

最优参数估计的时空处理

W.J.Bangs 和 P.M.Schultheiss

(美国 William and Mary 学院, 耶鲁大学)

一、引言

近年来,象在被动声纳基阵中出现的那类检测随机时空信号的问题已引起人们极大的注意。最佳检测器的结构和性能已经确定,并且已经和那些从实现观点来看引人注目的次最佳设计进行了比较。本文讨论信号处理问题中的第二阶段,即和方位角以及距离这样的参数有关的信息的提取问题。

从最一般的观点来看,检测和参数估计没有本质上的差别。我们可以把它们都看作是参数估计问题。如果我们对目标定向感兴趣,那么我们要估计的是从 0 至 2π 连续变化的参数。如果我们对检测感兴趣,那么我们要估计的是一个二进制参数(目标出现或不出现)。另一方面,我们又可以把它们都看作是判决问题。检测是古典的双择判决问题。方位角的确定是重重的两种可能的选择之间的一种判决。这种观点立刻引起实际的重要差异:基本的统计理论指出⁽¹⁾,对于双择判决问题总有一个充分统计量(似然比);而对于多重双择问题,一般来说没有充分统计量(或者一致最强检测)。因此,参数估计的过程总有一个在检测中不出现的任意元素。“最佳检测器”是一种已很好定义的结构。实际应用时,它也许太复杂,但是在原则上它是能够实现的,并且可以作为一种实际设备与之进行比较的现实的标准。“最佳方位角估计”的概念很不好定义,即使我们在非常特殊的意义下(比如“最小均方误差”)解释“最佳”也是如此。在参数估计问题中,对于可能的性能设置一个绝对的上界(不一定必须能实现的),并且把这个上界拿来与那些满足各种实际或解析理由需要的现实设备的性能进行比较,这经常是可能的。在以下几节的讨论中我们将反映这种双重的方法。

二、检测理论的回顾

按照以上所作的说明,毫不奇怪,检测和参数估计的数据处理过程有许多共同之处。由于这个原因,我们发现,以回顾最佳检测理论的一些著名结果作开始是有益的。

我们的信号是由一个源(在现在的情况就是船)自然产生的噪声。一般来说,信号将同时含有相干分量(比如机械噪声)和非相干分量(比如流体噪声)。我们假定信号和噪声都是具有已知谱特性的高斯随机过程。这一假定仅仅对相干信号分量才面临严重的问题,甚至在这种情况下这个假定也是可以接受的,除非信号分量的频率稳定性极强而传播条件又近乎完善。我们进一步还假定信号和噪声是统计独立的。

在检测理论的基本结果中，我们感兴趣的结果如下。

(1) 最佳检测器形成似然比

$$L.R. = \frac{P(\mathbf{x} | \text{信号出现})}{P(\mathbf{x} | \text{信号不出现})} \quad (1)$$

其中 \mathbf{x} 是所接收的数据向量， $P(\mathbf{x} | \cdot)$ 是在所指假设下 \mathbf{x} 的条件概率密度。

(2) 似然比或者它的任何单调函数对于检测来说是充分统计量。对高斯统计量适用的单调函数是二次型：

$$Y_0 = -\mathbf{x}^*[(P+Q)^{-1} - Q^{-1}]\mathbf{x} \quad (2)$$

P ， Q 分别是信号和噪声的协方差矩阵， \mathbf{x}^* 是向量 \mathbf{x} 的共轭转置。

(3) 如果与信号和噪声的相关时间以及声音通过基阵的时间相比较，观测时间很长，那么 \mathbf{x} 按 Fourier 系数的表达式可使 P 矩阵和 Q 矩阵成为方块对角线形式（仅依赖于空间的维数）。此外，若信号的波阵面是相干的（点目标）， P_k 秩为1， Y_0 可写成

$$Y_0 = \sum_k h_k |V_k^* Q_k^{-1} \mathbf{x}_k|^2 \quad (3)$$

下标 k 指的是频率为 ω_k 的第 k 个 Fourier 系数。 Q_k 是归一化的，所以它的对角线元素为1。

\mathbf{v}_k 是“定向向量”：

$$\mathbf{v}_k^* = \exp(-i\omega_k \tau_1), \dots, \exp(-i\omega_k \tau_M) \quad (4)$$

τ_1, \dots, τ_M 是把 M 个接收器的输出端的信号分量对齐所需要的延时。 h_k 是由下式给出的频率滤波器（Eckart 滤波器）：

$$h_k = \frac{S(\omega_k)/N^2(\omega_k)}{1 + G(\omega_k) \frac{S(\omega_k)}{N(\omega_k)}} \quad (5)$$

在等式(5)中， $S(\omega)$ 和 $N(\omega)$ 表示接收器近旁任何一点的信号和噪声的功率谱。 $G(\omega)$ 是“基阵增益”，形式地给定为

$$G(\omega_k) = \mathbf{v}_k^* Q_k^{-1} \mathbf{v}_k = \text{Tr}(P_k Q_k^{-1}) \quad (6)$$

$\text{Tr}(\cdot)$ 表示括号内量的迹。

(4) 等式(3)确定了最佳检测器的结构。本质上它是由 $V_k^* Q_k^{-1}$ 确定的空间滤波运算及频率滤波运算 h_k 构成的。用

$$\mathbf{v}_k \equiv V_k \mathbf{1} = \begin{bmatrix} e^{i\omega_k \tau_1} & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{-i\omega_k \tau_M} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

可以得到一个方便的等价的形式。于是定向矩阵 V_k 和列向量 $\mathbf{1}$ 一起替换了定向向量 \mathbf{v}_k 。最佳检测器的结构就是图1所示的形式。

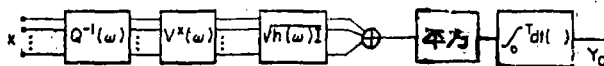


图 1

时间积分已经代替了频率求和 (Parseval定理), 同时频率滤波运算 h 由于引入矩阵滤波器 $\sqrt{h}I$ (I 是单位矩阵), 被移到处处理系统的矩阵部份。

(5) 我们注意到当 $Q(\omega)=I$, 亦即噪声是空间不相干的时候, 图1就简化为具有Eckart滤波器的普通求和与平方检测器。

三、最大似然估计, 一般理论

一种被广泛采用的“好的”参数估计系统选取这样的 θ , 它使得“似然函数” $P(\mathbf{x}|\theta)$ 取极大值。由于计算上的理由, 通常宁愿采用 $\ln P(\)$ 。因此我们要找出

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(\mathbf{x}|\theta) = 0 \quad (8)$$

的解。在用方程(8)时存在着两个明显的问题:

(a) 也许有好多解, 它们不一定是极大值。

(b) 除了最简单的情况之外, 找不出可以明显表达出来的解。

实际上这些问题中的哪一个也不象初看起来那样严重。关于(a), 当信噪比足够大, 使得能够作有意义的参数估计时, 起作用的不确定性通常被局限于一个足够窄的范围内, 以致在此范围内方程(8)只有一个解。关于(b), 构造似然泛函

$$y(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(\mathbf{x}|\theta) \quad (9)$$

是简单的事情。一个简单的零值寻找(反馈)系统就能够决定最大似然估计 θ_{ML} 。

当观测时间比 \mathbf{x} 的相关时间长很多时, $y(\theta)$ (看作是 θ 的函数)将近似为一高斯随机过程。所以有可能将 θ_{ML} 的统计量和 y 的统计量联系起来。其中的两种特定情况是:

$$\theta_{ML} = \theta_0 - \frac{\overline{y_0}}{\partial \overline{y_0} / \partial \theta_0} \quad (10)$$

和
$$D^2(\theta_{ML}) = \frac{D^2(y)}{(\partial \overline{y_0} / \partial \theta_0)^2} \quad (11)$$

θ_0 是真正的参数值, 别处的下标0表示在给定的量 $\theta = \theta_0$ 时的值, 上面的横划表示统计平均, $D^2(\)$ 代表方差。

当 \mathbf{x} 的信号和噪声分量是复的高斯过程时, $P(\mathbf{x}|\theta)$ 具有形式

$$P(\mathbf{x}|\theta) = \frac{1}{\text{Det}(\pi k)} \exp(-\mathbf{x}^* k^{-1} \mathbf{x}) \quad (12)$$

这里 $k = P + Q$ (根据第二节中的记号)。

直接的计算导出了似然泛函

$$y(\theta) = \mathbf{x}^* \mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{x} - \text{Tr} \left(\mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} \right) \quad (13)$$

从等式 (13) 以及 \mathbf{x} 的已知统计量, 我们可以计算 y 的统计特性。

$$\bar{y}(\theta) = \text{Tr} \mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} (\mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_0 - \mathbf{I}) \quad (14)$$

以及

$$D^2(y) = \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{k}^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \theta} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{k}_0 \right)^2 \right\} \quad (15)$$

特别是, 当 $\theta = \theta_0$ (有目标的估计)

$$\bar{y}_0 = 0 \quad (16)$$

$$D_0^2(y) = \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{k}_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_0}{\partial \theta_0} \right)^2 \right\} \quad (17)$$

还可以求出

$$\left. \frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} \right|_0 = -\text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{k}_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_0}{\partial \theta_0} \right)^2 \right\} \quad (18)$$

现在可以把等式 (16)–(18) 代入等式 (10) 及 (11), 得到所求的 θ_{ML} 的统计量:

$$\bar{\theta}_{ML} = \theta_0 \quad (19)$$

$$D_0^2(\theta_{ML}) = \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{k}_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}_0}{\partial \theta_0} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (20)$$

等式 (19) 表明, 在我们的假定下最大似然估计是无偏的。

四、Cramèr-Rao下界, 一般理论

对于均方误差, 一个比较简单的下界是由 Cramèr-Rao 不等式^{(2), (3)}给出的。对于无偏估计 $\hat{\theta}$, 它指出

$$D^2(\hat{\theta}) \geq - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p(\mathbf{x} | \theta) \right\}_{\theta = \theta_0}^{-1} \quad (21)$$

从等式 (9)

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p(\mathbf{x} | \theta) = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \theta} \quad (22)$$

于是从等式 (17), (18) 和 (20) 得知, 方程 (21) 的右边等于 $D^2(\theta_{ML})$ 。换句话说, 下界是可以 (用最大似然估计) 实现的。用统计的术语来说就是, 在我们的假定之下最大似然估计是有效的。这并不奇怪, 因为我们要求的 $y(\theta)$ 正态化的条件是一个和大样本量假定相近的条件, 而在这个条件下, 按照古典理论最大似然估计是渐近有效的。

Cramèr-Rao 的界容易被推广到几个参数的联合估计问题上。对于第 i 个参数 θ_i ，我们找到：

$$D^2(\hat{\theta}_i) \geq [J^{-1}]_{ii} \quad (23)$$

这里 J 是以

$$J_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln p(\mathbf{x}|\theta) \quad (24)$$

为元素的 Fisher 信息矩阵。对于两个未知参数的情况，我们找到

$$D^2(\hat{\theta}_i) \geq \frac{1}{1-p_{12}} \left\{ \text{Tr} \left(k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_i} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (25)$$

其中

$$0 \leq p_{12} = \frac{\left[\text{Tr} \left\{ k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_1} k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_2} \right\} \right]^2}{\text{Tr} \left\{ k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_1} \right\}^2 \text{Tr} \left\{ k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_2} \right\}^2} \leq 1 \quad (26)$$

因为 $\left[\text{Tr} \left(k^{-1} \frac{\partial k}{\partial \theta_i} \right)^2 \right]^{-1}$ 是当没有其它未知参数时 $D^2(\hat{\theta}_i)$ 的下界，所以量 $1/(1-p_{12})$

显然度量了由于出现另一个与 θ_i 有关的未知参数所引起的估计的退化。

五、方位角和距离的估计

我们现在把上几节所大略介绍的技术用到目标定位的两个中心问题上去，即方位角和距离的估计。因为方位角和距离都只是通过被接收信号波阵面的基元对基元的延时来影响接收数据的，所以它们可以被一起处理。

分析从方程 (13) 开始。我们记得 $k = P + Q$ ， P 是 θ 的函数而 Q 不是。现在我们把 θ 想象成方位角或距离而不是向量。经过广泛的代数运算之后，我们得到

$$y(\theta) = \sum_k \left\{ h_k \mathbf{x}_k^* Q_k^{-1} V_k i \omega_k T V_k^* Q_k^{-1} \mathbf{x}_k - h_k f_k \frac{\partial G(\omega_k)}{\partial \theta} \right. \\ \left. \cdot \left[\mathbf{1}^* V_k^* Q_k^{-1} \mathbf{x}_k \right]^2 - \frac{\partial G(\omega_k)}{\partial \theta} f_k \right\} \quad (27)$$

这里 $f_k = N(\omega_k) h_k$ ，而 T 是权重矩阵，其元素为

$$t_{ij} = \frac{\partial \tau_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \theta_j}{\partial \theta} \quad (28)$$

余下的符号在 (5)，(6) 及 (7) 中都已定义了。由等式 (27) 所得出的估计系统结构如图 2 所示。为便于讨论，这个图被划分为四个标号为 1—4 的主要方块。我们注意：

- (a) 方块 1 与最佳检测器的相应元素相同 (图 1)。
- (b) 方块 3 和 4 包括了增益因子 $\partial G(\omega)/\partial \theta$ 。如果基阵增益在我们感兴趣的范围内 (局

并在3a中。于是当

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & i=1, \dots, \frac{M}{2}; \quad j = \frac{M}{2} + 1, \dots, M \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (29)$$

图3a就和图3b等价了。从这种观点来看,分裂波束跟踪器是一具有次最佳加权矩阵的简单的最大似然估计系统。

最大似然估计系统的均方误差可以根据等式(20)来运算。对于空间不相干噪声的情况,经过相当麻烦的代数运算之后,我们得到

$$D_0^2(\theta_{ML}) = \sum_k \left\{ S(\omega_k) h_k \omega_k^2 Tr(TT^*) \right\}^{-1} \quad (30)$$

我们注意到,等式(30)对于方位角估计和对于距离估计一样,仍是成立的。

1. 方位角估计

现在我们将上面的结果限定用于方位角估计的情况。为了代数运算简单起见,我们限于考察线阵,用 Z_n 表示第 n 个基元的位置。假定 c 是声速, γ 表示信号相对于基阵轴(Z 轴)的方位角,那么对于方位角估计, T 矩阵的元素是(对于远场源):

$$t_{ij} = \frac{\cos \gamma}{c} (Z_i - Z_j) \quad (31)$$

因此,理想的权重是随着基元之间的距离线性变化的。

现在,有一种简单的方法去计算分裂波束跟踪器的效率。我们已经看到,在长的观测时间的假定下,最大似然估计系统达到Cramér-Rao下界。所以我们仅需用方程(30)去除分裂波束跟踪器的误差^[4]。我们发现,对于两个基元,效率是100%。当基元数增加时,效率就很快地下降到75%的渐近级,方程(31)提供了改善效率的一种简单方法:反束控,权重随着基元对基阵中心的距离线性变化。这种方法仍旧是次最佳的,但是当信噪比超过0分贝时,对任何个数的基元(≥ 2),它的效率超过95%(见图4)。

方程(30)还给出了基阵的几何性质在决定系统性能方面的作用。全部几何性质都包含在因子 $Tr(TT^*)$ 内。如果我们把基阵看作是一个在各基元位置有相等质量的系统,那么就可以把 $Tr(TT^*)$ 和该系统对于某一合适的轴的惯性矩等价起来^[6]。对于与基阵重心处于同一水平面上的目标,惯性矩是基阵围绕重心和目标位置的连线在水平面上的投影。对于线阵来说,这个惯性矩显然在垂射方向最大,而在端射方向为零。最起作用的基元,再次合理地是那些处在离基阵重心和目标连线最远地方的基元。

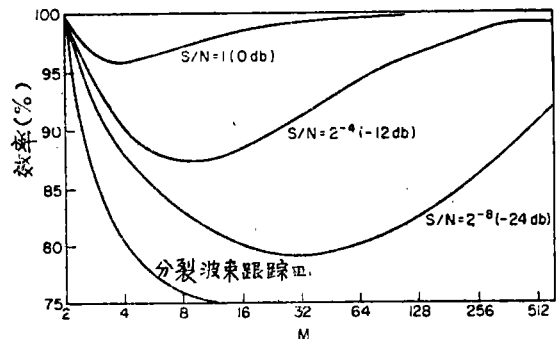


图 4

以上关于方位角估计的结果都是在假定空间不相干噪声场的情形下求得的。分裂波束跟

踪器不是最佳的，但是它的效率是足够高的，所以就沒有有什么实际的重大改善的可能性。当噪声場包含强的空间相干分量时，情况就会非常不同。这种情况的计算会非常冗长，但是一种极端的情况已有详细的分析^[6]：噪声場由强的平面波干扰加上空间不相干噪声组成。我们可以得到以下结果：

(i) 分裂波束跟踪器的性能由于有强干扰而急剧下降。起伏（由干扰功率引起）和在估计中引入的偏离（ $\partial G/\partial \theta \neq 0$ ）都增加了。偏离经常比起伏误差的增加更加严重，甚至当干扰偏离目标方位相对来说比较大时也是这样。

(ii) 假如干扰在方位角上远离目标（远大于波束宽度），那么在分裂波束跟踪器的每一半边用波束零值控制法（null steering）^[6]可以将它比较容易地消除掉。零值控制的分裂波束跟踪器的性能与 Cramèr-Rao 界相近，并且不比工作于无干扰的环境下跟踪器的性能坏很多。根据图 2，零值控制是一种与方块 1 中矩阵滤波器 $Q^{-1}(\omega)$ 密切相关的运算。它同时消除由干扰引起的偏离和起伏误差而使方块 3 及 4 成为不必要。

(iii) 当干扰和目标在方位角上几乎重合的时候，偏离就成为主要问题。零值控制不再是有效的，因为它将信号分量减去太多了。于是一个简单的具有偏离补偿的分裂波束跟踪器（在本质上就是图 2 中的方块 4）能够提供近乎最佳的性能^[6]。

(iv) 只有当目标和干扰分隔开的程度在一个波束宽的数量级时，方块 3 才提供了一些重大改进的可能性。

2. 距离估计

我们仍限于线阵。用于距离估计时， T 矩阵的元素是

$$t_{ij} = -\frac{\cos^2 \gamma}{2cr^2} (Z_i^2 - Z_j^2) \quad (32)$$

在不相干噪声的情况下，我们可以用等式 (30) 去决定距离的最小（实际可达到的）均方误差。特别是，对于长为 L 、有 $M \gg 1$ 个等间隔的基元的基阵，我们得到

$$\{Tr(TT^*)\}^{-1} = \frac{45c^2 r^4}{2L^4 M^2 \cos^4 \gamma} \quad (33)$$

相应的方位角估计的表达式是

$$\{Tr(TT^*)\}^{-1} = \frac{6c^2}{M^2 L^2 \cos^2 \gamma} \quad (34)$$

可见，距离估计明确地依赖于实际距离，而方位角估计则不然（除信噪比与距离的关系之外）。距离估计还比方位角估计更加明确地依赖于基阵的孔径。所有这些从定性上看是合理的，因为距离的测量在某种意义上和三角测量过程一样。

在作距离估计的时候有一个人为的强烈因素——如同我们到目前为止所作的那样——把它看作是一个单一参数问题。一种更加实际的情况就是我们假定距离和方位角都是事先未知的。根据方程 (25)，估计误差的 Cramèr-Rao 的界是单参数的界乘以退化因子 $(1-p_{12})^{-1}$ 。对于不相干噪声的情况，从方程 (26) 得到

$$p_{12} = \frac{\{Tr(T_1 T_2^*)\}^2}{Tr(T_1 T_1^*) Tr(T_2 T_2^*)} \quad (35)$$

其中 T_1 和 T_2 分别是方位角和距离的加权矩阵。把它用到基元等间隔排列的线阵，设 $r \gg L$ ，同时把座标原点选在基阵的一个端点（如同等式（33）那样），我们从等式（35）求出

$$(1-p_{12})^{-1} = \frac{16M^2 - 30M + 11}{M^2 - 4} \quad (36)$$

可见用两个基元的距离估计是不可能的。对于 $M > 2$ ，退化因子在12至16之间。这表明，由于缺乏先验的方位角信息，使距离的精度下降一个数量级，反之亦然。另一方面，如果我们把原点选在基阵的中心，就可知道，当 $M > 2$ 时 $p_{12} = 0$ ，于是距离和方位角的估计就不关联了。

从纯形式的观点来看，对原点的相依关系是由方程（32）引入的。原点的选取对于方程（33）的影响和对于 $(1-p_{12})$ 的影响情况完全相同，说明这一点是一件简单的事。所以未知方位角时距离估计的精度事实上是和原点无关的。另一方面，用于方位角估计而和等式（32）相对应的等式（31）是和原点无关的，所以未知距离的方位角估计是随原点的选取变化的。当原点在基阵中心时最精确。这一结论有一定的直观上的需要：当原点在基阵中心时，波阵面的任何弯曲都以对称的方式影响原点两边的基元的延时。当原点在别处时，不对称的延时将把待估计的方位角和距离估计混杂起来。

六、其他参数

本文的结果可以很快地推广到分开的或联合的许多其它参数的估计问题。计算将是繁复的，并且只是在某种特别感兴趣的特殊的情况下才办得到。其中有环境噪声是由强的平面波干扰加上空间不相干噪声组成的线阵的方位角估计。信号功率、干扰功率以及干扰方位角的各种组合都可以看作是附加的未知参数⁽⁶⁾。很粗略地讲，我们发现这些附加的讨厌参数，当信号和干扰被隔开至少是一个波束宽度时，对于方位角估计的Cramèr-Rao界仅有一点儿影响。当相隔小于一个波束宽度时情况就不同了。这里，有关信号功率的先验知识的缺乏对于方位角的精度相对来说仅有较小的影响。但是，有关干扰功率和干扰方位角的不确定性却会使方位估计误差的下界急剧增加。把这种现象归因为干扰的偏离的影响看来是合理的，当目标与干扰之间的夹角减少到比一个波束宽度小得多的时候这种影响变得非常明显。

用于延伸源的最大似然估计的特殊结果也已经得到。正如我们所期望的，估计的误差密切地依赖于从接收阵看去的目标的弦角。误差的表达式也已经推导出来，但是它们在此讨论起来在代数上就过于复杂了。

参 考 文 献

1. E. L. Lehman. "Testing statistical hypotheses." Ch. 3, Wiley. 1959.
2. C. R. Rao. "Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters." Bull. Calcutta Math. Soc. 37, p. 81. 1945.
3. H. Cramer. "Mathematical methods of statistics." Ch. 32, 1951.
4. V. H. McDonald et al. "Optimum passive bearing estimation in a spatially incoherent noise environment." JASA 46. 1969.

5. W. J. Bangs. "Array processing with generalized beam-formers." Ph. D. Dissertation, Yale Univ., 1971.
6. V. H. McDonald. "Optimum bearing estimation with passive sonar systems." Ph. D. Dissertation. Yale Univ., 1971.

討 論

W. S. Liggett: 我注意到最佳检测器的均方误差在靠近端射波束时会趋向于无穷, 我们不能使它变得好一些嗎?

答: 这个问题是由估计系统的无偏性的实质引起的。在靠近端射波束时, 我们无法用无偏估计系统工作。最好的有偏估计应当使包括偏离误差和方差在内的总的均方误差极小。如果我们使它极小化了, 那么我们会发现最佳的偏离在除了端射波束的大约一个波束宽度内之外几乎都是零。所以, 除了这个区域之外, 无偏估计在本质上是最佳的。

R. B. Gilchrist: 为达到反束控的效果和使得惯性矩最大的一个好方法看来是把接收元分为两组, 使它们尽可能远离线阵的中心。

答: 这确实是个好办法, 唯一的限制是需要保证接收元之间噪声的独立性。

E. A. Killick: 你能否说明一下这类想法在哪些地方可以引出与从比较普通的观点来看不一样的结论?

答: 当然最终这一结论必须受到检验。我们在进行这类分析之后, 深入地了解了最佳处理系统的结构和性能, 看到了用比较直观的方法所达到的这种设备是否能够给以重要的改进, 以及, 真是这样的话, 如何可以得到这种改进。

S. W. Autrey: 有关白噪声的结果可以转用到各向同性噪声的情况嗎?

答: 如果接收元之间的间隔足够小, 以致于噪声的相干性很可观, 那么特殊的计算结果不再成立。但是, 对于各向同性噪声结果的改进将是超指向性的变化, 并且我们知道这种类型的理论性能增益实际上大都趋于虚假。因此, 实际上我预期只有一点儿变化。

R. E. White: 你说最大似然估计的唯一性依赖于信噪比。你能否在信噪比方面给出一个数值的范围, 以便估计唯一性?

答: 我还比较犹豫这样作, 因为这个数依赖于过多的其他参数, 所以从一种情况到另一种情况会有很大的变化。

(李启虎译 朱维庆校)