

判决与波场空间的关系：概念及实例

P. L. Stocklin

(英国 Loughborough 科技大学)

一、引言

一个系统处理携带信息的能量场的能力，受到物理和技术约束两方面的限制。预估系统处理能力的一般方法是，首先建立理想环境和理想系统的模型，然后基于这两种理想模型预估处理性能。这样预估出来的性能与实测性能的差异，乃是理想模型与实际情况存在差异的结果。这包括两方面的效应，其一是技术上的折衷，例如幅度的量化或处理时间的有限性；其二是环境的近似，例如信号无畸变的传播。研究这些效应，对于技术的进一步发展和环境模型的进一步改善具有指导作用。

自四十年代后期以来在这两方面已取得的重大进展，使得进一步改善性能需付出巨大的代价。因此，不应在系统的其它环节不变的情况下，单考虑处理方法的改进。有必要把处理方法的潜力与其它改善性能的方法进行比较，这包括基本系统方面—大小、速度、水动力特性—的改变，以便确定哪种方法在一定投资下可获得最大的效果。

因此，估计每一项技术措施对于改善性能的最大效果，作为判断该项投资价值的依据，已变得日益重要。特别是需要一种解析方法，它能在一定的物理条件（例如接收阵体积、水听器数量、带宽、系统及信号的变化、环境条件）下计算处理潜力的理论极限。

同样重要的是，这样一个理论极限的导出应不依赖于具体的处理方案。但是，只要这一极限已经求得，不同方案的性能应能作相对及绝对的比较。象决策理论所指出的〔1〕，先验知识—用概率函数表示—决定了统计最佳处理方案及其性能。因此，所寻求的方法首先应考虑到空间—时间的物理现实性。其次，还应考虑到对空间—时间数据先验知识的陈述〔2,3〕。

二、方法

每一个信息处理系统必须处理的基本物理量是：

- (a) 有限数量的空间接收器或有限的接收体积。
- (b) 有限的处理时间。
- (c) 有限的幅度窗口。对于声场，幅度是声压的值；对于电磁场，幅度是场的幅度向量。

在这三个量的约束之下，通常可选取工作的频率范围。事实上，频率起着—个连接参数的作用。它把这三个基本量联系起来，使其正则性变为更明显。

空间、时间和幅度都具有量化的性质，这可能是使用离散的点状接收器或数字系统的结果，而更基本的，则是来自测量或热噪声的不确定性形成的“自量化”。因此，提出的方法应从基本的三维空间的定义着手，它的座标是空间、时间和幅度，每一个是量化的，如图 1 所示。

量化单元 Δa 、 Δl 和 $\Delta \tau$ 决定于系统设计或自然的限制，在系统设计时它们进行仔细的考虑是一个重要的步骤。给定了量化单元，就能够确定基本量空间中的可分辨幅度图样的数量，这些可分辨图样叫做判决体。若“点状”空间接收器的数量为 M ，“点状”时间接收器的数量为 n_T ，幅度量化数为 n_A ，则可分辨幅度判决的总数 D 为：

$$D = n_A M n_T$$

通常的函数判决，例如方向测定或波形估值，可用上述判决体来描写。这些函数判决的效率可用对 D 的百分比表征。根据 D 空间中的量化单元及基本关系，可导出一组函数判决所需的最小 D 空间；或对于给定的 D 空间，可确定在作出一组函数判决时的最终限制。

最后，环境、目标及干涉场的变化可看成是 D 空间的变化，它们对判决效率的影响是可以推算的。特别是对概率场（例如噪声）引起的判决空间的幅度图样的不确定性，能够进行详细的研究，并可以提出一个适当的统计检验例如似然比检验。

例：设有一个有 M 个点状阵元的线阵，阵元间隔为 d ，在幅度窗口 $\left(-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right)$ 内的量化级为 n_A ；并设有一个周期信号平面波场作为 D -空间唯一的场（无噪声情况），已知其基本波长为 λ_1 ，但方向未知。试求对信号方向 δ_θ 这一函数判决的极限。

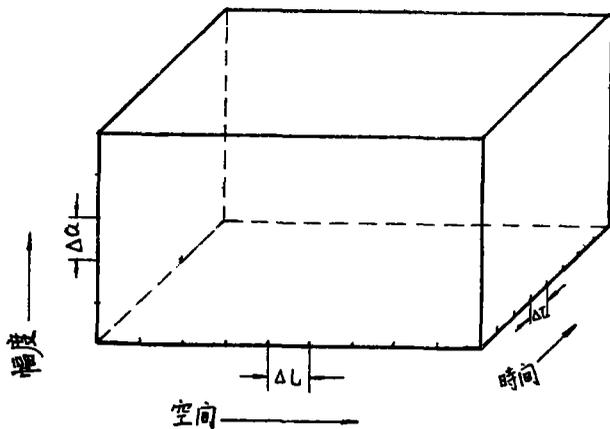


图 1 基本量空间—自然判决空间 (D -空间)

三、幅 度 量 化

假定幅度量化规则—将幅度窗口量化为 n_A 个单元的方式—会影响 δ_θ 的极限，问是否有最佳的量化规则。

首先，考虑平方标准的量化规则，它使实际信号波形与量化信号波形的均方误差 E_Q 最小。记第 r 级量化间隔 Δ_r 的中点为 A_r ，信号波形为 $s(t)$ ，信号随机停留在 s 和 $s + ds$ 之间的概率密度为 $p(s)$ 。由于整个量化必须覆盖幅度窗口 A ， Δ_r 应受下式约束：

$$\sum_{r=1}^{n_A} \Delta_r = A \quad (1)$$

在窗口内的均方误差 E_Q 为：

$$E_Q = \frac{1}{A} \sum_{r=1}^{n_A} \int_{A_r - \Delta_r/2}^{A_r + \Delta_r/2} (A_r - s)^2 p(s) ds \quad (2)$$

下面的问题是：在方程（1）给定的约束下，使方程（2）给定的 E_Q 最小。引入替换

$$s = A_r + u \quad (3)$$

E_Q 简化为

$$E_Q = \frac{1}{A} \sum_{r=1}^{n_A} \int_{-\Delta_r/2}^{\Delta_r/2} u^2 p(A_r + u) du \quad (4)$$

利用方程（4）和（1），可定义 g ：

$$g = \frac{1}{A} \sum_{r=1}^{n_A} \int_{-\Delta_r/2}^{\Delta_r/2} u^2 p(A_r + u) du - \lambda \sum_{r=1}^{n_A} \Delta_r \quad (5)$$

式中的 λ 是待定因子（拉格朗日法）。对特定的 Δ_r ，求 g 的极值

$$\frac{\partial g}{\partial \Delta_r} = 0 \quad (6)$$

由（6）式可求得 Δ_r 的最佳值：

$$\left(\frac{\Delta_r}{2}\right)^2 = \frac{\lambda A}{\left\{ \frac{1}{2} \left[p\left(A_r + \frac{\Delta_r}{2}\right) + p\left(A_r - \frac{\Delta_r}{2}\right) \right] \right\}} \quad (7)$$

假定

$$\frac{1}{2} \left[p\left(A_r + \frac{\Delta_r}{2}\right) + p\left(A_r - \frac{\Delta_r}{2}\right) \right] = p(A_r) \quad (8)$$

则

$$\frac{\Delta_r}{2} = \left[\frac{\lambda A}{p(A_r)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

将方程（9）代入（1），求得 λ 。再将 λ 值代入（9），得到：

$$\Delta_r = A \frac{[p(A_r)]^{-\frac{1}{2}}}{\sum_{r=1}^{n_A} [p(A_r)]^{-\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

或 $\Delta_r [p(A_r)]^{\frac{1}{2}} = \text{常数} = K_1 \quad (11)$

$$K_1 = \frac{A}{\sum_{r=1}^{n_A} [p(A_r)]^{-\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

方程（11）给出的结果是基本的，它表明：为使方程（1）约束下的均方误差最小，第 r 级

量化的宽度 Δ_r 应反比于信号波形在 A_r 的概率的平方根。

然而在 D 空间,就本例而言,是对幅度而不是平方幅度有兴趣。因此,下面来讨论线性标准 E_L (绝对幅度误差):

$$E_L = \frac{1}{A} \sum_{r=1}^{n_A} \left\{ \int_{A_r - \Delta_r/2}^{A_r} (A_r - s) p(s) ds + \int_{A_r}^{A_r + \Delta_r/2} (s - A_r) p(s) ds \right\} \quad (13)$$

象上面的推导一样,利用约束方程(1)、变数替换方程(3)、近似方程(8),得到:

$$\Delta_r' = A \frac{[p(A_r)]^{-1}}{\sum_{r=1}^{n_A} [p(A_r)]^{-1}} \quad (14)$$

$$\text{或} \quad \Delta_r' p(A_r) = \text{常数} = K_2 \quad (15)$$

$$K_2 = \frac{A}{\sum_{r=1}^{n_A} [p(A_r)]^{-1}} \quad (16)$$

方程(15)表明:为使绝对幅度误差最小,第 r 级量化间隔应反比于信号波形在 A_r 的概率。

因此,为使绝对误差最小, M 个点状接收器中每一个的输出应通过由方程(15)规定的量化器,它等效于使每一个 A_r 等概率地出现在 D 空间。对于周期波形,这意味着,每一周期它在每一个量化间隔度过同样的时间。

由此可见,对于 n_A 个量化间隔最有效的(平均绝对幅度误差最小)量化是通过以下述方式选取幅度 s 的值 s_r 来达到的:按这些 s_r , $p(s)$ 被划分为 n_A 块相等的面积。若在峰值 $\pm A_p$ 之外, $p(s)=0$,则没有必要将 A 扩展到 $\pm A_p$ 之外,因为当 n_A 给定以后, s_r 的值不随这一扩展而变化。可以证明: (E_L) 最小随 n_A^{-1} 变化;当 n_A 趋于无限时, (E_L) 最小趋于零。

四、时 间 采 样

在本例中,对时间采样的兴趣在于考察它对可分辨信号方向的数量及分辨率的影响。由于只涉及周期信号,方便的参数应是每周期的时间采样数 n_1 。采样是等间隔的,量化信号波形所有的值都通过采样器。

考察两个点状接收器输出的量化周期信号波形,输入信号为平面波。当信号来于基阵的舷侧方向时($\theta=0^\circ$),两接收器输出是一样的。现在信号的方向逐步从舷侧偏离,直至从两点状接收器的输出可看到幅度图样的差异,问这一方向的最小偏离与 n_A 及 n_1 的关系如何?

首先,假定方程(15)所规定的概率过滤已经完成。若信号是周期为 T_1 的正弦波,则方程(15)将此正弦波变换为“三角波”。量化电平发生一次变化的时间间隔为

$$T_A = \frac{T_1}{2(n_A - 1)} \quad (17)$$

现假定每周期只作一次时间采样,那么,为了从一个点状接收器的输出看到与另一个接收器

不同的新图样，信号方向的最小改变应与相当于一个 T_A 的延时 $(\Delta\tau)_1$ 相对应，即

$$(\Delta\tau)_1 \geq T_A \quad (18)$$

如果每一周期 T_1 有两个时间采样，在 $(\Delta\tau)_1$ 达到以前仍不会出现新的图样。不过，这种情况的新图样，与舷侧图样相比，将包含两个不同的幅度，而不是如同 $n_1 = 1$ 的情况只包含一个不同的幅度。随着 n_1 的增加，直到每个量化电平有一个时间采样时（即 $n_1 = 2(n_A - 1)$ ）—对于单一的正弦波信号，产生新图样的最小方向改变仍相应于 $(\Delta\tau)_1$ 。然而，如果 n_1 增加到 $2(n_A - 1) + 1$ ，至少有一个幅度电平含有两个时间采样，那么，为产生新图样所需的最小延时 $(\Delta\tau)_2$ 为：

$$(\Delta\tau)_2 = \frac{T_A}{2} \quad (19)$$

$(\Delta\tau)$ 最小随 n_1 的变化如图2所示。

从图2可以看到 n_1 及 n_A 二者的效应。代数上，图2可表示为：

$$(\Delta\tau)_{\text{最小}} = \frac{T_A}{k} \quad (k-1)2(n_A-1) + 1 \leq n_1 \leq k \cdot 2(n_A-1) \quad (20)$$

由关系式

$$\Delta\tau = \frac{m d \sin\theta}{c} \quad (21)$$

可知，对于一定的 $\Delta\tau$ ，间距最大的两个点状接收器相应于最小的角度 θ_1 ，即 $m = M - 1$ （ m 是两点状接收器之间的阵元间隔数）。因此

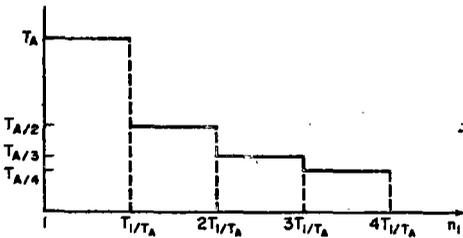


图2 相应于最小可分辨方向的延时随 n_1 和 T_A 的变化

$$(\Delta\tau)_{\text{最小}} = \frac{T_A}{k} = \frac{(M-1)d}{c} \sin\theta_1 \quad (22)$$

对于这一角度，除第 M 个点状接收器外，其它接收器输出的幅度图样仍与舷侧方向的图样是一样的。

当 $\Delta\tau$ 继续增加（ θ 增大到 θ_2 ），间距次大的两点状接收器达到延时 $(\Delta\tau)$ 最小时，又出现新的图样—第 M 个及第 $(M-1)$ 个接收器的输出一样。条件是：

$$\frac{(M-2)d}{c} \sin\theta_2 = \frac{T_A}{k} \quad (23)$$

随着 θ 的增加， D —空间中的可分辨幅度图样继续出现，直至由下式规定的角度 θ_r 为止：

$$\frac{(M-r)d}{c} \sin\theta_r = \frac{T_A}{k} \quad (24)$$

r 是满足下面不等式的最大整数：

$$r < \frac{M+1}{2} \quad (25)$$

当 r 增大到超出上式的限定以后，出现附加的图样。在舷侧方向与常规波束形成一把相继的

点状接收器输出作累进的延时($\Delta\tau$)最小—能对准的方向 θ_{c1} 之间,可分辨幅度图样的总数 θ_M 列于表 I, M 取值范围是 $2 \leq M \leq 32$ 。当 $M > 10$, θ_M 近似以指数关系随 M 增加:

$$\theta_M \sim K^M \quad (26)$$

式中, $K = \sigma(1.25)$ 。

当 θ 从 θ_{c1} 增大到 θ_{c2} —这时, 相继基阵元的累进延时为 $2(\Delta\tau)$ 最小—时, 在 D -空间再次出现 θ_M 个可分辨幅度图样(方向)。因此, 在整个扇面 $(-\pi, \pi)$, 总共有 n_θ 个方向可以分辨:

$$n_\theta = 2N_d \cdot \theta_M + 1 \quad (27)$$

其中, N_d 是小于或等于 $d/(c(\Delta\tau)_{\text{最小}})$ 的最大整数。利用方程(20)及(17)得到 N_d 是小于或等于 $2\left(\frac{d}{\lambda_1}\right)k(n_A - 1)$ 的最大整数。于是方程(27)可写成:

$$n_\theta = 2N_d\theta_M + 1 \leq 4\left(\frac{d}{\lambda_1}\right)k(n_A - 1)\theta_M + 1 \quad (28)$$

方程(27)及(28)表明了由于 D -空间的量化而产生的方向量化。它同时还表明, 对于稀阵元阵, 例如 $M = 2$, $d \gg \lambda_1$, 多个方向可以只对应于 D -空间中的一个图样。这种现象可称为方向上的虚警。

表 I 在常规波束形成的波束单元中的可分辨信号方向数 θ_M 与 M 的关系

M	θ_M	M	θ_M	M	θ_M
1	0	11	41	21	139
2	1	12	45	22	149
3	3	13	57	23	171
4	5	14	63	24	179
5	9	15	71	25	199
6	11	16	79	26	211
7	17	17	95	27	231
8	21	18	101	28	243
9	27	19	119	29	271
10	31	20	127	30	279
				31	309
				32	325

五、说 明

本例的目的在于建立接收声场的空间、时间及幅度量化的与目标方向测定的量化之间的关系。讨论的前提是: 单一的单色目标; 点状接收器线阵; 不存在干扰噪声场。根据量化的信号方向序列, 可以估算方向分辨率及方向精度, 以及可能存在的假目标方向。显然, 随机干扰场及其它离散源的加入, 将改变关于方向测定的上述结论。可以预期, 空间—时间采样及幅度量化的精细度存在一个最终的限度。超出这个限度, 不能进一步改善方向测定的精度。这将是今后研究的课题。

(黄曾昉译 尚尔昌校)

参 考 文 献

1. Peterson, W. W. et al, "The Theory of Signal Detectability. " Trans. I. R. E. PGIT-4, 171(1954).
2. Stocklin, P. L. "Space-Time Sampling and Likelihood Ratio Processing in Acoustic Pressure Fields. " J. Brit. I. R. E. 26, №1, P. 79(1963).
3. Stocklin, P. L. "Space-Time Decision. Relation of Wavefield and Decision Spaces. " In Proc. of the NATO Advanced Study Inst. on Signal Processing, 1968 8.