信号检测中和时间统计有关的一些理论考虑

A.R.Pratt

（英国 Loughborough 科技大学）

一、引　言

多年来，脉冲雷达或声纳系统的检测性能的预测都是建立在由J. I. Marcum[1]提出的工作的基础上的。这主要是因为，他的理论能很好地与实际相符。最近，C.W.Helstrom[2]报导了一种根据超越阈值的概率进行性能预测的方法。这种方法已经用于计算虚警概率。但是，似乎还没有详细的理论能用来计算检测概率。本文的目的在于建立一种计算检测概率的理论方法，它至少对于简单的情况，即基带信号和低通过滤噪声是适用的。看起来，这一工作还有可能推广到处理更加常用的包络解调信号和噪声的情况。实验工作证实了模型的正确性，性能的差异是小的。并且这种差异看起来很象是实验误差引起的。

在本文的前几节，我们首先回顾一下Marcum的理论和Helstrom的方法。最后，我们将考虑和检测概率有关的理论和它的应用。

二、Marcum的检测理论

Marcum提出的理论是建立在Neyman-Pearson的假设检验方法的基础上的，后者现在已在雷达和声纳领域里被广泛采用。Neyman-Pearson判决规则是简单的，即观察者希望设置一个可接受的虚警电平，而使得检测概率最大。这一规则等价于：根据虚警概率的要求来决定一个判决阈值。这种判决规则在某些雷达和声纳的情况下特别有用，因为通常很难具有关于信号幅度、先验概率或错误判决损失的知识。

在这里，我们只讨论单个脉冲信号的检测，也就是在判决之前，不作后置积累。在这种简化的情况下，Marcum认为我们只需要在每一个和信号及噪声过程的相关间隔相应的周期中作一次判决。如果作出判决的周期比相关间隔短，那么，我们将看到仅有噪声或者信号加噪声的样本之间的相关性。如果采样周期大于相关间隔，那么我们就可能损失某些重要的信息。相关间隔大致等于接收机中频带宽的倒数。样本幅值超过阈值的概率由相应的概率密度函数在阈值以上的面积给出。当噪声为正态分布，并假定信号的出现仅表现为均值的变化时，虚警概率（FAP和检测概率（POD）由下式给出：

$$FAP=\int_k^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x}{2\sigma^2}\right]dx=\frac{1}{2}\left[1-erf\left(k/\sqrt{2\sigma^2}\right)\right] \tag{2.1}$$

$$POD=\int_k^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2}\right]dx=\frac{1}{2}\left[1-erf\left(\frac{k-s}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right] \tag{2.2}$$

其中s是由于信号引起的平均电平的变化。对于经过解调的情况，这些等式成为：

$$FAP=\int_k^{\infty}\frac{R}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right]dR=\exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \tag{2.3}$$

$$POD=\int_k^{\infty}\frac{R}{\sigma^2}I_0\left[\frac{sR}{\sigma^2}\right]\exp\left[-\frac{R^2+s^2}{2\sigma^2}\right]dR \tag{2.4}$$

这两种情况如图1所示。

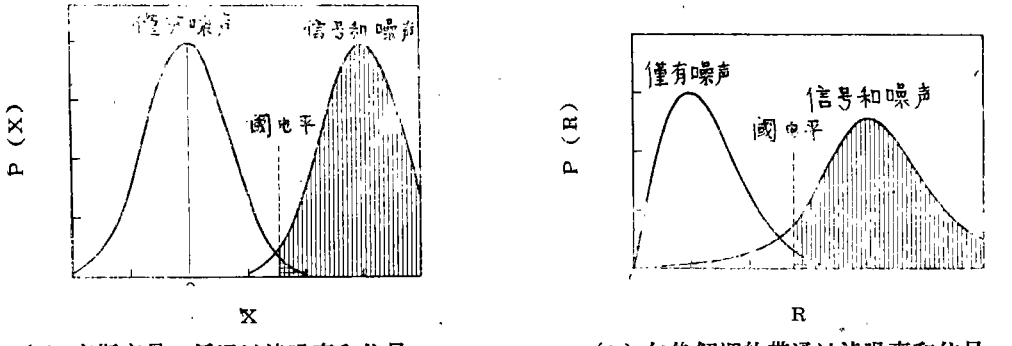
诚然，在有些情况下会对接收波形进行采样观测，上面的等式所讨论的正是这种情况。但是，在雷达和声纳的许多情况中，并不作采样观测，那么上述等式就会导致不正确的估值。上面的等式计算了在阈电平以上的那部份时间所占的百分比。当采样观测时，在整个观测时间T内的虚警次数为：

$$N_s=T\cdot FAP/\tau_s \tag{2.5}$$

τ_s是采样周期。当连续观测时，在观测时间T内的虚警次数为：

$$N_c=T\cdot FAP/\tau_{平} \tag{2.6}$$

$\tau_{平}$是每次向上穿越阈值后的平均过渡时间，以下简称平均过阈时间（除注明外，均指以正斜率穿越阈值的情况）。*



(a) 高斯变量—低通过滤噪声和信号　　(b) 包络解调的带通过滤噪声和信号

图1．J.I. Marcum检测模型图解

三、连续情况下的虚警概率

在连续情况下的虚警概率就是仅有噪声时其峰值超过阈值的概率。它也就是噪声波形以正的斜率穿过阈值的概率。我们将先从以正斜率穿过阈值的概率的一般推导着手，然后把它

*此段原文论述混乱，译校者作了改写。

用于两种情况：一种是幅度概率密度函数是高斯分布的情况，另一种是相应的概率密度函数是瑞利分布的情况。后一种情况在窄带噪声包络解调时就是如此，这在很多声纳和雷达接收机中可以遇到。

正向穿越阈值概率的推导已由S.O.Rice[3]（仅考虑过零点）和M.Kac[4]二人完成。他们至少考虑了具有高斯概率密度函数的随机波形情况。我们将用和S.O.Rice所用的略有不同的方法开始分析。任何一个波形或函数都可以用无穷的泰勒级数展开来表示：

$$f(t+\tau)=f(t)+f'(t)\tau+f''(t)\frac{\tau^2}{2!}+f'''(t)\frac{\tau^3}{3!}+\cdots\cdots \tag{3.1}$$

其中$f'(t)$是$f(t)$在t的一次导数，f''是二次导数等等。

于是随机过程$f(t)$的统计可以由在时间上某一点的$f(t)$及各阶导数的无穷阶概率密度函数表示出来，对于$f(t)$的无穷次可微的要求就对$f(t)$的谱提出了一些限制。

如果$f(t)$在t至$t+\Delta t$的时间里以正的斜率穿过阈电平k，那么

$$f(t)<k,\quad f(t+\Delta t)>k \tag{3.2}$$

对于短的时间区间Δt，我们可将$f(t)$近似表达为：

$$f(t+\Delta t)=f(t)+f'(t)\Delta t \tag{3.3}$$

于是：

$$f(t)<k<f(t)+f'(t)\Delta t \tag{3.4}$$

以及

$$k>f(t)>k-f'(t)\Delta t \tag{3.5}$$

显然，$f'(t)$必然是正的，因为$f(t)$小于阈值k。这样的$f(t)$和$f'(t)$值出现的概率是：

$$\int_0^{\infty} dx' \int_{k-f'(t)\Delta t}^{k} dx P(x,x',t) \tag{3.6}$$

$P(x,x',t)$是$f(t)$的幅度和它的一次导数的二阶联合概率密度。当$f'(t)\Delta t$是小量时，我们可以认为积分内的$P(x,x',t)$对x的小的变化是一个常数。在内层积分完成后，上面的公式成为：

$$\int_0^{\infty} P\ (k,\ x',\ t)\ x'\Delta t dx' \tag{3.7}$$

因此，一个随机波形在时间Δt内以正的斜率穿过阈值k的概率是：

$$\Delta t \int_0^{\infty} x' P\ (k,\ x',\ t)\ dx' \tag{3.8}$$

用类似的推导，我们可以证明，一个随机波形在时间Δt内以负的斜率穿过阈值的概率是：

$$-\Delta t \int_{-\infty}^{0} x' P(k,\ x',\ t)\ dx' \tag{3.9}$$

从（3.8）我们可以看到，在时间T内碰到的正向穿过阈值的次数可以由0至T的积分得到。

因此，时间T内的虚警次数是

$$N_c=T\int_0^{\infty}x'P(k,x',t)dx' \tag{3.10}$$

代入等式（2.6），将使我们能够计算平均过阈时间$\tau_{平}$，因为它应等于总的过阈时间除以同一时间中穿过阈值的次数：

$$\tau_{平}=\frac{\int_k^{\infty}P(x)dx}{\int_0^{\infty}x'P(k,x',t)dx'} \tag{3.11}$$

根据上面的公式，就能计算连续波形的虚警。我们考察两种情况。首先是具有高斯概率分布的低通过滤噪声的虚警概率，其次是包络解调的高频窄带的虚警概率。

1．低通过滤的高斯噪声

当滤波器的输入是白噪声时，我们可以用付里叶变换关系式来表示它的输出：

$$f(t)=Re\int_0^{\infty}c(\omega)\exp[-j\omega t]d\omega \tag{3.12}$$

n个正态分布的变量的联合概率密度函数是：

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-n/2}|M|^{-1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{|M|}\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_jM_{ij}\right] \tag{3.13}$$

这里M是协方差矩阵的行列式，M_{ij}是矩阵中元素μ_{ij}的余因子。不失一般性，可以假定$f(t)$的平均电平是零。这样，$f(t)$的幅度概率密度函数就是

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|M|^{-1/2}\exp\left[-\frac{M_{11}x^2}{2|M|}\right] \tag{3.14}$$

协方差矩阵仅由一个元素μ_{11}构成：

$$\mu_{11}=\overline{f(t)^2}=\sigma^2=\phi(0) \tag{3.15}$$

这里$\phi(0)$是自相关函数在$t=0$的值。

因而$P(x)$成为我们熟知的形式：

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.16}$$

$P(x,x')$的推导只是稍微困难一些。协方差矩阵M是

$$M=\begin{bmatrix}\mu_{11} & \mu_{12}\\ \mu_{21} & \mu_{22}\end{bmatrix}$$

这里元素的次序是 (x,x')。那么

$$\mu_{11}=\overline{x^2}$$
$$\mu_{12}=\mu_{21}=\overline{xx'}=\phi'(0) \tag{3.17}$$
$$\mu_{22}=\overline{x'^2}=-\phi''(0)$$

因为当x和x'之间的时间差为0时，$\mu_{12}=\mu_{21}=0$，两个变量是独立的，所以我们可以写成

$$P(x,x',t)=\frac{[-\phi(0)\phi''(0)]^{-1/2}}{2\pi}exp\left[-\frac{x^2}{2\phi(0)}+\frac{x'^2}{2\phi''(0)}\right] \tag{3.18}$$

它也是和时间t独立的。

把这些结果用于方程（3.8）及（3.10），去求以正斜率穿越阈值的概率$P(^+c)$和在时间T内这样穿过的次数，我们得到：

$$P(^+c)=\Delta t\int_0^\infty x'exp\left[\frac{-x'^2}{2\phi''(0)}\right]dx'\ \frac{[-\phi(0)\phi''(0)]^{-1/2}}{2\pi}\ exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right]$$

$$=\frac{\Delta t}{2\pi}\left[-\frac{\phi''(0)}{\phi(0)}\right]^{1/2}exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right] \tag{3.19}*$$

这本质上就是S. O. Rice和M. Kac 所得到的结果。

$$N_c=\frac{T}{2\pi}\left[-\frac{\phi''(0)}{\phi(0)}\right]^{1/2}exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right] \tag{3.20}$$

假如我们取低通滤波器的频率响应是高斯的：

$$F(\omega)=exp[-\omega^2/\omega_0^2]$$

我们可以认为，当输入是白噪声谱密度时，输出的功率谱密度$\Phi(\omega)$是：

$$\Phi(\omega)=exp[-2\omega^2/\omega_0^2] \tag{3.21}$$

适当应用付里叶变换，我们可以求出自相关函数

$$\phi(\tau)=\int_0^\infty 2exp\left[-2\omega^2/{\omega_0}^2\right]\cos(\omega\tau)d\omega=\omega_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}exp\left[-\frac{{\omega_0}^2\tau^2}{8}\right] \tag{3.22}$$

$$所以\phi(0)=\omega_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

将$\phi(\tau)$对τ微商，我们可以求出$\phi'(\tau)$和$\phi''(\tau)$：

$$\phi'(\tau)=-{\omega_0}^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\tau}{4}\ exp\left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{8}\right] \tag{3.23}$$

$$\phi''(\tau)=\omega_0^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\omega_0^2\tau^2}{16}-\frac{1}{4}\right]exp\left[-\frac{\omega_0^2\tau^2}{8}\right] \tag{3.24}$$

从而$\left[-\frac{\phi''(0)}{\phi(0)}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\omega_0}{2}$，以及

---

* 此式原文有误。——译注

$$P(+c)=\frac{\omega_0\Delta t}{4\pi}\ exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.25}$$

$$N_c=\frac{\omega_0 T}{4\pi}\ exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.26}$$

在时间T内，这样的随机波形的过阈时间百分比是

$$\int_k^\infty \frac{T}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx=\frac{T}{2}\left[1-erf\ (k/\sqrt{2\sigma^2})\right] \tag{3.27}$$

因此，一次穿越的平均过阈时间是

$$\tau_{平}=\frac{1-erf\ (k/\sqrt{2\sigma^2})}{\frac{\omega_0}{2\pi}\exp\left(-k^2/2\right)} \tag{3.28}$$

于是，$\omega_0\tau_{平}=2\pi\left(1-\mathrm{erf}\ (k/\sqrt{2\sigma^2})\right)\exp\left(k^2/2\sigma^2\right)$。

容易证明，正向穿过阈值的概率和一次穿越的平均过阈时间都依赖于低通滤波器响应的形状，特别是依赖于响应的截止情况。作为一个例子，在截止角频率为每秒ω_0圆弧的理想低通滤波器的情况下，穿过阈值概率、穿越次数和平均过阈时间的相应公式是：

$$P(+c)=\frac{\omega_0\Delta t}{2\pi}\ exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.29}$$

$$N_C=\frac{\omega_0 T}{2\pi}\ exp\left[-\frac{k^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.30}$$

$$\omega_0\tau_{平}=\pi\left(1-erf\ (k/\sqrt{2\sigma^2})\right)exp\left(-k^2/2\sigma^2\right) \tag{3.31}$$

当阈值k大于噪声的均方根值的大约7倍时，即当：

$$\frac{k}{\sqrt{2\sigma^2}}>5$$

误差函数$erf(x)$可以近似地表示为

$$\mathrm{erf}\,(x)=1-\frac{\exp\left(-x^2\right)}{x\sqrt{\pi}} \qquad x>5 \tag{3.32}$$

因此，在高的阈电平下，对于高斯低通滤波器，平均过阈时间近于下式：

$$\omega_0\tau_{平}=\frac{2}{k}\sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad k>7\sigma \tag{3.33}$$

其它结果也可以从上面推导的方程中得到。其中有一个结果是和具有高斯概率密度函数的窄带噪声的相位有关的。可以指出，与正弦波（它的频率是窄带噪声的谱的中心）相比，噪声波形的相位随着时间连续超前。换句话说，根据噪声过零率来测量的有效频率高于噪声谱的中心频率。这一结果已由M.I.Skolnik[5]，D.Middleton[6]和其他人指出。

现在必须把上面与虚警概率有关的结果在声纳和雷达系统中解释一下。方程（3.19）是正向穿过阈值k的概率。如前面所解释的，它也是连续波（而不是采样波）检测系统的虚警概率。很清楚，从这个方程可以看到，虚警概率与因子Δt成正比。Δt就是用于观测波形作出一次判决的时间长度，我们将称这个时间为观测区间。在雷达和声纳系统的早期工作中曾提出，观测时间可以划分为几段，每一段大约等于过程的相关时间。在这一方法中，只会损失很少的信息，而根据这些邻接的时间段的状态所作的判决在一定程度上是独立的。在第二次世界大战期间进行的、后来由Lawson及Uhlenbeck报导的工作指出[7]，中频带宽与脉冲长度的乘积近似于1。对于高斯形状的脉冲以及与它相匹配的滤波器这样的特殊情况，可以指出：

$$\omega_0 T = 0.886\pi = 2.78$$

这里$F(\omega) = \exp[-\omega^2/\omega_0^2]$

$$f(t) = \exp[-\omega_0^2 t^2/2]$$

T表示$f(t)$的半功率宽度。我们将会看到，当我们讨论噪声中出现信号的情况时，关于观测时间的这个估值的正确性还有一些疑问，$\omega_0 T = 2\pi = 6.28$也许更加合理。

作为虚警概率的比较，在图2画出了三种情况下虚警概率与归一化阈电平k/σ的平方的关系。这三种情况都是高斯低通过滤噪声。其中之一是由方程（2.1）给定的虚警概率的误差函数的估值。其余两个是按照给出的两种观测区间，根据正向穿越阈值的概率所作的估值。它们可以近似地考虑作下限和上限。选择一个满意的或最佳的观测区间是一个困难的问题，它还和信号出现时系统的检测性能有关。因此，我们将在后面考虑它。

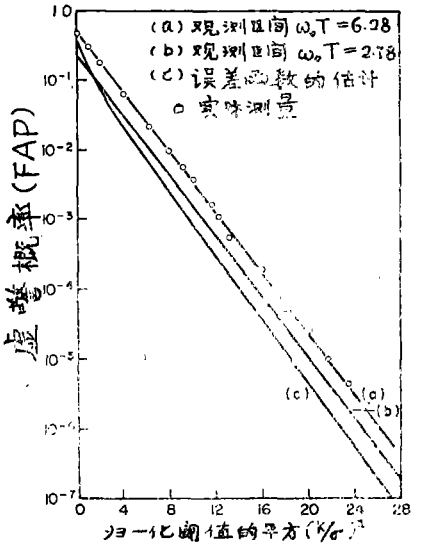


图2 具有高斯功率谱密度、经过高斯低通滤波的噪声的虚警概率和归一化阈电平的平方的关系

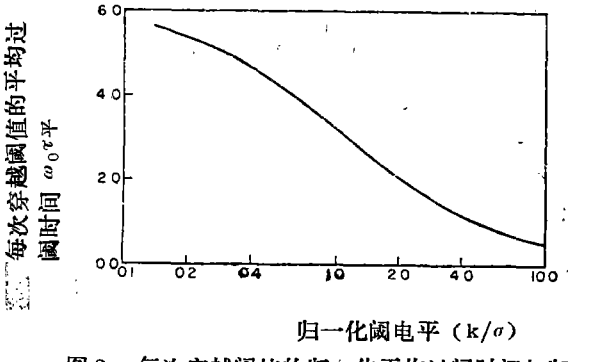


图3 每次穿越阈值的归一化平均过阈时间与归一化阈电平的关系（具有高斯谱密度的高斯低通过滤噪声）

另一个有意思的因子是$\tau_{平}$随阈值变化的性质。由于在方程（3.28）中误差函数的存在，这一点并不能立刻看出来。对于低通滤波的波形，$\tau_{平}$和阈值电平的关系如图3所示。

从这两个图中可以看到，在适当高的阈值下，即使观测区间较小，用正向穿过阈值方法计算的虚警概率也比在同一阈电平下用误差函数方法计算的结果高若干倍。因此，过阈时间比噪声过程的观测区间或相关时间小几倍。

显然，这两种理论预示了虚警随阈电平变化的不同规律。对于连续波（而不是采样波）的检测，实际测量已证明了，正向穿越概率的方法是正确的。测量结果就是图2中所画的圆

点。它们和用正向穿越阈值方法所算出的性能正好相符。值得指出，在零阈电平或平均电平时，每秒穿过阈值的平均数为

$$N_c=\frac{\omega_0}{4\pi}=\frac{f_0}{2}$$

这似乎是估计高斯滤波器截止频率的新方法。一般来说，N_c和截止频率间的关系取决于滤波器响应的形状，但这通常是可以算出来的。

2．窄带噪声

在大多数雷达和声纳系统中，信号和噪声都是由天线阵接收的，在检测之前通过射频和中频放大器。中频放大器的输出端的噪声具有高的中心频率和比较窄的频带。我们将在这里考虑包络解调的情况，其中噪声或信号加噪声的包络波形将用于作出判决。我们知道，包络的概率密度函数是瑞利分布的，即：

$$P(R)=\frac{R}{\sigma^2}\ exp\left[-\frac{R^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.34}$$

在连续波判决系统中，虚警概率就是在给定的观测区间内正向穿过阈值的概率。我们将用上一节中使用的类似方法来推导这一结果和每一次穿过阈值时的平均过阈时间。然后，将这种方法算出的虚警概率与老方法计算的结果进行比较，后者是根据概率密度函数 $P(R)$ 在阈值上的面积来计算虚警概率的。

首先，我们必须求出包络和包络的时间微商的联合概率密度函数，并计算：

$$\int_0^\infty R'P(R,\ R',\ t)dR' \tag{3.35}$$

待求的概率密度函数$P(R,\ R',t)$可以从两个独立的随机变量和它们的时间微商的联合四阶高斯分布得到：

$$P(R,R')=\frac{R}{\sqrt{N2\pi\phi'(0)\ |M|^{1/2}}}\ exp\left[-\frac{R^2}{2\phi(0)}\right]\ exp\left[-\frac{R'^2\phi(0)}{2|M|^{1/2}}\right] \tag{3.36}$$*

其中$|M|=[\phi(0)\phi''(0)-\phi'(0)^2]^2$。

在时间Δt内，包络R正向穿过阈值的概率是

$$P(^+c)=\Delta t\int_0^\infty R'P(R,R')dR'$$

$$=\Delta t\int_0^\infty R'exp\left[-\frac{R'^2\phi(0)}{2|M|^{1/2}}\right]dR'\ \frac{R}{\sqrt{2\pi\phi(0)|M|^{1/2}}}\ exp\left[-\frac{R^2}{2\phi(0)}\right]$$

$$=\frac{R|M|^{1/4}\Delta t}{\phi(0)\sqrt{2\pi\phi(0)}}\ exp\left[-\frac{R^2}{2\phi(0)}\right] \tag{3.37}$$

---

* 此式原文有误。—译注

在某一阈电平k，

$$P(^{+}c)=\frac{k}{\sqrt{\phi(0)}}\left[\frac{M}{\phi(0)^4}\right]^{1/4}exp\left[\frac{-k^2}{2\phi(0)}\right]\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.38}$$

对于一个频率响应对中频的中心频率对称的滤波器来说，包络函数的自相关函数的一次时间微商在$t=0$时等于0，即

$$\phi'(0)=0$$

因此，$|M|=\phi(0)^2\phi''(0)^2$

以及

$$P(^{+}c)=\frac{k}{\sqrt{\phi(0)}}\left[\frac{|\phi''(0)|}{\phi(0)}\right]^{1/2}exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right]\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.39}$$

我们将仅限于考虑对称滤波器的情况。

在采样波形的判决系统中，虚警概率正好包括概率密度函数在阈电平k之上的面积：

$$FAP=\int_k^\infty\frac{R}{\phi(0)}exp\left[-\frac{R^2}{2\phi(0)}\right]dR=exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right] \tag{3.40}$$

平均过阈时间正好是这二者的商：

$$\tau_{平}=\frac{\int_k^\infty P(R)dR\Delta T}{\int_0^\infty R'P(R,R')dR'\Delta t}=\frac{\sqrt{2\pi\phi(0)}}{k}\cdot\left[\frac{\phi(0)}{|\phi''(0)|}\right]^{1/2} \tag{3.41}$$

对于在中心频率f_c两侧具有高斯形状响应的滤波器，上面的关系式成为：

$$F(\omega)=exp\left[-\left(\frac{\omega-\omega_c}{\omega_o}\right)^2\right]\quad\omega_c\gg\omega_o$$

$$P(^{+}c)=\frac{\Delta T}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{k}{\sqrt{\phi(0)}}\cdot\frac{\omega_o}{2}exp\left[-\frac{k^2}{2\phi(0)}\right],\quad\phi(0)=\sigma^2$$

$$\omega_o\tau_{平}=\frac{2\sqrt{2\pi\phi(0)}}{k} \tag{3.42}$$

每一次穿越的平均过阈时间随阈电平的变化如图 4 所示。虚警概率与阈电平的关系示于图5。用正向穿越阈值方法计算的虚警概率曲线选用了两种不同观测区间。上面的曲线：$\Delta T=2/\omega_0$；下面的曲线：$\Delta T=2.78/\omega_0$。这同上面高斯分布的低通滤波情况所用的观测区间是一样的。值得指出，这个理论所预示的差异和前一节的结果是类似的，在那里所提的解释和问题同样适用于这里。

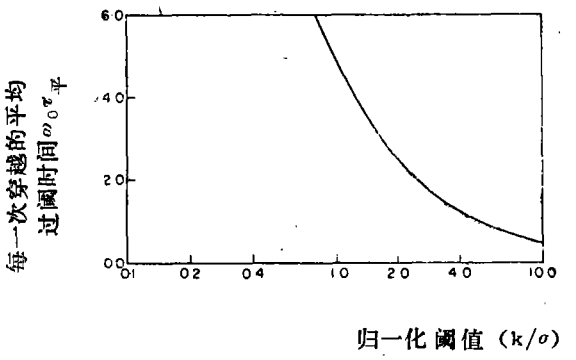


图4　每一次穿越的归一化平均过阈时间与归一化阈电平的关系（高斯功率谱密度、包络解调的窄带噪声）

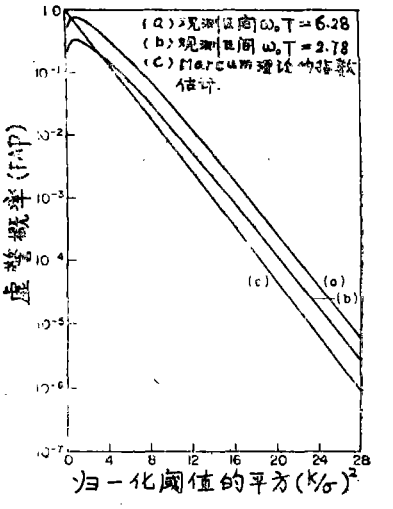


图5　在窄带噪声包络解调的情况下，虚警概率随归一化阈电平平方的变化（具有高斯功率谱密度）

四、检　测　概　率

上一节中我们已指出，过去20年来沿用的估计雷达或声纳系统的虚警性能的方法在某些情况下会产生误差。这些情况之一是连续波的判决系统，比如平面位置显示（PPI）、“A”式扫描显示和某些计算机化的判决系统。现在把上一节的方法应用于信号与噪声同时存在的情况，并作出新老两种理论之间的比较。

在信号出现的情况下，应用正向穿过阈值的概率的概念，要求有一个与物理情况相适应的新模型。本节将从对一些模型的简单讨论开始。这些模型是用于确定信号出现时的检测概率的。在低通滤波噪声的情况下，一个等于滤波信号峰值电平的电压对于噪声概率密度函数的影响可以看作是均值的简单的非时变改变。那么，与计算虚警概率的方法相似，检测概率就是信号加噪声的分布在阈电平之上的面积。除了它能给出足够精确的结果的情况外，看来这一方法对于采样的或连续波的判决都不能认为是合理的。它的最严重的缺陷是没有考虑信号的时变性。而这一点可能是重要的，因为经过匹配过滤器的信号波形与滤波器输出噪声的自相关函数是一样的（假定输入到滤波器的噪声是白色的）。

类似的方法还用于信号和噪声通过窄带高频滤波器的情况。信号考虑作一个正弦波，它的幅度与匹配滤波器的输出端的峰值信号相对应。等幅正弦波的出现将对包络的概率分布作一定的修正。新的分布是：

$$P(R)=\frac{R}{\phi(0)}I_0\left[\frac{RA}{\phi(0)}\right]exp\left[-\frac{(R^2+A^2)}{2\phi(0)}\right]$$

这里A是信号幅度，I_0是修正的零阶第一类贝塞尔函数。新的分布在阈电平之上的面积就作为对于信号幅度A的检测概率。信号的时间变化在这里也被忽略了。因此，没有理由认为这

一模型是合理的（除了它导致合理结果的情况之外）。

在根据正向穿越阈值的概率的理论引出新的模型的时候，首先必须考虑信号对噪声过程的幅度和一次时间微商的联合概率密度的影响。噪声的波形可以用泰勒级数展开来表示：

$$f(t+\tau)=f(t)+f'(t)\tau+f''(t)\frac{\tau^2}{2!}+\cdots\cdots+f^{(n)}(t)\frac{\tau^n}{n!}+\cdots\cdots$$

信号的波形可类似地表示为：

$$s(t+\tau)=s(t)+s'(t)\tau+s''(t)\cdot\frac{\tau^2}{2!}+\cdots\cdots+s^{(n)}(t)\cdot\frac{\tau^n}{n!}+\cdots\cdots$$

在判决设备之前的放大器和滤波器可以看作是线性的，因此，叠加原理成立。换句话说，信号加噪声的波形可以表示为：

$$s(t+\tau)+f(t+\tau)=(s(t)+f(t))+(s'(t)+f'(t))\tau+(s''(t)+f''(t))\frac{\tau^2}{2!}+\cdots \quad (4.1)$$

在以下的全部讨论中，关于信号出现的先验知识是重要的，因为要回答的问题是："当已知信号出现时，检测概率是多少？"换言之，信号$s(t)$总是在某个t值出现而噪声却是随机的。我们实际考虑的是这样一个随机波形的集合，在其每一个样本中都有信号存在。从这一段说明可以看到，信号波形把一个时变的均值加到随机波形的幅度分布和它的一次导数的分布上去。这适用于低通和带通的两种情况，只不过对于后者需用四个变量去代替两个变量。这一节，我们仅考虑低通滤波器的情况，因为带通情况的计算是很困难的。

当有信号出现时，正向穿过阈值的概率仍然可以用方程（3.8）所给出的关系式来计算，但必须注意现在的概率是和时间有关的。信号和噪声的幅度和它们的一次时间导数的联合二阶概率分布可以立刻根据（3.18）写出来：

$$P(x,x'\,|s(t),t)=\frac{[-\phi(0)\phi''(0)]^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}\,exp\left\{-\frac{[x-s(t)]^2}{2\phi(0)}+\frac{[x'-s'(t)]^2}{2\phi''(0)}\right\} \quad (4.2)$$

这里自相关函数和它的一阶导数在零时刻的值都只和噪声过程有关。把$P(x,x'|\,s(t),\,t)$代入方程（3.8）可以得到，在时刻t的一个小的增量Δt内正向穿过阈值的概率为：

$$P(+c,t)\Delta t=\Delta t\int_0^\infty x'\,exp\left\{\frac{[x'-s'(t)]^2}{2\phi''(0)}\right\}dx'\,\frac{[-\phi(0)\phi''(0)]^{-1/2}}{2\pi}\cdot$$

$$exp\left\{-\frac{[k-s(t)]^2}{2\phi(0)}\right\} \quad (4.3)$$

令$y=x'-s'(t)$，积分可以写成：

$$I=\int_{-s'(t)}^{\infty}[y+s'(t)]exp\left[\frac{y^2}{2\phi''(0)}\right]dy$$

由于自相关函数必须在$t=0$有一最大值，又由于它是时间的偶函数，所以自相关函数在$t=0$

的二次导数总是负的，将I积分后得：

$$I=-\phi''(0)exp\left[\frac{s'(t)^2}{2\phi''(0)}\right]+s'(t)\ \frac{\left[-\pi\phi''(0)\right]^{1/2}}{2}\times$$

$$\times\left\{1+erf\left[s'(t)/\sqrt{-2\phi''(0)}\right]\right\}$$

因此，在时刻t，正向穿过阈值的概率密度是：

$$P(^{+}c,t)=I\ \frac{\left[-\phi(0)\phi''(0)\right]^{-1/2}}{2\pi}\ exp\left\{-\frac{\left[k-s(t)\right]^2}{2\phi(0)}\right\}\qquad(4.4)$$

这显然是一个复杂的函数，因此很难在直观上看出它随阈电平k、时间、信号形状或信号峰值对噪声均方根值的比值等而变化的性能。为了得到这些性能的一些概念，我们对各种阈电平、信号峰值对噪声均方根值的比值及时间等情况下的性能进行了数值计算。低通滤波器的选取同上一节一样。换言之，其频响是：

$$F(\omega)=exp\left[-\omega^2/\omega_0^2\right]$$

信号和低通滤波器的响应是匹配的。于是，滤波器输出端的信号是和噪声的自相关函数一样的：

$$s(t)=Aexp\left[-\frac{\omega_0^2t^2}{8}\right]$$

数值分析的一些结果示于图6及图7。为了方便起见，每一个图的下面还附有信号波形图。

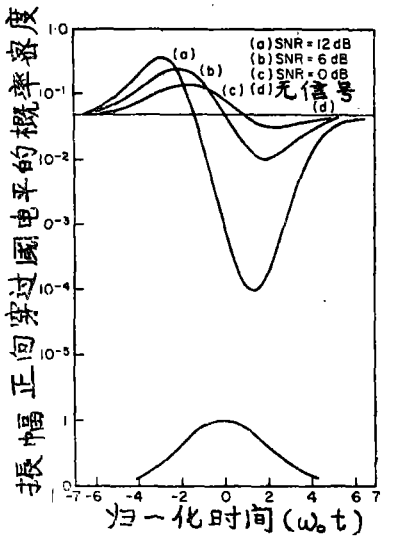


图6　各种信噪比下，信号正向穿过阈电平的概率密度对归一化时间的关系（阈电平＝0.990）

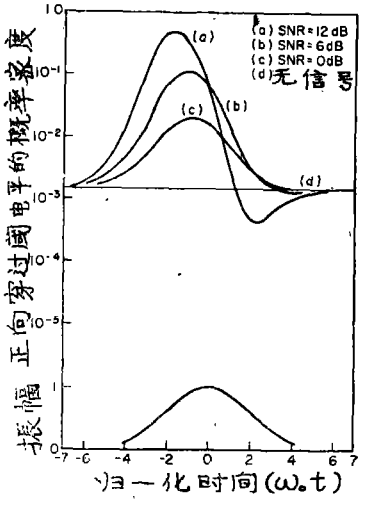


图7　各种信噪比下，正向穿过阈值电平的概率密度对归一化时间的关系（阈电平＝2.890）

正象我们所看到的，这些曲线的一般特性是类似的，它也许可以从过程的物理探讨中预先想到。脉冲的上升边缘使得幅度和它的一次导数的概率密度提升，所以正向穿越阈值更加可能了。当一次穿越最有可能发生以后，穿越概率在信噪比很高时下降很快，而在信噪比较低时下降就不那么陡。正向穿过阈值的概率密度的谷点是和信号脉冲下降边缘相对应的。此时，负向穿过阈值的可能性更大了。

现在可以把检测概率定义作当信号出现时脉冲在阈值以上的概率。这也就是当信号出现时正向穿过阈值的概率。换言之，它就是正向穿过阈值的概率密度曲线在所选取的那一部份下面的面积：

$$POD=\int_{T_1}^{T_2}\int_0^{\infty} x' P[x,x',s(t),s'(t)]dx'dt \tag{4.5}$$

这里存在时间积分所需要的上下限T_1、T_2的选取问题。目前还找不到一般的解。

对于某些信噪比和阈电平，用一个任选的观测区间（T_1，T_2），通过数值分析可以得到检测概率的某些解。检测概率计算结果的一个例子见图8，它可以看作是接收机工作特性（ROC）曲线。还有一条类似的曲线是用Marcum理论在同样的阈值下计算得到的。此外，还有某些实验结果。实验结果看起来是有利于所提出的模型的。无论如何，它和Marcum模型之间的性能差别仅为0.7分贝。如果选取不同的阈电平，使得每一模型预估的虚警概率相等，那么这种差别将下降到大约0.3分贝左右。除了信号出现时脉冲在阈值以上出现的概率较大这一点以外，还可以根据波形在阈值以上的过渡时间来进一步判断该脉冲是虚警或是信号。首先，求出信号出现时的平均过阈时间$\tau_{平}$是有用的。这可以象上一节那样，用时间T内总的过阈时间除以此时间内穿过阈值的次数得到。由于在雷达和声纳的接收波形中，信号是偶然出现的，所以我们必须把观测限于有信号出现的区间。换句话说，我们必须求出观测区间中平均来说是在阈电平之上渡过的那一部份时间。这就不能考虑一次穿越发生的概率了。信号加噪声在任一时刻的幅度概率密度函数是：

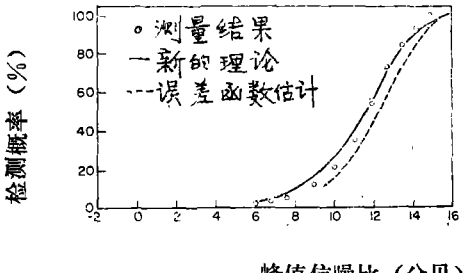


图8　检测概率对峰值信噪比的关系（虚警概率$=10^{-4}$，阈电平$=4.20$）

$$P(x|s(t),t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi(0)}}\exp\left\{-\frac{[x-s(t)]^2}{2\phi(0)}\right\} \tag{4.6}$$

那么，对一个特定的信号幅度，在时刻t，信号加噪声的波形在阈值以上的概率是：

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\phi(0)}}\int_k^{\infty}\exp\left\{-\frac{[x-s(t)]^2}{2\phi(0)}\right\}dx$$

在观测区间T_1至T_2（它覆盖了信号幅度的显著的变化），掠过阈值以上的时间部份是：

$$\tau_{平}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\phi(0)}}\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\int_k^{\infty}\exp\left\{-\frac{[x-s(t)]^2}{2\phi(0)}\right\}dxdt}{\displaystyle\int_{T_1}^{T_2}\int_0^{\infty}x'\exp\left\{\frac{[x'-s'(t)]^2}{2\phi''(0)}\right\}dx'\,\frac{[-\phi(0)\phi''(0)]^{-1/2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{[k-s(t)]^2}{2\phi(0)}\right\}dt} \tag{4.7}$$

这是一个困难的积分。通过数值分析可以得到任意观测区间T_1至T_2的某些结果。这些时间的选取是使得当信号加噪声出现时，它包括了正向穿过阈值的概率密度依时间变化的特性的主要部份。图9所画的就是以信号幅度为参数的平均过阈时间与阈电平的关系。信号的形状仍是高斯的，并且假定信号和噪声都是通过了正确的匹配滤波器的。如果我们要用每次穿越时的平均过阈时间作为检测的参数，我们显然必须选取合适的阈值或观测区间或这二者，使得信号加噪声与只有噪声情况之间的“差别”最大。

“差别”这个词用到这儿是含糊的，因为有很多参数可用来表征信号与噪声的差别。例如，在判决阈设备的输入端信号出现时的$\tau_{平}(\tau_{avs})$与仅有噪声出现时的$\tau_{平}(\tau_{avn})$之比就可以是这样的一个参数。这个比值以信号幅度为参数的一组曲线示于图10中。如果积累或检测方案是基于各自的过阈时间从噪声中提取信号的，那么使这个比值极大化就是重要的*。注意到下面一点是有趣的，即对于小的信噪比，使过阈时间比最大的阈电平近似地等于噪声的

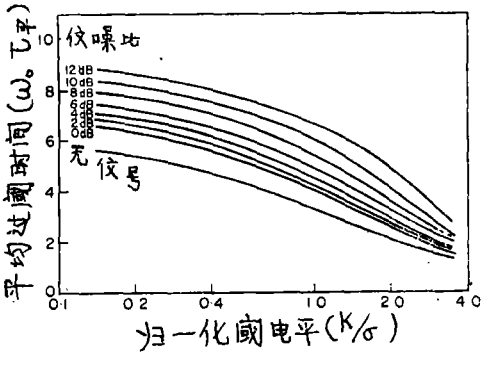


图9　以信号峰值与噪声均方根值之比为参数的归一化平均过阈时间和归一化阈电平的关系

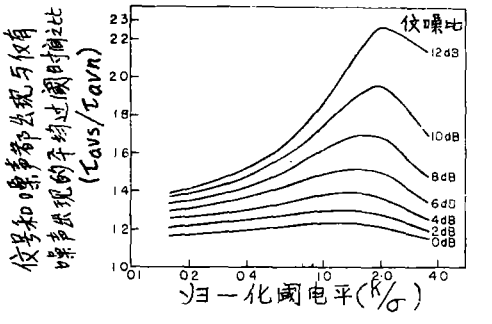


图10　平均过阈时间比与归一化阈电平的关系(以信号峰值与噪声均方根值之比为参数)

均方根值。这和Harrington[8]提出的二进制方案中的最佳一级阈值是非常相似的。两个阈值（幅度和时间）的使用，对于检测概率与虚警概率的计算，都需要有关信号及噪声的过阈时间的分布的知识。这些分布即使用Rice[9]的近似法（它已推广到适用于信号出现的情况）似乎也是非常难于得到的。不过，这些分布我们已经得到了（限于篇幅不能细谈）。当虚警率固定时，对于各种时间和幅度阈值所得到的检测概率和在同一虚警率下仅用幅度阈值所得到的结果没有太大的差别，这并不是意外的结果，因为这样一种判决模型的幅度和时间响应从直观上来看应有高度的相关性。

五、观　测　区　间

另一个看来是值得最佳化的参数（特别是单脉冲检测的情况）是在固定虚警率下的检测概率。使这个参数最佳化是可能的，因为当阈电平已选定后，可以通过选择观测区间达到预

---

*一个更好的最优化参数可能是有效“信噪”比$\frac{\tau_{avs}-\tau_{avn}}{\sigma_s\sigma_n}$，这里$\sigma_s\cdot\sigma_n$是和穿越时间的分布有关的方差的几何平均。从另外的工作中可以知道方差大致是和均值成正比的，因此，τ_{avs}/τ_{avn}也是一个有用的度量。

定的虚警率。因此，对于一个给定的虚警概率，就有无穷多个合适的阈电平和观测区间。很难想象，当信号出现时，它们会导致同样的检测概率。计算机计算的决定最佳观测区间的某些结果示于图11。这些结果指出，虚警概率越小，要求阈电平越高、观测区间越短。当虚警概率在10^{-6}数量级时，最佳的观测区间近似满足这样的关系式，在此关系式里，中频带宽与脉冲长度（在这里就是观测区间）的乘积近似等于1：$\omega_0(T_2-T_1)=\omega_0\tau_{最佳}=2.5$。对于高得多的虚警率，比如$10^{-1}$，最佳观测区间也长得多——典型的数值是上述数字的两倍。还有一个有趣的现象就是，一旦达到最佳观测区间后，观测区间再增加也不会严重影响检测概率，即使为保持虚警概率而增加阈电平也是如此。

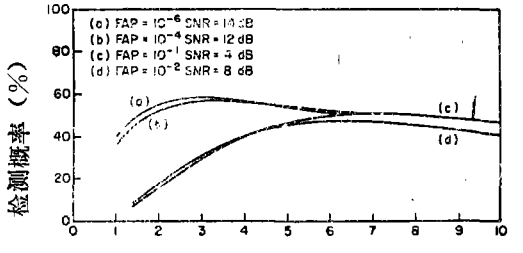


图11　检测概率随观测区间的变化

虽然从数学上来讲最佳观测区间是存在的，但我不相信使这个参数最佳化有什么实际的意义。看来，观测区间的实用的定义可以用下面的方法作出。比如说，在观测包含100个分辨单元的噪声时，允许的虚警概率是10^{-5}（相应于每一单元10^{-7}）。假定目标只出现在某一单元，那么多大的目标信噪比可使穿过阈电平的概率达到，比如说0.9。于是，观测区间是和100个分辨单元相对应的，而在“最佳”情况下所需要的额外目标强度却表示了我们对目标位置的先验知识的缺乏[2]。看来，这一概念对于数字处理系统也可能是适用的，在这里，单元结构由距离和方位门构成。

六、小　结

我们已经评述了在雷达和声纳系统中计算检测性能的不同方法。我们所提出的模型考虑了信号的时变特性，用来在基带信号和噪声的假定下求出接收机的工作特性。

这一方法包含了根据正向穿越阈值进行判决的概念。显然，这一方法还可以推广到处理常用的窄带情况，虽然其计算要复杂得多。这些可能只有学术上的意义，因为在所考虑的情况中，两种方法所得到的检测性能仅有微小的差别。

参 考 文 献

1. Marcum, J.I.(1960)RAND Researh Memo. RM-754, 1947, 12, 发表于IRE Trans. IT-6
2. Helstrom, C. W. (1968) “Statistical Theory of Signal Detection”. 2nd Edition.
3. Rice, S.O. (1945) “Mathematical Analysis of Random Noise”. B.S.T.J. 24 Sec. 3.
4. Kac, M. (1943) “On the Distribution of Values of Trignometic Sums With Linearly Independent Frequencies”. Amer.Jour.Math.65, 609-615.
5. Sholnik, M.I(1962) “Introduction to Radar Systems” .McGraw-Hill, N.Y.
6. Middleton, D. (1960) “Intrdbuction to Statistical Communication Theory”, McGraw-Hill, N.Y.

7. Lawson, J.L.and Uhlengec k, G.E.(1965) "Threshold Signals", Dover 1965.
8. Harrington, J, V.(1955) "An Analysis of the Detection of Repeated Signals in Noise by Binary Integration." IRE Trans.IT-1, 1-9.
9. Rice, S.O.(1958) "Distribution of the Duration of Fades in Radio Transmission Gaussian Noise Model", B.S.T.J.37, 581-635.

討　　論

R.R.Rojas：看起来，在给定的判决过程的公式中，只要正确掌握就确实沒有问题了。如果我们得到一个采样的表达式，又用正确的统计进行数学演算，事情会怎么样呢？

答：在使用最大似然比的理论公式中，采样是处理的固有部份。据我所知，还沒有一个判决理论是处理严格的连续波的情况的。

R.R.Rojas：根据图示，噪声穿越阈值的线性化的形式是区间ΔT。假定数值ΔT固定，那么还得考虑过程ΔT到达阈值附近时的概率。这是一种有条件的情况。

答：这将帮助我们进一步往下走，因为ΔT的结果是重要的。在正常的情况下，它表示扫过我们要决定是否有一个或几个目标出现的监视面积的时间。在仅有噪声的情况，积分（3.7）不依赖于时间，而ΔT正好是乘数。该积分表示一级平均，于是带宽的限制就不重要了。

S.S.Wolf：过阈理论是由S.O.Rice提出的*。

答：我认为是M.Katz开始了阈值的工作，本文给出了参考文献。

P.M.Schultheiss：我不明白你的虚警的定义和Marcum的有什么差别。

答：我们在全部时间内观察一个阈设备的输出端，在该设备中不采样。在仅有噪声的时间，一旦阈设备的输出由“0”状态变到“1”状态，就表示虚警发生了。

P.M.Schultheiss：你的虚警定义指的是至少穿过一次阈值的概率。

答：是的。

H.Cox：由于你的曲线和Marcum的曲线之间的类似性，人们怀疑，存在着一种调整方法，可使二者一致起来。不知道这是否和以标准方法计算虚警概率时所用的独立采样数有关。

答：可能是这样的。

N.C.Prior：在进行类似实验的时候，正象你所作的，我发现必须区分虚警概率与虚警率。依我的想法，后者在运用上更重要。奇怪的是，对于序贯检测器，在给定的虚警概率下，允许有某种自由度去选取虚警率。因此，这是序贯检测器和简单的单阈检测器之间的一个有趣的差别。

S.S.Wolf：Marcum的工作所涉及的信号处理方式，完全不同于平面位置显示。它是一种逐段（batch）处理方式。每一段数据的观测时间为T。在这段时间的结尾将匹配滤波器的输出去同一个阈值比较。对于描述雷达中常用的处理，你所用的模型当然是较好的和较实用的。因此，我们可以期望，你的计算结果会比 Marcum 的更加接近实际雷达系统的模拟实验结果。我想，本质的区别在于逐段处理方式和不间断的/连续的时间处理方式之间的不同。

（李启虎译　黄曾旸校）

* 此处作了删节。——译者