

时域滤波方法

R. E. Bogner

(英国伦敦帝国学院电气工程系)

一、引言

数字式信号处理正在达到成熟阶段。在信号处理中常把它和其它(模拟)方法一起使用。

数字处理的特征(这些特征有时是很关键的)包括:

- (a) 精确性和再现性。能够实现非常复杂的系统和具有精确特性的甚低频滤波器。
- (b) 灵活性。包括有可能控制每个元件的值和无须改变硬设备即可改变功能。
- (c) 适合集成电路工艺。
- (d) 工作速度有限。大概不允许处理带宽超过几十兆赫的信号。

本报告的目的是探索能直接处理信号抽样的线性数字滤波器的某些基本概念。下一个报告研究基于付氏分析和各频率分量的运算的滤波法。

1. 什么是滤波器?

“滤波”包括许多方面:

(a) 一些滤波器的作用是阻止某一类波形而通过另一类波形。例如在频率分割多路发射机和接收机内所使用的频率滤波器,它们起着阻止或通过某种正弦波的作用。同样,滤波器能用来阻止或通过其它一些适用于多路传输的波形如Walsh函数、伪随机序列、线性调频脉冲(chirp)等。动目标指示滤波器必须抑制特性不随时间变化的信号,但能通过其它的信号;这些滤波器通常用选频特性来描述。频谱分析滤波器组也是只通过某些特定频率的正弦波。

用于接收时间分割多路传输信号的抽样电路,形式上是时选滤波器,然而通常不把这样的系统当作滤波器来看待。

(b) “最佳”滤波器是用来企图改善通常含有信号和噪声的输入波形,以提高某些所要求的特性。常常用统计术语来阐述最佳滤波器,例如:

(i) 以最小均方误差(噪声功率)估算现时或未来输入信号值的滤波器(Wiener和Kalman-Bucy滤波器)。

(ii) 存在噪声时使特定波形的“能见度”极大化的滤波器—匹配滤波器。

(iii) 当存在噪声和其他脉冲时使正确检测信号脉冲的概率极大化的滤波器。这些信号脉冲可能已被传输介质畸变。

上述最佳滤波器可作成自适应型,以便适应可能是由于介质改变而引起的信号或噪声特性的变化。几个同时输入的波形可同时处理,例如转向阵和分集接收输入信号的处理就是如

此。

(c) 另外一些滤波器用于对某种传输特性引进特殊修正, 例如:

(i) 在传输之前或传输之后用以补偿传输介质的幅度和相位特性的补偿器。这一类滤波器的特性, 常常不是很奇异的, 但需要仔细调整。用于改善光学系统分辨率或用于声学 and 地球物理学中系统的隔离激发的倒置滤波器 (inverse filters) 或者反卷积器 (deconvolvers) 属于这一类。

(ii) 产生适合于声纳、雷达数据传输的信号波形。

(iii) 在语音编码器、氮语言处理机和音响系统中做语言合成。

2. 数字处理

模拟(连续)和数字信号处理的基本差别在于后者的信号表示方法实质上是离散的。即:

(i) 数值是用有限个数字位来表示的, 只能取离散值, 也就是说数值是量化的。这些数可以是“定点”, 即有固定的量化阶梯 (图1a), 也可以是浮点, 即阶梯差值逐级增大 (图1b)。有时也用信号的对数表示 (图1c)。有些系统将 δ 脉冲调制技术用于数字化, 但是由于算法上受到限制, 这种方法的使用有限。

量化会引起误差, 然而用增加数字位个数的方法总可以将误差减至任意小。

(ii) 信号可用有限个数值来表示 (称为抽样), 这些数值通常系按等时间间隔(抽样间隔 T)对连续信号抽样而得。这就导致所有抽样数据系统都表现出周期性的频率特性, 正如我们以后要讨论的那样 (第三节(2))。

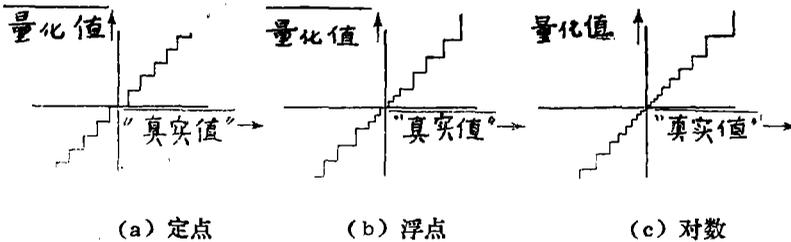


图1 数值表示

多数信号在进入信号处理器之前都是模拟型的。为了进行数字处理, 需要进行模拟数字(A-D)转换: 这包括抽样和将每个抽样值转换成数字型。

二、线性信号处理器的一些性质和限制

所有的信号滤波器都必然对输入波形的“形状”起作用—例如它接受某些类型的分量, 同时抑制其他类型的分量; 对变化率作出响应, 实现平滑作用。因此滤波器不只是处理即时输入—它们要有记忆作用。模拟滤波器能做到这一点是由于电感和电容的储能作用。在数字处理机中, 这种记忆力来自在抽样间隔内存储信号数值的移位寄存器 (或存贮装置或延迟线)。两种类型滤波器自由度都与任务的复杂性密切相关, 而自由度是由存储元件的数量来给定的。每个存储元件引进一个极点 (除非该元件不是独立起作用, 例如: 一个电容与另一个并联), 即有多少个存贮元件就有多少个极点。

例如一个线性调频脉冲滤波器与色散（带宽）为 W 赫和持续时间为 τ 秒的线性调频脉冲（图2a）相匹配，则该滤波器必须能够容纳 $2\tau W$ 个抽样。总起来，每个抽样都对最后的峰值响应有所贡献。



(a) 线性调频脉冲 (b) 匹配滤波器脉冲响应 (c) 对线性调频脉冲的影响

图 2

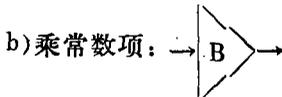
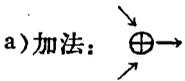
与此同时我们要注意到模拟和数字系统二者之间主要的经济上的差别。

在数字系统中存贮器便宜而且精确，但算术运算既费硬件也费时间。常用的模拟系统包括昂贵而精确的存贮器（C和L或C和放大器的组合），然而相加和比例换算不是依次实现，而几乎是同时完成的。这就是为什么要研究非常复杂的（例如100个）极点数字滤波器的原因，但仍然希望找到能够节省计算量的结构，例如：快速付氏变换和序列卷积〔2,3〕。

在数字系统中存贮的绝对精确性和无损耗性有助于实现复杂系统。然而有限字长对算术运算引起舍入误差的影响，要予以注意（第七节）。

三、数字滤波器的基本特性

数字滤波器所采用的运算是：



c) 存贮一个时钟周期：通常被认为是延迟一个固定时间 T ：



这些可以和模拟系统所用的运算相比较：

相加（例如 $v = R_1 i_1 + R_2 i_2$ ）

乘常数项（例如 $v = R i$ 等）

积分或微分〔例如 $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ 〕

在模拟系统中，最后的方程是线性的微积分方程，它们的解是时间的连续函数。这些解总是系统的指数衰减正弦特性，加上输入信号的强迫响应特性。系统满足叠加原理，也就是说系统对几个同时输入的响应等于各个输入单独作用时系统响应之和。

我们将看到数字滤波器有同样的性能，除了响应仅在离散的时间值上变动外。用于图3的一阶（单级延迟）递归（即带反馈）系统可说明数字系统的一些性能。

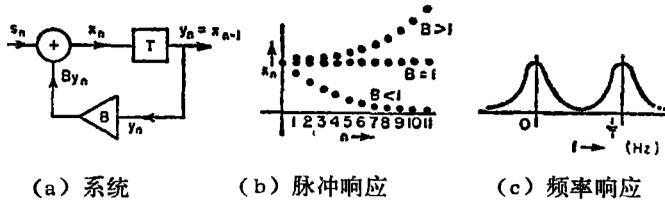


图3 一阶系统

系统工作如下。每时钟周期（即每T秒），一个新的输入“抽样” s_n 和相加器另一个输入端的现有值相加产生新的 x_n ：

$$x_n = B y_n + s_n \quad (1)$$

存储或延迟 T 的输出是前一个 x_n 的值，即在前一个时钟周期产生的 x_{n-1} 。这就是输出 y_n ，它在乘以B后与下一个输入相加，即

$$x_n = B x_{n-1} + s_n \quad (2a)$$

可以改写成下式：

$$\Delta x_n = (B - 1) x_{n-1} + s_n \quad (2b)$$

式中

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

是 x_n 的一阶差分。(2a)和(2b)是差分方程。这些差分方程对数字滤波器的作用就象微分方程对模拟滤波器一样。

我们来考察该系统的脉冲响应即对幅度是1的单个输入抽样的响应。令系统处于零状态，即延迟保持在零值。通过对系统的扰动过程的研究，可以很容易地找出系统对单位抽样（任意假定为在 $n=0$ 时加入）的响应。

n	-1	0	1	2	3	n
s_n	0	1	0	0	0	0
x_{n-1}	0	0	1	B	B^2	B^{n-1}
$x_n = s_n + B x_{n-1}$	0	1	B	B^2	B^3	B^n

显然，脉冲响应是一个几何级数（图3b）。这种响应等效于一阶模拟系统的指数响应，而且是抽样型的，即数值

$$1, B, B^2, B^3, \dots, B^n$$

和

$$e^0, e^T, e^{2T}, \dots, e^{nT}$$

是一样的，如果

$$e^T = B$$

依此类推，高阶系统的特征函数或本征函数是 P^n 型的几何级数。一般来讲，有多少个延迟就有多少个P值。若差分方程的系数是实数，则P值是实数，或是复数共轭对。脉冲响应是这些特征函数的和。举一个例子：二阶系统（图4）的差分方程是

$$x_n = B_1 x_{n-1} + B_2 x_{n-2} + s_n \quad (3)$$

(a)

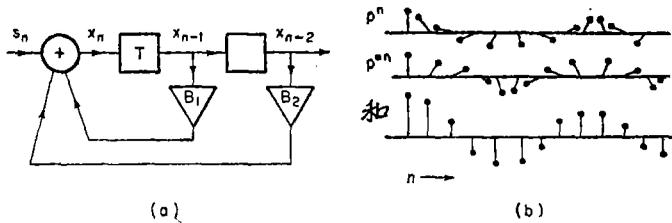


图4 二阶系统

设解的形式为 $x_n = P^n$, $x_{n-1} = P^{n-1}$ 等等。因此, 特征方程为

$$x_n = P^{-1}B_1x_n + P^{-2}B_2x_n \quad (4)$$

对于非零解 (即 $x_n \neq 0$), 得到:

$$P^2 - PB_1 - B_2 = 0 \quad (5)$$

同理, 高阶系统导致 P 的多项式方程。若 B 都是实数则其根是实数或复数共轭对。对于实数根, x_n 的值象以前一样是指数抽样; 当根是复数时, 解就相当于复数指数抽样。共轭对产生衰减的正弦, 例如一对根

$$P = 0.78 \pm j0.55$$

产生如图4b所示的响应。

要注意, 虽然实际硬件中所有的值都是实数, 但是用实数对表示复数值的系统是容易做到的。所以具有复数系数的数字滤波器和复数信号也能实现 (参阅[4,5])。

上面求出的 P 是系统的本征值; 它们确定了系统响应的极点。下面在脉冲传递函数和 z 变换的章节中还要进一步讨论它们。

1. 线性; 叠加; 卷积

现在所讨论的数字处理机的差分方程是线性的, 即每项都与一个信号值成比例, 或者是常数。和线性模拟系统一样, 这使数字系统能用叠加原理, 也就是说系统对输入 $S_{1n} + S_{2n} + \dots$ 的响应等于 $X_{1n} + X_{2n} + \dots$, 这里的 X_{1n} 是对 S_{1n} 的响应。这种性质很容易从差分方程 (比如 (3)) 得出。如果有两个输入 S_{1n} 和 S_{2n} , 产生的解 (响应) 分别为 X_{1n} 和 X_{2n} , 则有

$$X_{1n} = B_1X_{1,n-1} + B_2X_{1,n-2} + S_{1n}$$

和

$$X_{2n} = B_1X_{2,n-1} + B_2X_{2,n-2} + S_{2n}$$

因此

$$X_{1n} + X_{2n} = B_1(X_{1,n-1} + X_{2,n-1}) + B_2(X_{1,n-2} + X_{2,n-2}) + S_{1n} + S_{2n}$$

是输入 S_{1n} 和 S_{2n} 的叠加响应。

从叠加原理可引出卷积, 它是用输入和脉冲响应来表示一个线性系统输出的一般表达式。

这很容易从图5导出。只要允许足够的延迟, 利用图中所示的系统可实现任何一种脉冲响应。单位输入抽样 (其前后都是零) 产生的输出是 h_0, h_1, h_r, \dots 好象在一个延迟一个延迟地移动。因此脉冲响应是 $h_r, r=0, 1, \dots$ 。一个一般的输入序列 $X_n, n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 在延迟和加权之后的输出 (如图示) 很明显是

$$y_n = \sum_{r=0}^{\infty} h_r X_{n-r} \quad (6a)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^n h_{n-r} X_r \quad (6b)$$

通常写成

$$y_n = h_n * X_n \quad (7)$$

更一般些，如果脉冲响应本身与激励时间有关，则它有两个自变量 n 和 r ，即 $h_{n,r}$ 可描写 r 时刻的输入在 n 时刻的输出。一般，输入序列 X_r 在 n 时刻的合成输出是

$$y_n = \sum_r h_{n,r} X_r \quad (8)$$

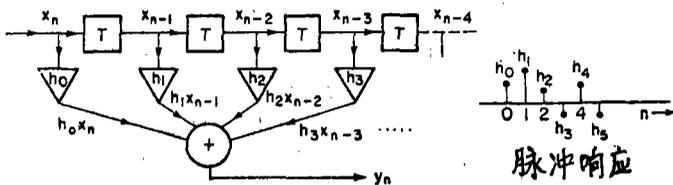


图5 卷积的导出

2. 频率特性

在许多应用中，我们感兴趣的是滤波系统的频率响应（幅度和相位）。就象对模拟系统连续输入所做的那样，我们用寻求系统对不同频率正弦波抽样之响应的方法来研究频响特性。研究系统对 $\exp(j\omega nT)$ 型的复指数的响应比较方便。对实输入 $\cos \omega nT$ 的响应，可再加上对 $\exp(-j\omega nT)$ 的响应求得。因为

$$2 \cos \omega nT = \exp(j\omega nT) + \exp(-j\omega nT)$$

但这一步通常用取实部来代替（如果系统的系数是实数，这种做法是有效的）。

图5所示的系统的脉冲响应为 $h_n, n=1, 2, \dots$ 。我们用 $\exp(j\omega nT)$ 来求该系统的频率特性。每一个 h_n 都产生一个延迟了的输入摹本，并按 h_n 值进行比例换算，我们将这些摹本相加：

$$h_0 \text{ 产生输出 } h_0 e^{j\omega nT}$$

$$h_1 \text{ 产生输出 } h_1 e^{j\omega(nT-T)} = h_1 e^{-j\omega T} e^{j\omega nT}$$

$$h_2 \text{ 产生输出 } h_2 e^{j\omega(nT-2T)} = h_2 e^{-j\omega 2T} e^{j\omega nT}$$

$$h_r \text{ 产生输出 } h_r e^{j\omega(nT-rT)} = h_r e^{-j\omega rT} e^{j\omega nT}$$

亦即输入 $e^{j\omega nT}$ 产生输出

$$\left(\sum_{r=0}^{\infty} h_r e^{-j\omega rT} \right) e^{j\omega nT} \quad (10)$$

因此输入按复数

$$H(j\omega) = \sum_{r=0}^{\infty} h_r e^{-j\omega r T} \quad (11)$$

改变其幅度和相位。对特性为 $h_n, n=0,1,2,\dots$ 的系统来说, (11) 式是其复数传递函数的一般表示式(频率用 ω 弧度/秒表示)。注意 $H(j\omega)$ 的表达式(11)是 h_r 与 $e^{j\omega r T}$ 的相关, 即指明两者间的相似程度, 或者说 $e^{j\omega r T}$ 对 h_n 的贡献有多大。下一个报告关于频率域的方法要讲述将这个解用于 $H(j\omega)$ 加权滤波的影响。

例: 考察一下具有下述脉冲响应的系统

$$h_0 = \frac{1}{2}, h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{2}$$

传递函数是

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} + e^{-j\omega T} + \frac{1}{2} e^{-j2\omega T} \\ &= e^{-j\omega T} \left(\frac{1}{2} e^{+j\omega T} + 1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega T} \right) \\ &= e^{-j\omega T} (1 + \cos\omega T) \end{aligned}$$

可见其幅度是按周期项 $(1 + \cos\omega T)$ 变化的, 相位是按周期项 $\exp(-j\omega T)$ 变化的。这里相位 $(-\omega T)$ 正比于频率, 即系统的相位是线性的, 相应于脉冲响应以 h_1 为中心而对称。

我们已经注意到, 传递函数在频域上总是呈现周期性, 这可从(11)式看出; 其周期为 $2\pi/T$ 弧度/秒或 $1/T$ 赫。这种性质是由于脉冲响应的抽样性质造成的, 用下面的方法也可以说明这一点。图6(a)示出一个连续指数脉冲响应, 对应的非周期频率特性示于图6(b)。

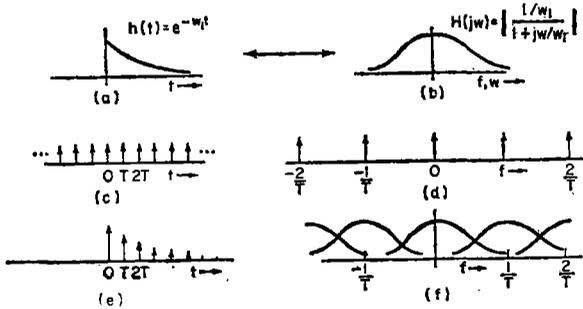


图6 抽样信号谱的周期性

图6(c)示出一个脉冲序列 $i(t)$; 用它和 $h(t)$ 相乘得出抽样形式的信号, 示于图6(e); 此脉冲序列的频谱示于图6(d)。

当 $h(t)$ 乘上 $i(t)$ 时, $i(t)$ 的每一个频率分量都被 $h(t)$ 所调制, 结果得到按 $1/T$ 赫间隔重复的边带图样(图6(f))。因此, 任何抽样信号均有周期谱。为了精确地表示连续波形, 需要选择足够高的抽样速率, 才能避免严重的镜像效应。

镜像效应是由于频谱尾部相重叠所引起的。如果频率高于 $1/2T$ 赫的信号谱分量可被忽略的话就能做到这一点。应当注意, 对于某些特殊类型的信号这不是一个必要条件[6,7]。

四、z变换; 脉冲传递函数

卷积方程(6)是把输出同输入及脉冲响应联系起来的一般表达式。它是麻烦的, 并且通常不便于分析工作。就像在连续系统里利用拉氏变换一样, 这里要用 z 变换。用这种变换就导致用相乘代替卷积:

	输入	系统	输出
卷积:	x	$*$ h	$= y$
变换:	\downarrow	\downarrow	\uparrow 反变换
相乘:	X	\cdot H	$= Y$

在拉氏变换中,

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (12)$$

式中变换核 e^{-st} 是连续线性系统特征响应的一般形式。我们用 z 变换时, 变换核是离散系统特征响应的一般形式, 即 z^{-n} , 式中 z 一般是复数:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (13)$$

上式定义了对应于序列 x_n 的 z 变换 $X(z)$ 。

现举例说明拉氏变换和 z 变换的对应。图 7 示出连续和离散的系系统响应和输入。用卷积求出离散系统的输出:

$$y_0 = 8, y_1 = 16, y_2 = 12, y_3 = 5, y_4 = 1$$

变换结果如下:

拉氏变换

$$\begin{aligned} X(s) &= 2 + 3e^{-sT} + 1e^{-2sT} \\ H(s) &= 4 + 2e^{-sT} + 1e^{-2sT} \\ Y(s) &= H(s)X(s)^* = 2 \times 4e^{-0T} \\ &\quad + (4 \times 3 + 2 \times 2)e^{-sT} \\ &\quad + (4 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 2)e^{-2sT} \\ &\quad + (2 \times 1 + 1 \times 3)e^{-3sT} \\ &\quad + 1 \times 1e^{-4sT} \end{aligned}$$

z 变换

$$\begin{aligned} X(z) &= 2 + 3z^{-1} + 1z^{-2} \\ H(z) &= 4 + 2z^{-1} + 1z^{-2} \\ Y(z) &= 8 + 16z^{-1} + 12z^{-2} + 5z^{-3} + 1z^{-4} \end{aligned}$$

我们注意到, 用 z^{-n} 代替 e^{-snT} , 则序列的 z 变换等效于在 nT 时刻出现的同样“数值”的 δ 函数序列之拉氏变换。由于卷积表示式

$$y_n = \sum_r h_r x_{n-r} \quad (14)$$

实际上是多项式之积

$$(h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots)(x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + \dots)$$

中 z^{-n} 的系数表示, 这就证明了 z 变换的正确性。这一点就使得以前仅存在于书本上的方法—— z 变换具有实际意义。系统脉冲响应的 z 变换

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^{-n} \quad (15)$$

叫做脉冲传递函数。注意: 若取 $z = e^{j\omega T}$, 则此表示式和以前得到的传递函数 $H(j\omega)$ 的表示式是一样的。

例: 延迟单元——一种重要的“积木块”。图 8 的延迟单元把一个输入信号延迟一个抽样间隔, 也就是 $h_0 = 0, h_1 = 1$, 即 $H(z) = z^{-1}$ 。这时:

$$\text{输入} = x_n$$

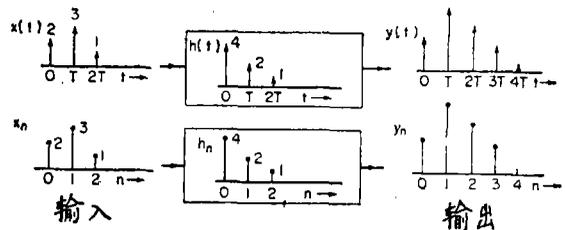


图 7

* 该式中“乘法”原文误为“小数点”。——译者

输出 $= y_n = x_{n-1}$

$$\therefore Y(z) = \sum_n y_n z^{-n} = \sum_n x_{n-1} z^{-n} = z^{-1} \sum_n x_n z^{-n} = z^{-1} X(z)$$

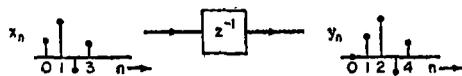


图8 延迟单元

1. 传递函数的应用——递归滤波器

一般的递归（带反馈）系统示于图9。

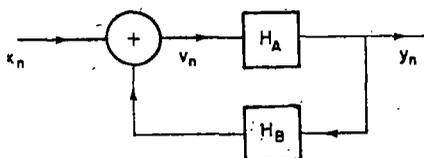


图9 一般递归系统

总的脉冲传递函数 $H(z) = Y(z)/X(z)$ 可以象连续系统中有反馈时那样的方式求得：

$$V(z) = X(z) + H_B(z)Y(z)$$

$$Y(z) = H_A(z)V(z)$$

$$\therefore H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_A(z)}{1 - H_A(z)H_B(z)}$$

(16)

例：一阶递归系统（图3a）。将（16）式用于一阶系统，式中 $H_A(z) = z^{-1}$ ， $H_B = B$ 。若 $|Bz^{-1}| < 1$ ，用二项式展开得：

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - Bz^{-1}} = z^{-1}(1 + Bz^{-1} + B^2z^{-2} + \dots)$$

因此， $h_n = B^{n-1} \quad n > 0$ (17)

这和第三节由物理推论得到的结果一样。

前面我们已看到，数字滤波器的频率特性是用 $z = e^{j\omega T}$ 代入传递函数而得。对于现在的例子，我们得到：

$$H(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T}}{1 - Be^{-j\omega T}}$$

它示于图3c。这系统是一个（重复的）低通滤波器，这一点可以从脉冲响应的性质预期到。当 ω 使 $Bz^{-1} = 1$ 时，即 $z = B$ ，产生无穷响应；当 $z = \infty$ ，产生零响应，两者均为非实数频率。

例：二阶递归系统（图10a）。这个系统的实际意义很重要，常常用作复杂滤波器的基本的积木单元。

它可以给出复共轭极点对，或两个实数极点（象电感、电容、电阻的组合）和两个零点。用导出（16）式的同样方法，可求得此系统的脉冲传递函数为*

* 此处原文说法是错误的，已作了更正。——译者

$$H(z) = \frac{1 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2}}{1 - B_1 z^{-1} - B_2 z^{-2}} = \frac{1 + A z^{-1} + A_2 z^{-2}}{1 - 2z^{-1} e^{-\alpha T} \cos \omega_1 T + z^{-2} e^{-2\alpha T}} \quad (18)$$

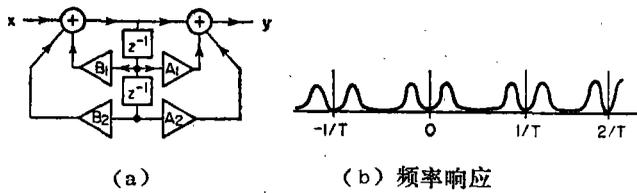


图10 二阶系统

式中已作了替换： $e^{-2\alpha T} = -B_2$ 和 $e^{-\alpha T} \cos \omega_1 T = B_1$ 。相应的脉冲响应 h_n （比如对(17)式采用部分分式和二项式展开式得出）为

$$h_n = c e^{-\alpha n T} \cos(n \omega_1 T + \theta) \quad (19)$$

用 $e^{j\omega T} = z$ 代入，所得频率响应是周期性的，示于图10b。具有任何特性的滤波器均可用有这种类型特性的节级联而得。

有这种可能性：递归系统可能是不稳定的，也就是说其脉冲响应是指数增加的。只要给定的极点、零点是可实现的，则根据极点、零点的分布来设计滤波器时，稳定性的问题是可以解决的（第四节第2小节）。但由于系数 B 之离散性引入的一些近似，可能导至不稳定的结果，同时所设计的特性也一起改变了。

2. z平面；极点和零点

为了方便而更主要是为了概念的目的，用作图法在复数 z 平面上（例如如图11）指示脉冲传递函数变成无穷或零时 z 的值（极点和零点）。

$$H(z) = \frac{z(z - 0.7 - j0.7)(z - 0.7 + j0.7)}{(z - 0.8)(z - 0.9 - j0.087)(z - 0.9 + j0.087)} \quad (20)$$

z 变换的相乘相当于其极点和零点的叠加。比较一下(11)式和(15)式，单位圆 $|z| = 1$ （图10a）即 $z = e^{j\theta}$ 或 $z = e^{j\omega T}$ 是相应于频率为 ω 的抽样正弦激发的 z 值的轨迹。由(20)所给出的 $H(j\omega)$ 值（令 $z = e^{j\omega T}$ ）仅和由其分子、分母因子所代表的向量有关。

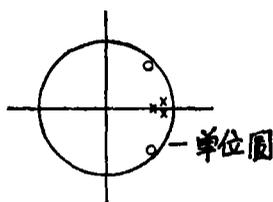
单位圆的作用和拉氏变换 s 平面上的 $j\omega$ 轴的作用相同。第四节所指出的 $z = e^{sT}$ 替换决定了 s 平面和 z 平面的映象关系。 z 平面的一个重要特点是频率响应的周期性〔第三节(2)〕现在表现为沿单位圆的循环。

五、递归和非递归

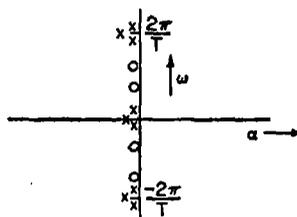
在表1中我们综合一下两大类数字滤波器的基本特点。

表 1

非递归(无反馈)	递归(带反馈)
<p>1. 结构很简单(图5)。</p> <p>2. 设计(确定系数)非常简单,特别是当时域响应和系数呈线性关系时。因此是线性规划[8,9]。</p> <p>3. 总是稳定的,易于调节(例如对自适应均衡作调节)。</p> <p>4. 脉冲响应的持续时间是有限的一不大于延迟的数目再加上1。</p> <p>5. 脉冲响应可以任意长以达到所要求的分辨率但运算量可能较大。</p> <p>6. 容易做到线性相位(脉冲响应在时间上是对称的)。</p>	<p>一般结构可包括非递归通路(图10a)。设计比较繁杂;系数和响应之间是非线性关系。</p> <p>可能不稳定。</p> <p>脉冲响应是若干无穷几何(指数)序列之和(图4b)。</p> <p>在复杂性一定时对频率的选择性常常更有效。</p> <p>只有特殊类型是线性相位。</p>



(a) z平面



(b) s平面

图11 s和z平面,极点和零点

六、多维滤波器

多维滤波器通常用于特殊问题,例如图象处理。这时的脉冲响应是一个 n 维抽样阵而不是一列抽样。除了所要求的响应是某些特殊类型的情况而外,运算量非常大。一般的滤波器可由其响应来确定,例如二维的 $h_{m,n}$ 。用卷积求得输出

$$y_{m,n} = \sum_r \sum_s h_{r,s} x_{m-r, n-s} \quad (21)$$

如果 $h_{r,s} = h_r h_s$, 则(21)式可简化为两个顺序完成的一维卷积:

$$y_{m,n} = \sum_r h_r \sum_s x_{m-r, n-s} h_s \quad (22)$$

这时每个输出抽样的乘法次数是 $M+N$ 而不是 MN , M 和 N 是 $h_{m,n}$ 在 M 和 N 方向的长度。

我们常常希望有圆形对称的脉冲响应;这意味着 $h_{r,s}$ 是 $\sqrt{r^2 + s^2}$ 的函数。如果我们同时还希望 $h_{r,s} = h_r \cdot h_s$, 这时 $h_{r,s}$ 的形式必须是:

$$h_{r,s} = C_1 \exp\{C_2(r^2 + s^2)\} \quad (23)$$

即二维高斯型。常采用一些近似，它们不是真正对称的，但能给出合理的主观效果。例如指数锥形的脉冲响应容易按递归型实现。

二维递归滤波器比非递归有效得多，但设计和稳定性标准都尚未成熟。

七、量化效应

由于数字滤波器数字的位数有限(几乎总用二进制,因此用“比特”),所以代表信号和系数的量通常是近似的,结果就有下列的效应:

(i)输入端的量化噪声—来于模拟信号转化成数字信号的过程(图1)。在均匀量化时,通常可近似认为量化噪声与信号无关,其双边带谱密度为 $TE^2/12$,式中E是量化阶梯高度。对于浮点和对数系统,有效阶梯高度依赖于实际的信号值。短持续噪声平均功率依赖于信号,长持续噪声平均功率依赖于信号概率密度函数。

(ii)每个乘法器输出端的量化噪声—来于相乘时数字位数的增加,继之削减成原始字长。这种效应类似于输入的量化,并可在每个乘法器的输出端附加噪声源来表示,噪声的谱密度亦为 $TE^2/12$ 。对于浮点数字系统,同输入端的量化噪声一样,这一效应是比较复杂的。

噪声通过数字滤波器的传输,通常可按谱描述来处理,即输出谱密度被频率传递函数幅度的平方 $|H(j\omega)|^2$ 来加权。

目前的习惯趋向于用二阶节级联的办法来实现复杂的滤波器,这可大大减小系数精度。要求在这种结构里,把窄带或弱阻尼节放在级联的末了,并在这一级实现z平面上紧邻的各个极点和零点往往是有利的。

(iii)系数(图10中A和B)只能取数字系统的容许值。这些系数往往和为实现给定指标进行设计时预定的值有所区别,其最终响应可能和按准确系数所构成的响应十分不同,对于递归系统尤其如此,这样的系统可能变得不稳定。一般来讲,谐振阻尼越低,有关的各个系数就越临界。

例 考察一个一阶递归系统(图3),其中系数B按0.01来量化,即B只能取 $\pm(0, 0.01, 0.02, 0.03 \dots 0.99, 1.0)$ 各值。表2对两种不同的指标及其最终特性作了比较。

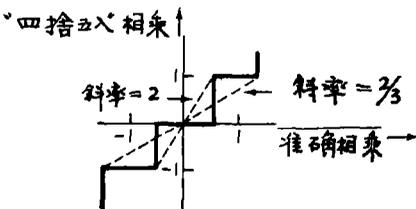


图 12

(iv)低电平波动—当被乘数足够小,以致舍入误差变得有系统时,有效乘数的变化将产生这类波动。图12表明:当真正乘积为 ± 0.5 单位时,其有效斜率(等效于所研究的函数)是2;当真正乘积为 ± 1.5 时,有效斜率变为 $2/3$,而标称值或理想值是1。

例:一个 $B_1 = 0.6$ 和 $B_2 = -0.8$ 的二阶谐振器(图4)把每次乘法的结果舍入成最靠近

表 2

状 况	B 的 值	脉冲响应	3分贝带宽,弧度/秒	零频响应
a) 预定指标	0.997	$e^{-0.003n}$	0.003/T	333.3
达到指标	1.00	1.0000	0	∞
b) 预定指标	0.977	$e^{-0.023n}$	0.023/T	43.5
达到指标	0.98	$e^{-0.02n}$	0.02/T	50.0

的整数。通过详细计算不难得出,当单个输入抽样的数值为3时,其响应是形式为+1, +1, 0, -1, -1, 0, +1, +1, 0, ……的无限输出序列。若输入是3000,则当输出减小到3的量级之前,其响应含有微弱噪声的衰减指数 $3000e^{-0.89n}\cos 0.53n$ 。

八、模—线性系统

这一节记述一些或许会改变数字滤波器前景的成就。

算术运算在数字处理机中既费时间又费硬件。余数系统〔16〕在这方面有一些优点,它可以同时用几个不要进位的小单元来实行乘法及加法运算,还可以通过简单重复改进可靠性。

余数系统以模式运算为基础。在模式运算中,两个数 a 和 b 相等的意义如下:

$$\text{若 } a = b + rM \quad (24)$$

式中 r 是整数,则认为

$$a \equiv b \pmod{M} \quad (25)$$

这种相等的有用性质是它们服从叠加原则,即如果

$$a \equiv a' \pmod{M} \text{ 和 } b \equiv b' \pmod{M} \quad (26)$$

$$\text{则 } a + b \equiv a' + b' \pmod{M} \quad (27)$$

同时

$$ab \equiv a'b' \pmod{M} \quad (28)$$

通常我们只需要研究 $0-M$ 范围的数,并且所有的和按模 M 来取,写成 $a \oplus b$ 形式。例如模数 M 是5及 $a=4$ 和 $b=3$;则

$$a \oplus b = 4 \oplus 3 = 2 \quad (29)$$

$$\text{或者 } (4 + 3) \text{ 模 } 5 \equiv 2 \quad (30)$$

除了不稳定响应是有界的以外,服从这样叠加原则的“模—线性”系统总的性能类似于通常的线性系统。有人建议〔17〕用基于这种概念的补偿器来补偿最大相移通道。

利用模式运算的线性特点,可能构成和通常用的数字滤波器严格相应的数字滤波器理论。特别是,可引入一种和 z 变换起同样作用的 D 变换。其定义如下:设抽样序列为 h_n ,则

$$H(D) = h_0 D^0 \oplus h_1 D^1 \oplus h_2 D^2 \oplus \dots \oplus h_n D^n + \dots \quad (31)$$

D 变换像 z 变换一样操作,包括它们用于有理分数、倒置滤波器,和按二项式定理实现分母展开。

然而估算特殊的 D 值(令 $z = e^{j\omega T}$ 计算频率响应时出现)似乎没什么用处。同时响应是有界的,因此不出现极点的概念。

模式线性系统的一个滤，特殊类型是 $M=2$ ，即每个数只能取0或者1，例如1和0 $\equiv 2$ 模2。这样就有二进制序列滤波器和线性序列编码理论[18, 19]。这种系统的算术运算很容易—加法是逻辑“或门”，或者半加：

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

乘法是“与门”：

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

具有这样性质的系统在伪随机二进制数发生器及编码系统中是很熟知的。它们在检测系统里很有价值，因为机器做这些运算便宜而且快。

参 考 文 献

1. Lockhart, G. B. (1971) "Binary Transversal Filters with Quantized Coefficients." *Electronics Letters*, 7, №11. p.305.
2. Ellis, J. H. (1970) "A Method for Greatly Reducing the Computation Necessary for Simulating Certain Kinds of Filters by Replacing the Impulse Response by the Convolution of Two Simple Responses," *Proc. Imperial College Symposium on Digital Filtering*, London.
3. Bogner, R. E. and Scott-Scott, M. (1970) "Digital Chirp Filters," *Proc. Imperial College Symposium on Digital Filtering*, London.
4. Crystal, T. and Ehrman, L. (1968) "The Design and Applications of Digital Filters with Complex Coefficients," *IEEE AU-16*, №3, p. 315.
5. Bogner, R. E. (1969) "Frequency Sampling Filters, Hilbert Transformers and Resonators," *E. S. T. J.*, 48, №3, p. 501.
6. Cain, G. D. (1971) "Processors for Reducing Aliassing Distortion in Sampled Signals," *Imperial College Symposium on Digital Filtering*.
7. Fjallbrandt, T. (1971) "A Network for the Recovery of Nonuniformly Sampled Signals," 1971 I. E. E. E. International Symposium on Electrical Network Theory, London, p. 32.
8. Bown, G. "Optimization." In "Introduction to Digital Filtering" (Editors R. E. Bogner, and A. G. Constantinides).
9. Rabiner, L. R. and Hu, J. V. (1971) "Applications of Linear Programming to Design of Finite Duration Impulse Response Digital Filters," *Imperial College Symposium on Digital Filtering*.
10. Shanks, J. L. (1972) "Two-Dimensional Digital Filters," Paper Read at I. E. R. E. Conference on Digital Processing of Signals in Communications, Loughborough, (Not included in Proceedings).
11. Weinstein, C. J. (1969) "Quantization Effects in Digital Filters", Technical Report 468, Lincoln Laboratory MIT, 1969.
12. Sablatash, M. (1971) "The State of the Art in Approximation Techniques for Di-

- igital Filter Design", Proc. Imperial College Symposium on Digital Filtering.
13. Fettweiss, A. (1971) "Some Principles of Designing Digital Filters Imitating Classical Filter Structures". I. E. E. E. CT-18, p. 314.
 14. Crochiere, R. (1971) "Digital Ladder Filter Structures and Coefficient Sensitivity", Q. Progr. Rep. Res. Lab. Electronics, M. I. T. 103, 129.
 15. Avenhaus, E. (1971) "An Optimization Procedure to Minimize the Wordlength of Digital Filter Coefficients", Proc. Imperial College Symposium on Digital Filtering.
 16. Garner, H. L. (1959) "The Residue Number System". I. R. E. Trans, EC-8, 140.
 17. Tomlinson, M. (1971) "New Automatic Equalizer Employing Modulo Arithmetic". Electronic Letters, 7, №5/7, 138.
 18. Peterson, W. W. (1961) "Error-correcting Codes".
 19. Huffman, D. A. (1956) "A Linear Circuit Viewpoint on Errorcorrecting Codes." I. R. E. IT-2, 20.

討 論

Severwright: 你提到了信号的对数量化, 你是否能说明一下为什么它可使处理更便于实现?

答: 它的目的是简化乘法。加法看来是更复杂了, 然而最近由N.Kingsbury提出的一种算法可使加法很有效—包括查表和作内插计算。

F.Pichler: 用状态空间描写来研究这类滤波器, 包括递归的和非递归的滤波器, 是很方便的。可以很容易看出两个系统是否是同构的, 即空间状态一一对应。

C.Van Schooneveld: 从名词上讲, 有没有用来描述既包含递归通路又包含非递归通路这种系统的术语?

答: 显然没有。当系统包含反馈通路时我就采用递归结构这一术语, 而不管有没有非递归通路。

C.Van Schooneveld: 你可否对二维滤波提供更详细的情况?

答: 有一些印好的详细资料(本报告没有包括进去)。简单举例来说, 我们可以将每点之用其它一些点的加权值的线性组合来代替, 以实现二维图形过滤。这总是可以按非递归方式并进行变换来做到的, 但存贮费用大; 而利用简单的递归系统常常更经济方便, 特别是如果某些类型的响应可以接受的时候。例如在 x 和 y 方向连续采用简单的 $B^{-|n|}$ 响应, 可以实现指数锥形响应。事实上这可由正向和反向通过一简单的响应为 B^{-n} 的一阶滤波器来实现。这样的响应(它们可以分离成 x 方向函数和 y 方向函数的乘积)如果是高斯型, 则变为园对称(方程(23))。通过一些重新排列, 允许双高斯型响应叠加。

评论: 我感到, 这些情况和需要二维空间滤波的二维阵很相似, 而且你能处理一组线阵从而得出你所说的方形图样。也有适合于不可分离图样综合的方法, 可直接用于滤波设计。

答: 是的, 有密切的对应性。我曾设想归纳成两种途径。可分性会限制适宜响应的类型, 而这些响应都是需要的。稳定性问题似乎是很复杂的; 你可以设计一个二维传递函数, 并发现其实现是不稳定的, 而且判据也不简单。

D.Cresey: 让我们回到LCR系统, 这种系统我们经常用有源网络来实现。灵敏度是

一个重要问题，你能就数字滤波器解释一下这个问题吗？

答：灵敏度是和系数的量化所出现的问题相关联的（参阅第七节例2）。数字滤波器结构的很多问题关系到怎样安排系统，以达到所容许的精度（精度受系数的比特数所限制）。在大系统里，同时出现多个延迟，即由一个差分方程产生很多个极点，这样的系统不怎么好。习惯作法倾向于由若干个二阶系统级联成一个大系统。这样的系统设计也容易。希望梯型网络在这方面能有些作为—类似L C和有源梯型网络所起的作用。

B.P.Th.Veltman：我愿意介绍一下混合式滤波器的用法。它的记忆元件是数字式的，而加法和乘法是模拟式的。按今天的厚膜技术，这样做很有吸引力。可得到和数字滤波器同样的精度，并且经济得多。

答：是的，我也对它感兴趣。最近K.Galpin的文章涉及到有关的技术。一个限制因素是它们不如数字系统灵活和自适应性强，而数字系统的变化能用软件来实现（本报告所提到的一个例子—二阶谐振器响应，就是用这样的系统得到的）。

B. P. Th. Veltman：常常并不需要自适应性和灵活性，这时我们就发现这些滤波器很便宜而且比由市場上买来供实验室用的滤波器要好。这种系统包括模数转换。

（陈庚译 刘金波 黄曾咏校）