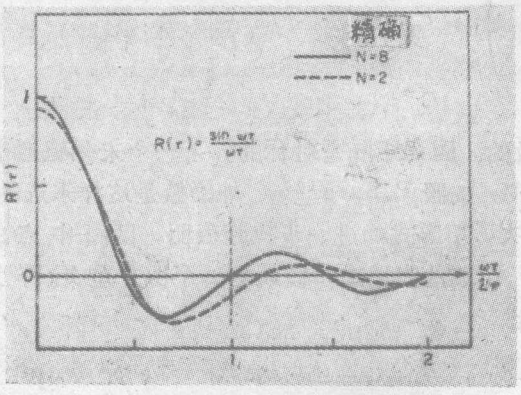


图1　$W\tau_m = 2\pi$

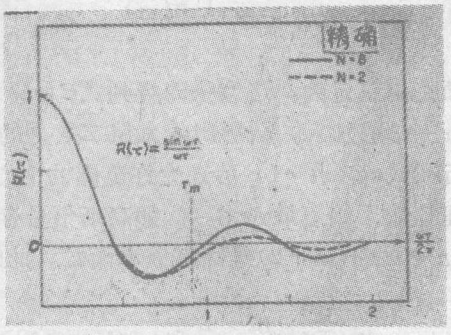


图2　$W\tau_m = 2\pi$，W 10% 偏大

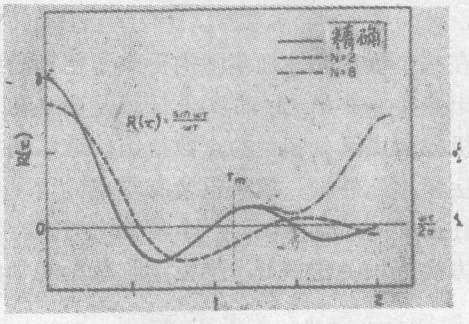


图3　$W\tau_m = 2\pi$，W 10% 偏小

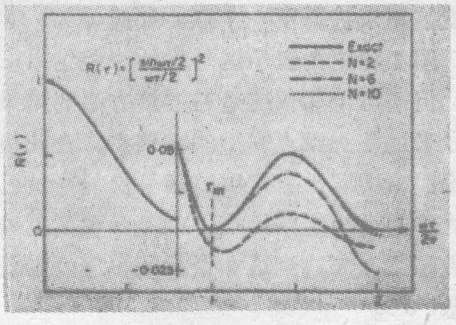


图4　$W\tau_m = 2\pi$

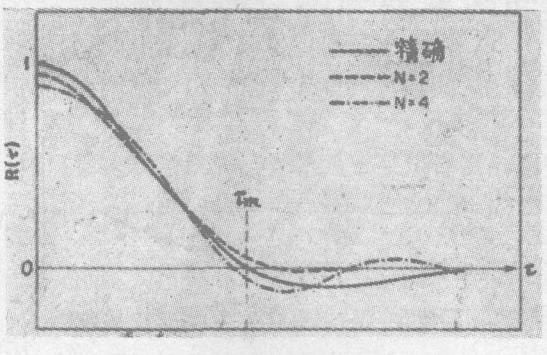


图5　二阶Butterworth滤波器 $W\tau_m = 2\pi$

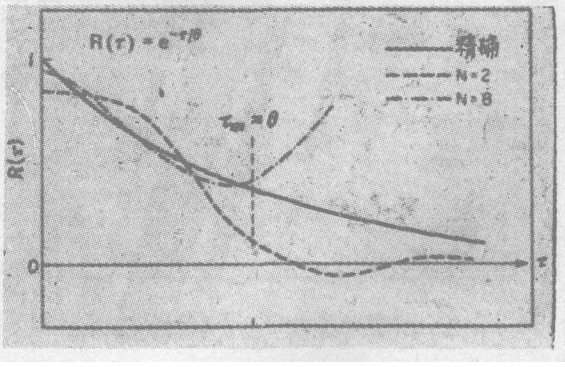


图6　$W\tau_m = 2\pi$

人们会对在给定区间上的近似和在外推区间上近似作出区别，假如带宽要求不满足。导出级数在外推范围上是发散的。

2．最大熵譜分析

这方法建立在自相关函数的一个一般性质上：对每一由延迟值 0 到m所定出的截出自相关函数，矩阵

$$C(m)=\begin{pmatrix} c(0) & c(1) & \cdots & c(m) \\ c(1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ c(m) & & & c(0) \end{pmatrix}$$

必须是半正定的。这意味着行列式$C(m)$是非负的。因为矩阵是对称的，下一个未知延迟值$c(m+1)$的加入，会导出未知值二次型的不等式。按照 P.Burg〔2〕，外推值是这样来选的：使行列式〔$C(m+1)$〕落在允许范围的中心。二次型不等式的进一步检查表明，区间中点的处理等效于熵值最大化。假如高斯信号存在着一个熵的表达式，该熵是一个协方差矩阵为$C(m+1)$的$(m+2)$维高斯概率函数。此熵就是〔5〕

$$ln(2\pi e)\frac{m+2}{2}det\,〔C(m+1)〕^{\frac{1}{2}}$$

这意味着：按照区间中心处理来外推相关函数等效于熵的最大化。假如一个延迟值已经推出，它就被用来计算下一个点，如此等等。

图7和图8表示这外推的一些结果。很明显，在一个很宽的外推范围内得到了精确的结果。但还难于相信这是非参量方法的结果。现在指出确实并非如此。事实上计算是建立在对信号来说是全极点模型的基础上，在此模型中允许极点数由已知相关的点数给出。这结果意味着：由所有极点定出的信号仅能通过已叙述的方法精确地外推。然而包含有零点的信号要求更多的在给定精确度下相关函数所能给出的值。在这样的情况下，有一个能使之与极点和零点相适合而达到最小余数的更好的参量方法，此方法提供关于很好选择模型阶数的附加的信息〔6〕。

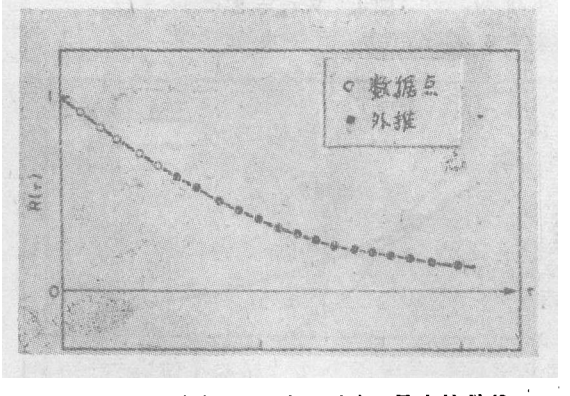


图7　$R(\tau)=\exp(-\tau/\theta)$；最大熵外推

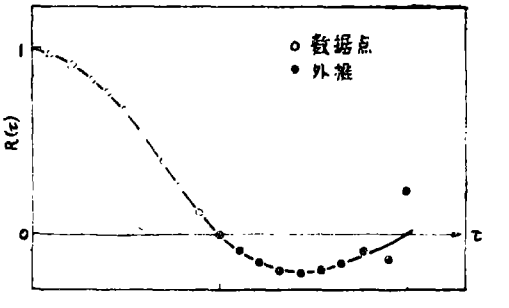


图8　$R(\tau)=\frac{\sin W\tau}{W\tau}$；最大熵外推

最大熵分析和全极点模型的等价可从行列式〔$C(m+1)$〕对于$c(m+1)$最大化的有意义的验证而得到。取导数导致要求：

$$det\begin{bmatrix} c(1) & c(0) & \cdots & c(m-1) \\ c(2) & c(1) & & c(m-2) \\ \vdots & & & \vdots \\ c(m+1) & c(m) & \cdots & c(1) \end{bmatrix}=0$$

假如全极点模型由一零平均值随机变量$e(n)$所激发：

$$x(n)+a_1x(n-1)+\cdots+a_Nx(n-N)^*=e(n),$$

并有$E[e(i)e(j)]=0$，$i\neq j$；用$x(n-k)$乘以，取数学期望即给出：

$$c(k)+a_1c(k-1)+a_2c(k-2)+\cdots+a_Nc(k-N)=0$$

此处有$c(k)=E[x(n)x(n-k)]$。

写出来：

$$\begin{aligned}
&c(1)+a_1c(0)+\cdots+a_Nc(N-1)=0\\
&c(2)+a_1c(1)+\cdots+a_Nc(N-2)=0\\
&\quad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&c(N+1)+a_1c(N)+\cdots+a_Nc(1)=0
\end{aligned}$$

它等效于

$$det\begin{bmatrix} c(1) & c(0) & \cdots & c(N-1)\\ c(2) & c(1) & & c(N-2)\\ \vdots & & & \vdots\\ c(N-1) & c(N) & \cdots & c(1)\end{bmatrix}=0$$

如同最大熵分析所规定的那样，是一个同样的表达式。

自不待言，假如人们已经计算了系数a_N，实相关函数的实际外推不需象功率谱密度那样直接从模型中极点值得出。对有限时间序列，用长度为m的记录来作N阶极点模型的近似，假如近似是建立在最小平方拟合上的话，再一次给出等效的表示式来。真正的相关函数由给出的数据点作出的估值所代替。

结论：P. Burg 方法是一个最小平方近似。

二、具有预定幅度概率密度函数以及预定功率谱密度的随机信号的合成

假定输入信号发生器的是具有平坦谱形的宽带高斯噪声(图 9)。

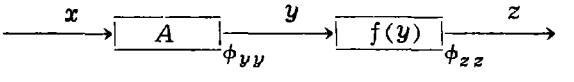


图 9　用来产生具有预定概率密度函数和自相关函数信号的线性滤波器和非线性特性

信号首先加到线性滤波器，保持了高斯特性。与线性滤波器相串联，信号通过一个非线性幅度特性部件。此特性改变高斯概率密度函数使之成为所需要的样子。它同样还改变它的输入信号的功率谱密度。当然，一旦非线性特性已经知道，就能计算出对功率谱密度的影响，并用来“补偿”线性滤波器，所以非线性特性的输出产生了所需要的频率特性。

功率谱密度中的变化的计算借助于Price定理[8]来实现。此定理适用于高斯过程以及非线性幅度特性的输出自相关。计算的过程如下：

---

* 此处原文有误。——译者

(a) 根据高斯输入和所要求的输出确定非线性特性。

(b) 从所要求的谱密度计算所要求的自相关函数。

(c) 从已知输出自相关函数和已知非线性特性计算必需的输入自相关函数。

(d) 从已知输入和输出自相关函数设计线性滤波器。非线性曲线的计算直接用

$$dz=\frac{p\ (y)}{p\ (z)}dy$$

$p\ (y)$ 和$p\ (z)$ 分别为高斯以及所要求的概率密度。非线性增益为dz/dy。在很多情况下，假设非线性特性用一幂级数逼近是合理的：

$$f(y)=\sum_{i=1}^{N} a_i\ y^i$$

这简化了在非线性特性输入端自相关函数的计算。

Price定理适用于图 9 的配置，这意味着[8]：

$$\frac{\partial^k \Phi_{zz}(t)}{\partial \Phi_{yy}{}^k(t)}=E\left[f^{(k)}(y_1)f^{(k)}(y_2)\right]$$

输出自相关函数可以象输入那样写成幂级数展开

$$\Phi_{zz}(\tau)=\sum_{i=1}^{N} C_i^2\Phi_{yy}^i(\tau)$$

于是

$$\frac{\partial^k \Phi_{zz}(\tau)}{\partial \Phi_{yy}^k(\tau)}=k!C_k^{2*}$$

把信号y的非线性和高斯特性代入这个幂级数展开，就可计算出数学期望。

由于Price定理对相关函数的所有的值都成立，所以我们取一个比较有利的值 $\Phi_{yy(\tau)}=0$。由此得到

$$k!C_k^2=\frac{1}{2\ \pi}\left[\int_0^{\infty} f^{(k)}(y)exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy\right]^2$$

这使我们可由标准级数近似计算C_k^2。如果按这种办法由所要求的 Φ_{zz}来计算Φ_{yy}，则我们必须设计一个线性滤波器：

$$H_{(z)}=1/A\ (z^{-1})$$

这是一个无限阶的递归滤波器，必须用一个有限阶（n阶）的滤波器去近似它。

对差分方程

$$y(t)+a_1y(t-1)+\cdots+a_ny(t-n)=x(t)$$

乘以$y\ (t-k)$，并求平均，可得其系数的估值。由此得到一组a_1—a_n的线性方程，以所计算的相关点Φ_{yy}为方程的系数。用数字计算机模拟的结果指示出，在许多情况中，非线性只引

*原文脱落等号。—译者

起功率谱密度的很小变化〔9〕。

（杭汝衡译　蒋继萍　丁东校）

参 考 文 献

1. Slepian A. and Pollak,H.O. (1961) "Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier Analysis and Uncertainty. I. " Bell System Tech. Jl.
2. Burg, J .P. "Maximum Entropy Spectral Analysis. " Presented at the 37th Annual Meeting Soc. Explor. Geophys., 1967.
3. Flammer, C. "Spheroidal Wave Functions" , Stanford Univ. Press, Calif. 1957
4. De Bruine, R. F. "The Extrapolation of Truncated Auto-correlation Functions of Bandwidth Limited Signals with Prolate Spheroidal Wave Functions" ,(in Dutch). Thesis. Department of Appl. Physics; Delft Univ. of Technology. 1968. 10.
5. Shannon, C. E. and Weaver, W. "The Mathematical Theory of Communication," pp. 54—57, Univ. of Illinois press. 1949.
6. Astrom, K. J. and Bohlin, T. "Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records." Proc. IFAC Symp. on Self Adaptive Control Systems. 1966.
7. Van den Bos, A. "Alternative Interpretation of Maximum Entropy Spectral Analysis. " IEEE-Information Theory. 1971.
8. Price, R. "A Useful Theorem for Nonlinear Devices Having Gaussian Input. " IRE-Information Theory. 1958.
9. Verloren, P. "The Generation of Stochastic Signals with Specified Probabillity Densities and Auto-correlation Functions" (in Dutch) Thesis. Department of Appl. physics; Delft Univ. of Technology. 1968.