

被动式声纳：建立与多重时间 系列对应的模型

W. S. Liggett, Jr.

(美国Ratheon公司水下信号分部)

一、引言

我们希望声纳员知道他基阵附近所有船只的位置与类型。这个情报就是一个模型，声纳系统把这个模型与声数据相对应。这种模型对应的建立有两个方面〔4〕。其一是使数据中的随机性的作用最小。另一是选择要对应的模型的范围。后一方面本文着重讨论的，它往往在声纳设计中被忽视。模型的范围选得太窄或太宽都可能降低系统的性能。若范围太窄，由于实际情况超出这个范围而产生的误差，比起由于数据的随机性造成的误差，可能要更经常、更严重。

被动式声纳遇到的数据特性是十分广泛而各种各样的〔16, 17〕。来自附近船只的噪声信号是繁杂多样的，它具有不同的频谱、非平面的波阵面以及非平稳的特点。自然噪声特性的范围已经被部分地描述过。在大部分的传感器对之间具有高的相干性的噪声分量，是可能存在的。最后，还有一些不可预测的事件会发生。

对数据特性范围的要求必须与对模型参数作出有意义的估值的需要相平衡。因此，模型的范围必须受限制。无论是用先验概率或确定的关系来表示，作一些假设是必需的。选择什么样的对应模型，取决于先验知识和处理目的。

为了应付一个宽的模型范围而设计的方法，如同本文中所讨论的那种，总是又有优点，又有缺点。作为实际使用的系统，这种处理对设计者考虑到的各种可能情况都能适应。理想的话，最好能与那种为应付代价与设备限制而采取折衷的处理相比较，以确定增加适应性带来的好处。作为一个实验室使用的方法，它的作用是对数据进行探索性的分析：它可能揭示出数据的新特点。在得到证实后，这些数据的新特点可在系统的设计中使用。这种处理的缺点在于，确定错误结果的类型和它们的概率很困难，假如不是不可能的话。因此，重要的结论必须用新的数据和别的误差更易控制的统计方法来证实。

在提出我们的方法时，第一步是把方法与它应适配的先验知识的情况相联系起来。在我们的方法中，输入是若干个水听器的输出。改用水听器输出的线性组合，例如波束形成器的输出，是另一种有趣的方法，这里不讨论。输入是一个多重时间系列，它由时间上采样的 P 个时间系列组成，采样间隔为 Δ 秒。因此，输入是 P 维（列）矢量的序列，记为 $X(j)$ ， j 是时标 ($j = 0, 1, \dots$)。如水听器 p 的采样 j 是 $x_p(j)$ ，那末 $X^*(j) = (x_1(j), \dots, x_p(j))$ ，其中 $*$ 为共轭转置符号。

我们的处理基于对谱密度矩阵的估计。由于选择谱估值作为基础会使我们的处理器对数

据中某些类型的规律性不敏感，因而我们实际上假定了这样的规律性是不可能的或不重要的。对零平均高斯过程，观察二阶矩的特性似乎是合理的。另外，在能够作出充分无偏的和稳定的估值的情况下，选择谱估值也是可以的〔12〕。

我们处理内容的一部分，就是选择合适的频率-时间区间，使得能够作出充分无偏和稳定的谱密度矩阵估值。假设给定一个整数 L ，使得在 $(L\Delta)^{-1}$ 赫宽和 $L\Delta$ 秒长的频率-时间区间上，母体谱矩阵无显著变化。用这个区间，我们作出谱密度矩阵的估值为 $a(f, t)$ ，它由下式给出〔9〕：

$$a(f, t) = w(f, t)w^*(f, t)$$

$$w(f, t) = (2\pi L)^{-1/2} \sum_{j=(t-1)L}^{tL-1} X(j)e^{i2\pi j f/L} \quad (1)$$

其中 $f = 0, 1, \dots$ 和 $t = 1, 2, \dots$ 。问题是寻找 f 和 t 的一些区域，在上面对 $a(f, t)$ 进行平均。我们的运算法从某一频率-时间区间开始。这个频率-时间区间要足够的大，大到在比它更大些的范围上进行平均看上去就不合理了。然后，将这个区间分成一些矩形区，在这些矩形区中可以得到相当稳定和無偏的谱矩阵估值。

现在，对这些谱矩阵估值必须进行翻译，以得到信号数量和船只位置与类型的估值。我们的处理器要估计出信号的方位、基本的位置参数和信号谱，作为分类的初步依据。可以用各种各样的方法来完成这种翻译，包括一些由经典的多变量分析变化来的分析方法，譬如因数分析方法〔2, 8, 18〕；以及声纳技术的一些应用，譬如自适应波束形成〔13〕。既然我们的处理器用来处理一些波阵面不完全知道的多重信号，因此我们选择了一个修改后的因数分析方法。

因数分析要求一些假定。首先，我们假定信号的数量 K 小于输入的数量 P 。其次，假定传感器间信号是完全相干的，因此信号谱矩阵的秩为1，写成 $\sigma(k)u(k)u^*(k)$ ；其中 $\sigma(k)$ 是信号的谱级， $u(k)$ 描述了信号的波阵面， $u^*(k)u(k) = 1$ 。再之，假定在各输入间噪声是不相关的，且具有相同的谱级，因此它的谱矩阵由 $\sigma_0 I$ 给出，其中 σ_0 是噪声谱级。这样，与谱矩阵估值相对应的谱密度矩阵的模型由下式给出：

$$F = \sum_{k=1}^K \sigma(k)u(k)u^*(k) + \sigma_0 I \quad (2)$$

在这个模型对应中，我们假定谱估值是复的Wishart分布的。对 K 和 σ_0 作估计时不用再作进一步的假定。但是，为了能够在 $K > 1$ 时由 F 确定其余的一些参数，我们需要更多的先验知识。令 $\Sigma = \text{diag}\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(K)\}$ ， $U = (u(1), u(2), \dots, u(K))$ ，和 Φ 为任一单式矩阵($\Phi^*\Phi = I$)。方程(2)可写为

$$F = U\Sigma^{1/2}\Phi^*\Phi\Sigma^{1/2}U^* + \sigma_0 I \quad (3)$$

既然 Φ 不由 F 确定，因此信号级和波阵面不能唯一确定。为了消除这点含糊，我们提出一个判据量，并使其达到最大。这个判据量能度量所估计的信号波阵面与根据先验知识所期望的波阵面相接近的程度。这个产生方位估值的方法，需要假定信号波阵面的先验知识具有一定的准确性。

为了使我们的处理器极少依赖于关于信号数量、平稳性、谱的平滑度和信号波阵面的一些假定，而不象被动式声纳通常地那样，对这里提出的处理，在两个方面可以作一些改变。

第一，我们关于噪声的假定是局限的。可以作一些其他的假定，而不丧失我们的处理器的优点。例如，我们可以补偿由于自然噪声不是独立噪声所造成的差别。相干的噪声分量，如果它们能被辨认的话，就可以被消除。第二，对于探索性的数据分析来说，在频谱分析前需要对数据进行整理审查，以核对是否过分偏离关于数据是零平均、具有慢变化矩的高斯分布的假定。

下面分成两节。在第二节中，我们讨论谱矩阵的估值，详述选择平均区域的运算法，以及提出模拟的第一部分。在第三节中，我们讨论对谱矩阵估值的翻译，详述寻找信号级与波阵面的运算法，并提出模拟的其余部分。

二、谱估值的分类法

1. 运算法的讨论

频率与时间分辨力的选择之所以重要，不只因为所估计的信号谱应该有正确的分辨力，而且也因为需要足够的稳定和无偏以便能够进行适应于信号多重性与多个信号波阵面的处理。源一阵的运动在时间和传播时延上不好分辨，传播时延对互谱结构的作用在频率上不好分辨。而源一阵运动会使信号丧失其在水听器之间的相干性，从而丧失它们秩为1的特点。在我们对谱矩阵的翻译中，信号相干性是基本的假定之一。在主分量分析中，当限制对协方差矩阵平均的范围，使得慢变分量的秩为1时，发现了类似的问题(6, 15)。信号的谱特性已经有人讨论了(17)。称为瞬变的能量爆发以及频谱中其他的偏移的存在，同样需要时间分辨力。一般说来，要估计的参数越多，稳定性要求就越高。我们的处理器既要估计谱级，又要估计波阵面。因此，它要比那些假定信号波阵面是方位的已知函数的处理器要求更高的稳定性。

我们把估计在频率-时间 (f_0, t_0) 处的谱矩阵的问题，转化为选择一组母体谱矩阵近似为常数的 $(N$ 个) 频率-时间点的问题。这一组点记为 S 。于是取估值为：

$$\hat{F}(f_0, t_0) = N^{-1} \sum_{(f, t) \in S} a(f, t) \quad (4)$$

其中 $a(f, t)$ 由方程 (1) 给出。对 $N=1$ ，我们已经假定这个估值近似为无偏的（它的期望值近似等于母体值）。 N 的大小，即时间-带宽乘积，是稳定性的度量。对 $N=1$ ，该估值太不稳定以致无用。不用进一步的解释，我们可以注意到，改变方程 (1) 中的 w ，就能够改进此估值的谱窗特性，而不用对我们的处理作大量的修改(9)。

所谓分类(clustering)就是把具有相似特性的观测联系在一起。因此，我们解决选择组 S 的问题，是基于分类方法(5)。我们的应用的一个特点是要求各组在频率-时间平面上是连接在一起的。这个要求是由于我们的先验知识认为母体谱密度矩阵的特性随频率和时间是缓变的。也就是说，我们没有那样的先验知识：它表明了非相邻频率-时间点上母体谱密度矩阵具有相似性，而在中间那些点上没有相似性。因此，在分类中，一些观测的联合是由观测 $a(f, t)$ 与它们在频率-时间 (f, t) 上的位置二者同时确定的。从种类繁多的分类方法中，我们选择了一个逐级划分的方案。在每一步的开始，有一个或更多的类，它们在频率-时间平面上是一些矩形区。每个类能够用不同的方法分成两个矩形段。对每个划分，计算一个距离，作为

由该两段估计的谱矩阵间的不相似程度的度量。我们的运算法选择一对最不相似的段，由此分出新的类。这样，在频率-时间平面上产生了一个更细的划分。按此运算法，得到了一系列的划分，其开始是所有数据在一个类里。何时该停止在下面讨论。

两个谱密度矩阵不相似的程度由一个统计量来度量，此统计量由一个秩为 1 的分量的强度确定，该分量只在一个谱矩阵里有，而另一个里没有。换句话说，段之间的距离是基于 $\hat{F}_1 \hat{F}_2^{-1}$ 的最大本征值 $\hat{\mu}_1$ ，和 $\hat{F}_1^{-1} \hat{F}_2$ 的最大本征值 $\hat{\mu}_2$ ，其中 \hat{F}_1 和 \hat{F}_2 是两同类段的谱矩阵估值。既然 $\hat{\mu}_1 = \max_{u^*} u^* \hat{F}_2^{-1/2} \hat{F}_1 \hat{F}_2^{-1/2} u$ ，所以 $\hat{\mu}_1$ （类似地， $\hat{\mu}_2$ ）可以考虑成这样：先用 \hat{F}_2 对 \hat{F}_1 进行预白化，然后在所有的波阵面 u 中寻找出最大的分量(3)。用以 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 为基础的距离对谱矩阵的估值进行比较，似乎比其他准则更恰当，其理由有二。第一，我们的准则是处理秩为 1 的分量（这就是我们所假定的信号特点），这样就突出了两段间信号的差别。第二，既然 $\hat{\mu}_1$ （类似地 $\hat{\mu}_2$ ）的确定与 \hat{F}_1 的秩无关，所以我们的运算法能选出包含有强信号的一个小区域，而那些要求 \hat{F}_1 和 \hat{F}_2 都是满秩的准则就做不到。

我们的运算法给出了一系列的类集，它在所有类的 $N < 2P + 44$ 时才终止。频率-时间区域的最佳划分必须从这一系列类集中选择。但我们的运算法不作这个决定。因此，使用者必须根据最大距离的数值、含有特别分量的段所属的类的形状以及由类得到的谱矩阵的分析来作出选择。

确定分辨力有两种可选择的方法。讨论单通道时间系列分析的文章所推荐的方法是使用者对不同频率分辨力的估值进行比较。这种方法可以推广到我们这种频率和时间分辨力都必须改变的情况。这个方法的优点是提供同样大小的类，这样在进行类间比较时所需的假定就较少。然而，同样大小的类通常在一些点上不能保证所需的分辨力，在另一些点上又不能提供所需的稳定性。声纳已经采用了多种显示，使得使用者可以在频率或时间上进行视觉积累。这些显示为它们所能提供的维数所限制。我们的数据是以频率和时间为参数的 $P \times P$ 谱矩阵，不能一下子全部显示出来。因此，数据的有些特性就会遗漏掉。

2. 运算法的详细说明

在图 1 中详细列出了我们的运算法。一开始，它把所有的输入数据，即在 $B_1 \leq f \leq B_2$ 和 $B_3 \leq t \leq B_4$ 内的 $a(f, t)$ ，作为单个类来处理。对所形成的每一个类，都要按第三节中所讨论的方法，对由它得到的谱矩阵进行分析。同时要计算类内部的各个距离，以确定随后的类的分裂。这些运算为方框 3 和 4 所示，它们是对以整数 γ 标记的类进行的。类 γ 占有的矩形区由 $\gamma_1 \leq f \leq \gamma_2$ 与 $\gamma_3 \leq t \leq \gamma_4$ 给定。函数 $I(f, t)$ 在方框 3 中不断更新，它给出每个 (f, t) 所属类的号码。第一次执行运算 3 和 4 时，只有一个类，类 0。其他情况下，必须对类 β 和 α 重复这两个运算，而类 β 和 α 分别占有区域 $\beta_1 \leq f \leq \beta_2$ ， $\beta_3 \leq t \leq \beta_4$ ，和 $\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2$ ， $\alpha_3 \leq t \leq \alpha_4$ 。这通过方框 2 和 19 中指定的初始值以及方框 5 和 6 的运算来完成。类内部的距离 $D(f, t, m)$ 在下面有定义。它的大小度量了两个谱矩阵的不相似程度，它的符号表明了其不相似的性质。对一个类分成两个矩形类的各种可能的划分，都要计算距离 D 。 D 函数中前两个自变量给出了频率和时间上的位置，而第三个则区分是频率上的划分 ($m=1$) 还是时间上的划分 ($m=2$)。 $D(f, t, 1)$ ($D(f, t, 2)$) 是在 f 与 $f+1$ (t 与 $t+1$) 间划分类界时的值；除非此线已经是一个边界，此情况下 $D(f, t, 1) = 0$ ($D(f, t, 2) = 0$)。对于 $N < 2P + 44$ 的那些类， D 定作等于零，这时就不再分下去了。

方框 7—19 选择了一个类，并将其分成两段。所选择的类的划分使得 $|D(f, t, m)|$ 在

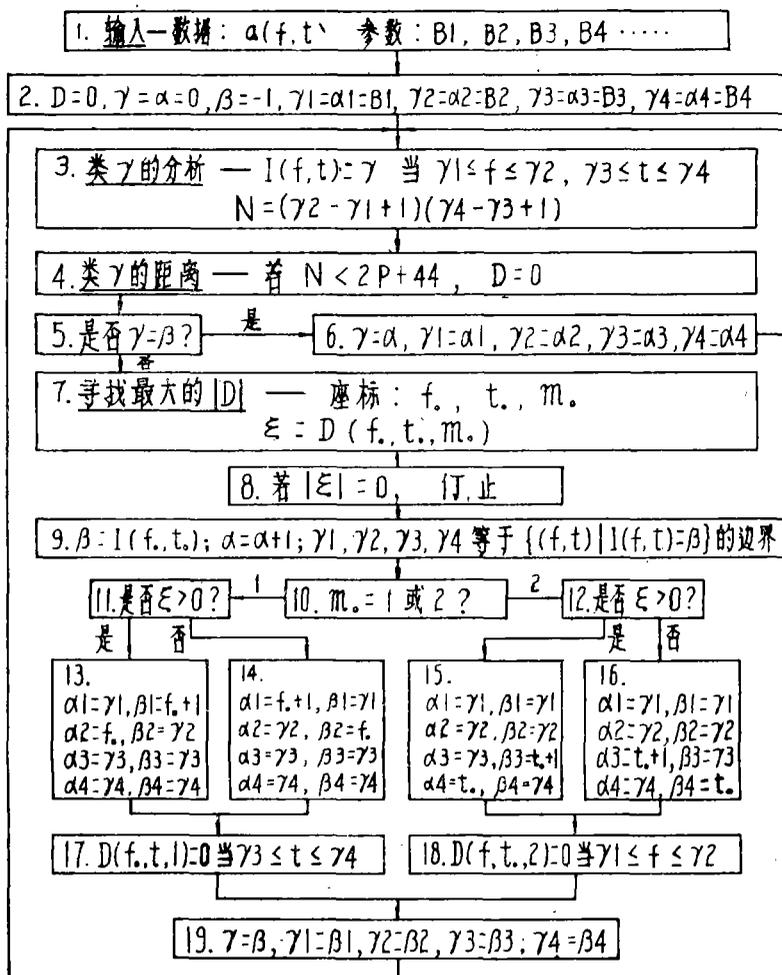


图1 谱矩阵的分裂式分类的运算法

$B_1 \leq f \leq B_2, B_3 \leq t \leq B_4, 1 \leq m \leq 2$ 范围内最大。最大值的座标是 (f_0, t_0, m_0) ; $\xi = D(f_0, t_0, m_0)$ 和 $\beta = I(f_0, t_0)$ 。当 $\xi > 0$ 时, 具有最低频率和时间的类段变成类 α (α 是下一个整数), 而另一个类段保留号码 β 。当 $\xi < 0$ 时, 则反之。为了寻找类 β 和 α 的新的边界, 我们首先使用 $I(f, t)$ 来寻找正在划分的该类的边界。由方框9得到, 正在划分的该类由 $\gamma_1 \leq f \leq \gamma_2, \gamma_3 \leq t \leq \gamma_4$ 给定。方框11—16确定 β 和 α 的新的边界。方框17和18在新类的边界上置 $D=0$, 方框19指定 $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$, 准备进行方框3和4的类分析。

在我们的处理器中, $D(f, t, m)$ 定为

$$D(f, t, m) = \begin{cases} d_1 & \text{在 } d_1 \geq d_2 \text{ 和 } \psi_1 > N_1/N \text{ 时} \\ -d_2 & \text{在 } d_1 < d_2 \text{ 和 } \psi_2 > N_2/N \text{ 时} \\ 0 & \text{在 } \psi_1 \leq N_1/N \text{ 和 } \psi_2 \leq N_2/N \text{ 时} \end{cases} \quad (5)$$

$$d_j = \begin{cases} \{2N_j \log(N_j / (N\psi_j)) + 2(N - N_j) \log((N - N_j) / (N(1 - \psi_j)))\}^{1/2} & \text{在 } N - N_j \geq P + 22 \text{ 时} \\ 0 & \text{在 } N - N_j < P + 22 \text{ 时} \end{cases} \quad (6)$$

其中 N_1 为具有最小频率和时间标记的类段中频率—时间点的数目, N_2 为另一段中的数目, \hat{F}_1 和 \hat{F}_2 为相应的谱估值, $A_j = N_j \hat{F}_j$, ψ_j 是 $A_j(A_1 + A_2)^{-1}$ 的最大本征值。既然 $\psi_j = N_j \hat{\mu}_j / (N + N_j(\hat{\mu}_j - 1))$, 所以 ψ_j 也可由 $\hat{\mu}_j$ 得到。

为什么选择 D 依赖于 N, N_1 和 N_2 , 其理由有二。第一, 如果重新看看 $\hat{\mu}_j$ 的含义, 并注意到 $N - N_j$ 是不带有特别分量的段的大小, 那末我们就可断定 $N - N_j$ 很小时的距离是不稳定的和没有太大意义的。事实上, 如果 $N - N_j$ 小于 P , 则 $\hat{\mu}_j$ 不定。所以在 $N - N_j < P + 22$ 时, 我们取 $d_j = 0$ 。这样, 当不带有特别分量的类段很小时, 我们就停止划分了(不过当类段虽小但具有特别分量时, 我们还是划分的)。第二, 具有不同的 N, N_1 和 N_2 的距离之间, 应该是可以相互比较的。当母体谱矩阵没有变化时, 我们希望划分落在任何地方的概率是同样的。我们的准则并不满足这一点。但是, 在某种有限的意义上, 它是逐渐趋于与 N, N_1 , 和 N_2 无关的。

3. 模拟

我们的运算法的输入是一些带有特征的谱矩阵估值, 对由图2中的情况所产生的数据应

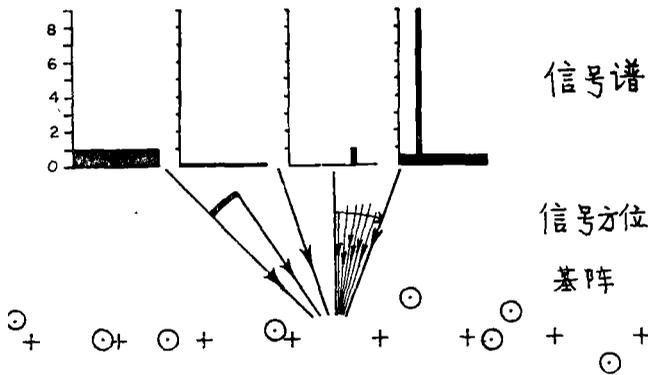


图2 产生数据的情况

用方程(1), 就能得到这些谱矩阵估值。有20个频率单元, 60个时间单元, $a(f, t)$ 的带宽与整个带宽中心频率之比是0.004。方位角 θ 由基阵的垂向顺时针量起。八个水听器假设间隔0.4个波长, 其位置以+表示, 但其实际上的位置如⊙所示。有四个信号, 还有谱级为1.0的独立噪声。信号谱与信号方位如图2所示。信号谱级是在最左边的+处接收到的。从左到右, 第一个信号有一平的谱, 其谱级为1.0。它包括两个平面波, 在最左边的+处它们是同相的。它们的幅度分别为0.6、0.4, 方位分别为 $\sin\theta = -0.7$ 、 -0.55 。第二个信号是一个平面波, 有一平的谱, 谱级为0.125, 方位为 $\sin\theta = -0.3$ 。第三个信号为一谱线, 位处所分析频带中的第15个频率单元($f = B1 + 14$), 谱级1.0, 方位为 $\sin\theta = 0.0$ 。第四个信号有一谱线, 其谱级为9.0, 位置在第5个频率单元($f = B1 + 4$); 还有一宽带谱, 其谱级为0.58。第四个信号从 $\sin\theta = 0.0$ 向 $\sin\theta = 0.36$ 运动, $\sin\theta$ 随时间线性变化。

分类运算法的结果示于图3。右边给出了分类划分系列中逢四的结果。第一步, 由于第四个信号运动的结果, 将数据在时间上分成近乎相等的两类。2—5步将频率5($f = B1 + 4$)

的谱线分离出来。第 8 步后，运算法在时间上作出另一划分，并且找出了频率 15 的谱线。32 步以后运算法停止。19 步时类的排列与类的号码一起示于图左。到了这一步，频率 15 的谱线已经被分离出来；而在开始，当运动信号在相同的方位附近时，则没有分出来。在左下角所示的最大距离图中三角是 D 的正值，圆圈是负值。箭头指向步 19 与 20 之间。

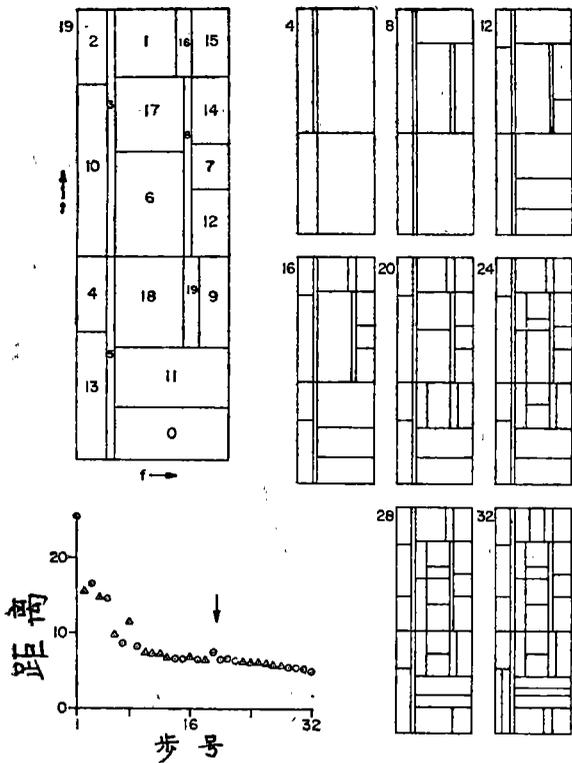


图 3 分类运算法的结果

为了介绍我们的运算法产生的模型，我们在 19 步后停止划分。根据所产生的数据特征看，这个决定是有偏向性的。然而，有一些正当的理由，可以说明为什么在那儿停下来。第一，最大距离在 19 步后平下来。第二，从前面类 8 与 16 的产生看来，类 19 的产生是合理的，它是这次划分的特别分量的一侧。第三，第 20 步是对类 18 划分，它没有给出有意义的结构，因为最小的一段并没有特别分量。从谱矩阵估值的分析可以得到更多的理由来说明为什么在第 19 步后停止。

三、谱 矩 阵 分 析

1. 运算法

在我们的运算法中，谱矩阵估值的分析有两步，即从噪声中分离出信号和将一个以上的信号彼此分离开来。谱矩阵 \hat{F} 是按方程 (4) 在一个频率—时间类上平均得来的。我们的方法从正交分解开始。按递减的次序， \hat{F} 的本征值为 $\hat{\lambda}(1), \hat{\lambda}(2), \dots, \hat{\lambda}(P)$ ，相应的本征矢量为 $\hat{\phi}(1), \hat{\phi}(2), \dots, \hat{\phi}(P)$ ，所以

$$\hat{F} = \sum_{k=1}^P \hat{\lambda}(k) \hat{\phi}(k) \hat{\phi}^*(k) \quad (7)$$

下一步怎么做，对 $N > P + 9$ 与 $N \leq P + 9$ 是不同的。

当 $N > P + 9$ 时，从噪声中分离出信号就是要求出三个估值。信号数目 \hat{K} 的估值由本征值得到，这在下面详述。噪声级的估值是：

$$\hat{\sigma}_0 = (P - \hat{K})^{-1} \sum_{k=\hat{K}+1}^P \hat{\lambda}(k) \quad (8)$$

信号谱矩阵的估值是:

$$\hat{F}_s = \sum_{k=1}^{\hat{K}} (\hat{\lambda}(k) - \hat{\sigma}_0) \hat{\phi}(k) \hat{\phi}^*(k) \quad (9)$$

这种将 \hat{F}_s 分成 \hat{K} 个信号的分解, 在 $\hat{K} > 1$ 时不唯一, 因为选择任一单式矩阵 Φ 并取

$$q(k) = \sum_{j=1}^{\hat{K}} (\hat{\lambda}(j) - \hat{\sigma}_0)^{1/2} \hat{\phi}(j) \Phi_{jk}, \quad \Phi = (\Phi_{jk}) \quad (10)$$

我们可以得到另一种分解

$$\hat{F}_s = \sum_{k=1}^{\hat{K}} q(k) q^*(k) \quad (11)$$

这个分解的改变称为转动。为了取得按先验知识来说是最满意的分解, 我们采用使一个判据量最大的叠代法来选择转动。和方位估值一样, 为写出这个判据量的公式, 需要信号波阵面作为方向的一个函数的先验知识。在我们的运算法中, 这个先验知识就是对信号谱矩阵作为方向和谱级的一个函数的最好猜测。本文讨论的情况是, 水听器假设处于一条直线上, 因此我们猜测信号波阵面只是一个参数 θ 的函数。信号谱矩阵作为 σ 和 θ 的函数, 我们猜测它为 $\sigma v(\theta) v^*(\theta)$, 这里 $v^*(\theta) v(\theta) = 1$ 。给定所选的 \hat{F}_s 分解的一个分量为 $q(k) q^*(k)$, 则谱级估值为 $q^*(k) q(k)$, 方位估值 $\hat{\theta}(k)$ 是使 $|q^*(k) v(\theta)|$ 最大的 θ 。

当 $N \leq P + 9$ 时, 我们取 $\hat{K} = 1$, 和取信号谱矩阵的估值为 $\hat{\lambda}(1) \phi(1) \phi^*(1)$, 以补偿稳定性的不足。既然我们忽略噪声对 $\hat{\lambda}(1)$ 的贡献, 所以信号功率的估值自然是 $\hat{\lambda}(1)$ 。信号方位的估值可以如上面一样由 $\hat{\phi}(1)$ 得到。选择有一个信号而不是没有, 这是有理由的, 因为在 $N < P + 22$ 时, 分类必须是有特别分量的段的情况。选择只有一个信号是基于稳定性不足的考虑。

信号数目的确定是根据对本征值是否相等的一系列检验。有一种对所有本征值是否相等的检验, 是与协方差矩阵检验(1)相似的, 它基于下面的统计量:

$$Z(N, P) = 2(N - (2P^2 + 1)/(6P)) \left(P \log \left(\sum_k \hat{\lambda}(k)/P \right) - \sum_k \log \hat{\lambda}(k) \right) \quad (12)$$

这个统计量渐近于自由度为 $P^2 - 1$ 的 χ^2 分布。为了检验最后 $P - K$ 个本征值是否相等, 我们在这个统计量中用 $N - K$ 和 $P - K$ 分别代替 N 和 P , 这是对于协方差矩阵的情况提出过的方法(10)。令 $\text{Prob}\{\chi^2_\nu < Z\}$ 为一个 ν 自由度的 χ^2 随机变量小于 Z 的概率。在我们的运算法中, 若对于 $\nu = P^2 - 1$, $\text{Prob}\{\chi^2_\nu < Z(N, P)\} < 0.8$, 则选择 $\hat{K} = 0$ 作为信号数目的估值。若对于 $\nu = (P - j)^2 - 1$, $j = 0, \dots, \hat{K} - 1$, $\text{Prob}\{\chi^2_\nu < Z(N - j, P - j)\} \geq 0.8$ 和对于 $\nu = (P - \hat{K})^2 - 1$, $\text{Prob}\{\chi^2_\nu < Z(N - \hat{K}, P - \hat{K})\} < 0.8$, 则选择 \hat{K} ($1 \leq \hat{K} \leq P - 2$)。其他情况选 $\hat{K} = P - 1$ 。

确定正确转动的判据量, 是对 \hat{F}_s 分解分量的波阵面与假想的信号波阵面接近程度的一个度量。与方程(11)的分解对应, 此判据量为

$$B_0 = \sum_{k=1}^{\hat{K}} \max_{\theta(k)} \frac{|q^*(k) v(\theta(k))|^2}{q^*(k) q(k)} \quad (13)$$

式中的第 k 项是分量 $q(k)q^*(k)$ 的波阵面与假想的最优匹配方位的波阵面之间夹角的余弦平方。我们选用分量的功率来归一，因为没有先验知识说明对 $v(\theta)$ 的匹配与信号强度有关。

使判据量最大的叠代运算法如图4所示。方框1—3包括输入运算、初始方位估计和为选

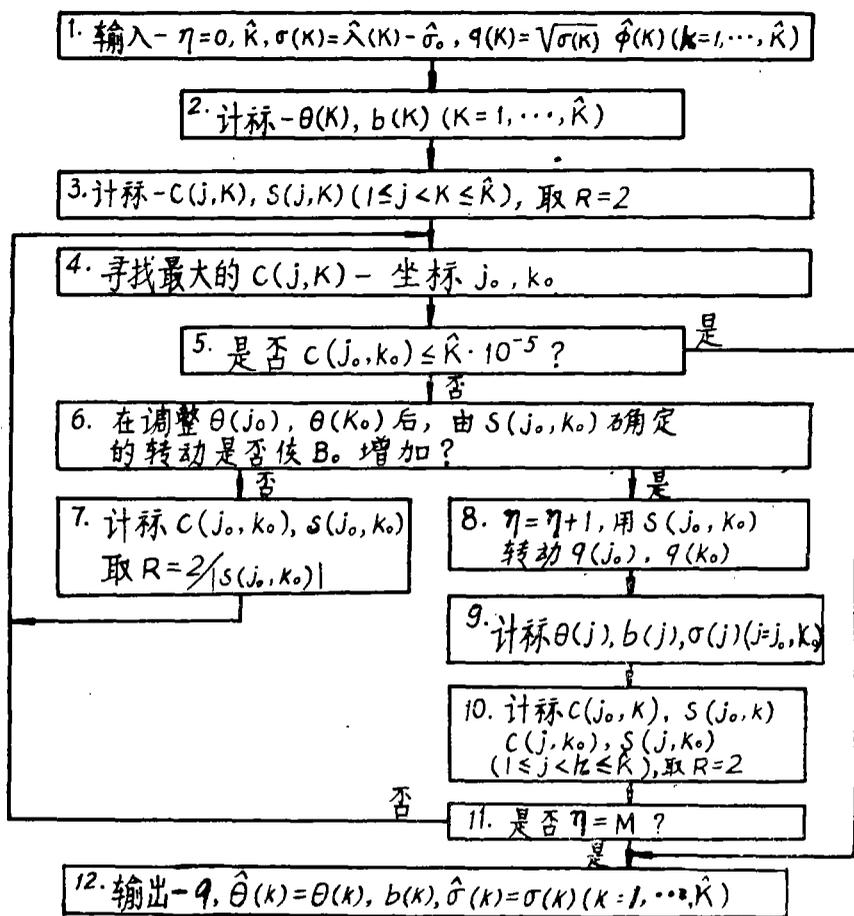


图4 估计信号谱和方位的运算法

择第一次叠代所需的计算。方框1说明运算法由方程(9)给出的分解开始，并将 η 归零准备记下叠代的次数。方框2对 $k=1, 2, \dots, K$ 寻找 $\theta(k)$ ，即使得 $|q^*(k)v(\theta(k))|^2/q^*(k)q(k)$ 最大的 θ ；并令 $b(k)=|q^*(k)v(\theta(k))|^2/q^*(k)q(k)$ 。这一步就是对 θ 在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 区域内的值计算 $|q^*(k)v(\theta)|^2/q^*(k)q(k)$ ，并且在这些 θ 上寻找最大值，然后用这一点作为牛顿法的起始点。下一步是作一个转动，即用 $r(j, k)q(j) - s(j, k)q(k)$ 替换 $q(j)$ 和用 $s^*(j, k)q(j) + r(j, k)q(k)$ 替换 $q(k)$ ，而其他分量保持不变。为使此变换是单式的，复数 $s(j, k)$ 必须满足 $|s(j, k)| \leq 1$ 和 $r(j, k) = (1 - |s(j, k)|^2)^{1/2}$ 。为了选择要转动的一对分量，我们计算各种不同的转动，并在调整 $\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(K)$ 前比较改进的大小。令

$$B(q(j), q(k)) = |q^*(j)v(\theta(j))|^2/q^*(j)q(j) + |q^*(k)v(\theta(k))|^2/q^*(k)q(k) \quad (14)$$

为了选择 $s(j, k)$ ，我们将 $B((1 - |s|^2)^{1/2}q(j) - sq(k), s^*q(j) + (1 - |s|^2)^{1/2}q(k))$ 在 $s=0$ 附近展成 $Re(s)$ 和 $Im(s)$ 的泰勒级数，并用其中的常数项、一次项和二次项作为近似。采用

