

# 自适应处理：时变参数

L.W.Nolte

(美国 Duke 大学)

## 一、引 言

在许多信号检测场合，信号是用一组参数（例如振幅、相位、波形）来描述的；而观察者不一定准确地知道这些参数。在本文中，我们讨论信号检测问题，其中允许信号和噪声二者之一或二者的参数以不定的方式随时间而变化。这种时间变量的含义是：假定各参数可以用马尔可夫随机过程来模拟。

处理这类问题的方法有若干种，有一般的和特殊的。让我们简单地讨论两种方法。解决这类问题的一种常用方法是：对每个未知参数作某种估计，并将这些估计值当作是真正的参数值插入似然比表达式中。这种方法的正规型式被称为广义似然比 (generalized likelihood ratio) 原理，并得到了广泛的应用<sup>[1,2]</sup>。然而，Jaarsma 最近的一些研究<sup>[3]</sup>表明：这种假定正确的估计值与应当代入所研究的广义似然比中的那组参数差别很大，这是因为没有充分说明先验知识的缘故。

讨论信号检测的另一个方法是 Bayes 似然比原理。最早清楚地描述把这种判决理论的方法应用于信号处理的是 Peterson, Birdsall 和 Fox 所写的文章<sup>[4]</sup>。Bayes 似然比原理产生于这种推测：在大多数情况下，检测器的设计者关于未知信号的参数，具有一些不是绝对不确定的知识。Bayes 原理指示人们：用  $\theta$  参数组说明这类先验知识，并将其应用到检测器设计中；然后，用概率密度函数  $P(\theta)$  概括这类先验知识。经典 Bayes 原理的基础便是能够这样概括这类知识。让我们再比较仔细地回忆一下广义似然比检验和 Bayes 似然比。我们先讨论后者。Bayes 似然比是：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k) = \int l(\bar{\mathbf{X}}_k | \theta) P(\theta) d\theta \quad (1)$$

假设检验是：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} H_1 \\ H_0 \end{matrix} \gamma \quad (2)$$

其中

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k | \theta) = \frac{P(\bar{\mathbf{X}}_k | \theta, H_1)}{P(\bar{\mathbf{X}}_k | H_0)} \quad (3)$$

是条件目标似然比 (conditional-objective likelihood ratio)， $\bar{\mathbf{X}}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  是矢量观测值， $H_1$  和  $H_0$  分别表示信号加噪声和只有噪声这两种假设。判决阈  $\gamma$  可以确定为误差指标和关于  $H_1$  和  $H_0$  的先验知识的一个函数。用这种方法导出的检测器，在使风险最少、误

差最小方面，或者对于大多数要求正确判决多于错误判决的准则来说，是最佳的。该方法的特点为：信号处理器是非结构的，也即，该检测器的物理形式不需要事先假定，而是可以在最佳准则的限制范围内自由演变的。

经典的广义似然比检验常常是易于用公式表达的并且直观上十分吸引人的检验方法。这种检验方法的一个主要特点是，它明显地把各未知信号参数的估计值结合进来。如果介入的未知参数  $\theta$  的估计值为  $\hat{\theta}^*$ ，则这种检验就是将条件目标似然比与判决阈作比较。广义似然比检验是：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k | \hat{\theta}^*) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \gamma' \quad (4)$$

检测器设计者通过把某估计值  $\hat{\theta}^*$  作为真值，来说明  $\theta$  的不确定性。他常常选择一个大家所熟知的、并且作为估计器来说性能是优良的估计器；然而经常发生这样的事：他所选择的估计器对于实际假设所作出的判决并不怎么准确。

本文将使用的基本方法是Bayes似然比方法。我们将说明如何构造时变参数的最佳检测器，使它类似于用自适应的、序贯的以及广义似然比的方法即估计—插入方法设计的处理器。这一方法已应用于参数是固定的但是未知的几个问题<sup>[3, 5-10]</sup>。它与源于自适应的、序贯的或估计—插入的结构并且希望通过适当调节所含变量以获得最佳检测性能的方法大不相同。

## 二、时变参数的最佳检测器

接下来让我们针对时变参数问题讨论Bayes似然比。然后，我们将该结构演变成两种形式：一种是自适应的，一种是估计—插入结构的。

可能作出的两种判决是： $H_1$ ，即信号加噪声； $H_0$ ，即仅仅有噪声。总观测量  $\bar{\mathbf{X}}_k$  可以分成小的分观测量  $x_k$ ，并且用  $\theta_i^j$  表示在第  $j$  种假设下第  $i$  个区间内的参数值。假定参数值在任一分区内保持为一常数，而从一个区间到另一区间它是变化的。最佳检测器形成的似然比为：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k) = \frac{p(\bar{\mathbf{X}}_k | H_1)}{p(\bar{\mathbf{X}}_k | H_0)} \quad (5)$$

其中  $p(\bar{\mathbf{X}}_k | H_1)$  是在  $H_1$  条件下  $\bar{\mathbf{X}}_k$  的概率密度函数， $p(\bar{\mathbf{X}}_k | H_0)$  是在  $H_0$  条件下  $\bar{\mathbf{X}}_k$  的概率密度函数。因为

$$p(\bar{\mathbf{X}}_k | H_j) = p(\bar{\mathbf{X}}_{k-1} | H_j) p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j); \quad j=0, 1 \quad (6)$$

所以，我们可以依次用下式来实现式(5)：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k) = l(\bar{\mathbf{X}}_{k-1}) l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) = \frac{p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_1)}{p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_0)} \quad (8)$$

\*原文误作  $\theta$ 。—译注

并且

$$l(\bar{\mathbf{X}}_0) = 1 \quad (9)$$

在这种形式下，检测器的设计便成为写出  $l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1})$  的具体形式的问题了。

下面我们考虑在信号假设  $\theta_k^1$  和噪声假设  $\theta_k^0$  下，第  $i$  个区间内时变参数的马尔可夫过程。注意到  $\theta_k^j$  可以是参数的一个矢量。设计检测器所需要的信息可以用函数  $P(\theta_k^j | \theta_{k-1}^j)$  和  $P(\theta_k^j | \bar{\mathbf{X}}_0)$  来概括，其中  $j$  为 1 或 0 取决于假设。我们假定

$$P(\theta_k^j | \theta_{k-1}^j, \dots, \theta_1^j) = P(\theta_k^j | \theta_{k-1}^j)$$

因此， $P(\theta_k^j | \theta_{k-1}^j)$  描述  $\theta_k^j$  对于前一个值  $\theta_{k-1}^j$  的马尔可夫过程的依赖性。概率密度函数  $P(\theta_k^j | \bar{\mathbf{X}}_0)$  归纳了设计者关于参数  $\theta_k^j$  的最初的或者先验的知识。Hatsell 在经过稍长的推导后证明：在双合成假设情况下，序贯或自适应形式的最佳检测器的设计方程式是<sup>[11]</sup>：

用序贯形式表述的似然比：

$$l(\bar{\mathbf{X}}_k) = l(\bar{\mathbf{X}}_{k-1}) l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \quad (10)$$

$$l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) = \frac{P(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_1)}{P(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_0)} \quad (11)$$

$$l(\bar{\mathbf{X}}_0) = 1 \quad (12)$$

其中方程式 (11) 的分子和分母从下面求得：

双合成假设情况下的跟踪检测器设计方程：

$$P(\theta_{k+1}^j | \bar{\mathbf{X}}_k) = \int P(\theta_k^j | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \frac{P(x_k | \theta_k^j)}{P(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j)} P(\theta_{k+1}^j | \theta_k^j) d\theta_k^j \quad (13)$$

$$P(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j) = \int P(x_k | \theta_k^j) P(\theta_k^j | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) d\theta_k^j \quad (14)$$

在单合成假设情况时， $\theta_{k+1}^j = \alpha^j$ ， $\theta_k^j = \beta^j$ ，序贯的或自适应的设计方程式是<sup>[11]</sup>：

单合成假设情况下的跟踪检测器设计方程

$$P(\alpha | \bar{\mathbf{X}}_k) = \int P(\beta | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \frac{l(x_k | \beta)}{l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1})} P(\alpha | \beta) d\beta \quad (15)^*$$

$$l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) = \int l(x_k | \beta) P(\beta | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) d\beta \quad (16)$$

$$l(x_k | \beta) = \frac{P(x_k | \beta, H_1)}{P(x_k | H_0)} \quad (17)$$

$$l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) = \frac{P(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_1)}{P(x_k | H_0)} \quad (18)$$

在噪声背景情况下，检测重复的瞬态现象是个十分令人感兴趣的问题<sup>[5-8, 12]</sup>。为了简化这些问题中的时间不确定性的含义，引进一个指示器参数  $t_k$ ，其中第  $i$  个间隔内的  $t_i$  值由下式确定：

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{当瞬态出现在第 } i \text{ 个间隔时} \\ 0 & \text{当瞬态不出现在第 } i \text{ 个间隔时} \end{cases}$$

\* 原文式中漏印了积分号。——译注

用于时变参数和瞬态出现时间不确定的最佳检测器，其序贯的或自适应的基本设计方程是<sup>(11)</sup>：

含有时间不确定性的跟踪检测器设计方程（用于时间不确定性的通用设计方程）：

$$p(\alpha^j, t_{k+1} | \bar{\mathbf{X}}_k) = \int_{\beta^j} \int_{t_k} p(\beta^j, t_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) \frac{p(x_k | \beta^j, t_k)}{p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j)} \cdot p(\alpha^j, t_{k+1} | \beta^j, t_k) d\beta^j dt_k \quad (19)$$

$$p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j) = \int_{\beta^j} \int_{t_k} p(x_k | \beta^j, t_k) p(\beta^j, t_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) dt_k d\beta^j \quad (20)$$

一种经常出现的、以致可得到一组专用设计方程的情况是：方程组中的指示器参数 $t_i$ 与其它参数无关，并且与 $t_{i-1}$ 也无关；即

$$p(\alpha^j, t_{k+1} | \beta^j, t_k) = p(t_{k+1} | t_k) p(\alpha^j | \beta^j) \quad (21)$$

$$p(\alpha^j, t_{k+1} | \bar{\mathbf{X}}_k) = p(t_{k+1}) p(\alpha^j | \bar{\mathbf{X}}_k) \quad (22)$$

和

$$p(t_{k+1} | t_k) = p(t_{k+1}) \quad (23)$$

将下面的假设用于上述方程：

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} p(t_i) dt_i = \begin{cases} \nu & \text{当 } \xi=1 \\ (1-\nu) & \text{当 } \xi=0 \end{cases} \quad \varepsilon > 0 \quad (24)$$

即产生以下一组设计方程<sup>(11)</sup>：

对于信号占空因子 $\nu$ 的设计方程：

$$p(\alpha^j | \bar{\mathbf{X}}_k) = \int_{\beta^j} \frac{p(x_k | \beta^j)}{p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j)} p(\beta^j | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) p(\alpha^j | \beta^j) d\beta^j \quad (25)$$

$$p(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, H_j) = \int_{\beta^j} p(x_k | \beta^j) p(\beta^j | \bar{\mathbf{X}}_{k-1}) d\beta^j \quad (26)$$

$$p(x_k | \beta^j) = \nu p(x_k | \beta^j, t_k=1) + (1-\nu) p(x_k | \beta^j, t_k=0) \quad (27)$$

注意： $\nu=1$ 意指周期信号， $\nu<1$ 意指同步重复信号。对于后者参数固定且未知的情况，已有几篇文章作了较仔细的讨论<sup>(5-7)</sup>。

上述对于噪声中具有时变参数的信号的最佳检测设计方程组，与自适应结构的方程组是相似的。下面我们来证明：最佳检测器的结构如何演变成一个类似于估计—插入法即广义似然比法的结构。现在讨论单合成假设情况。我们能够写出对数似然比如下：

$$\ln l(\bar{\mathbf{X}}_k) = \ln l(\bar{\mathbf{X}}_{k-1}) + \ln \frac{l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1})}{l(x_k | \beta)} + \ln l(x_k | \beta) \quad (28)$$

利用类似于Jaarsma所用的论证<sup>(3)</sup>，我们注意到，方程式的左侧与参数 $\beta$ 无关，因此方程式右侧必定也与 $\beta$ 无关。对于 $\beta$ ，所适宜的值是满足下式的值：

$$\ln \frac{l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1})}{l(x_k | \beta)} = 0 \quad (29)$$

因为这将提供给我们以所希求的估计一插入结构，而同时保持用于检测的对数似然比的最佳性。用我们的估计值  $\hat{\beta}$  表示  $\beta$  值，用我们的估计器表示式 (29)，并且把估计值  $\hat{\beta}$  插入式 (28) 右边的最后一项中去，于是，这种序贯的估计一插入结构的合成设计方程式即是：

单合成假设情况下，估计一插入结构的跟踪检测器设计方程：

$$\ln l(\bar{\mathbf{X}}_k) = \ln l(\bar{\mathbf{X}}_{k-1}) + \ln l(x_k | \hat{\beta}) \quad (30)$$

其中估计值  $\hat{\beta}$  由求解下式得到：

$$\frac{l(x_k | \bar{\mathbf{X}}_{k-1})}{l(x_k | \hat{\beta})} = 1 \quad (31)$$

图 1 画出了这种处理器结构的方框图。可以看到，通常这种估计器将不是众所周知的估计器。

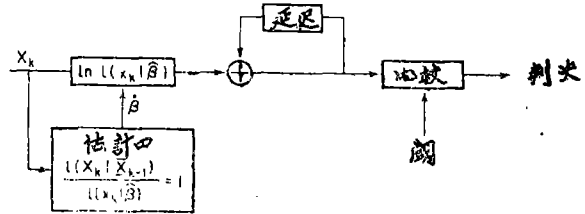


图 1 实现估计一插入法的最佳检测器

引人注意的是：在参数固定但未知的情况下，用于时变参数的最佳检测器，也可以用一种类似于Birdsall证明过的方法<sup>[13]</sup>，公式化为二级处理器。在这个二级处理器方案中，第一级是利用某个比较任意的先验描述函数 (a priori description)  $p_1(\theta_k | \mathbf{X}_0)$  来设计的，该函数不断地再生，并且最初是从数学上简便的观点出发选择出来的。通常第一级包括了处理器的基本部分。然后，以一个相当简便的第二级，来计算所要求的（例如由某种物理条件提出的）先验描述函数  $p_2(\theta_k | \bar{\mathbf{X}}_0)$ ；第二级构成一个相乘性的、对于第一级输出的适时的校正器。这种用于时变参数的二级处理器的详图已由Hatsell作出<sup>[11]</sup>。

### 三、特殊情况下的最佳检测特性

几种自适应和序贯形式的特殊的最佳检测器，同它们的检测性能（接收机工作特性）一起，已被作出<sup>[11]</sup>。文献[11]讨论了时变信号的振幅、相位和波形；文献[14]讨论了时变的噪声功率。另外，也研究了时变噪声功率中同步重复瞬态信号的检测问题。此处，我们仅仅扼要地叙述一下其中的几种情况和几种接收机工作特性。

图 2 画出了对时变幅度信号的最佳检测器的接收机工作特性。假设马尔可夫过渡统计特性为

$$p(\theta_k | \theta_{k-1}) = \frac{1}{2\pi a} \exp \left[ -\frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^2}{2a^2} \right] \quad (32)$$

其中“ $a$ ”是  $\theta_k$  相对于  $\theta_{k-1}$  的离散度。接收机工作特性是当  $S_k/k\sigma_n^2 = 1$ ， $k=10$  时画出的，这里  $S_k$  是在  $k$  观测间隔长度内的平均信号能量， $\sigma_n^2$  是噪声的方差。当下一

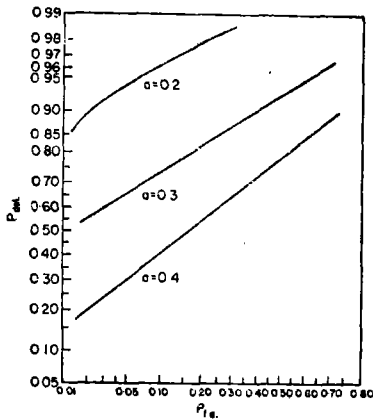


图 2 振幅跟踪检测器的接收机工作特性曲线\*

\*图2,3,4中，横座标  $P_{f.a.}$  为虚警概率，纵座标  $P_{det.}$  为检测概率。——译注

个幅值的离散增加时，检测性能就显著地下降。

图3画出了具有时变波形（8种可能的3比特波形）的同步重复瞬态信号的接收机工作特性。图中的参数A是波形变化速率的量度。A值大，则相应于这一次出现的波形与下一次出现的波形之间变化小；A值小，则相应于波形变化快。当瞬态重复时间不确定时， $\nu=0.2$ 相当于平均瞬态出现时间约为瞬态重复时间的20%。

图4画出了处理时变噪声功率中同步再现瞬态信号的接收机工作特性。参数 $c/\alpha$ 是信号能量的平方根值除以连续观测到的平均噪声值。这里 $k=10$ ， $\nu=0.2$ 。图中画出了几个次最佳处理器的工作特性，作为比较。在处理这个问题的最佳检测器结构中，可以插入具有非线性过渡区的振幅器<sup>[14]</sup>。

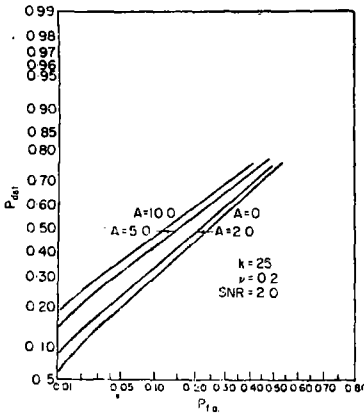


图3 在高斯噪声中，具有时变波形的同步信号的接收机工作特性曲线（信噪比=2）

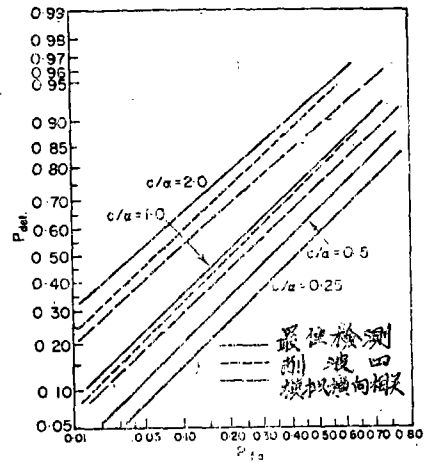


图4 处理时变噪声功率中同步信号的接收机工作特性曲线\*

## 四、总 结

在本文中，我们阐明了：在Bayes似然比的范围内，如何求得对于时变参数的信号和噪声的最佳检测器；并且懂得了：我们可以用自适应的、序贯的或估计-插入的方法构成这些处理器。此种方法既保证了设计上的一致性，又规定了接收机工作特性方面的性能量度。若干例子的详细论述（包括最佳基阵检测的应用<sup>[15]</sup>），可查阅文后列的参考文献。关于几种情形的扼要总结就写到这里。（本项研究由美国海军研究局发起，系声学规划的内容之一。）

（贺邦正译 陈克棠 裘辛方校）

## 参 考 文 献

1. Van Trees, H.L.(1968). "Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part 1", P.92, John Wiley and Sons, Inc., New York.
2. Helstrom, C.W.(1960). "Statistical Theory of Signal Detection", Pergamon Press.

\*图中“最佳检测”应为“最佳检测器”，“模拟横向相关”应为“模拟互相关器”。——校注

3. Jaarsma, D. (1970). "The Theory of Signal Detectability, Bayesian Philosophy, Classical Statistics, and The Composite Hypothesis", Cooley Electronics Laboratory Technical Report №.200, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.
4. Peterson, W.W., Birdsall, T.G. and Fox, W.G. (1954). "The theory of signal detectability", IRE Trans. Inf. Theory PGIT-4, 171—211.
5. Nolte, L.W. (1965). "Adaptive Realizations of Optimum Detectors for Synchronous and Sporadic Recurrent Signals in Noise", Technical Report №163, Cooley Electronics Laboratory, The University of Michigan.
6. Nolte, L.W. (1968). "Adaptive optimum detection; synchronous-recurrent transients." J.A.S.A. 44, №1, 224—239.
7. Nolte, L.W. (1967). "An adaptive realization of the optimum receiver for a sporadically recurrent waveform in noise." IEEE IT-3, №2, 308—311.
8. Fralick, S.C. (1965). "Learning to Recognize Patterns Without a Teacher". Systems Theory Laboratory Technical Report №6103—10, Stanford Electronics Laboratories, Stanford, California.
9. Abramson, N. and Braverman, D. (1962). "Learning to recognize patterns in random environment." IRE IT-8, 58—63.
10. Spooner, R.L. (1969). "The Theory of Signal Detectability; Extension to the Double Composite Hypothesis Situation", Technical Report №196, Cooley Electronics Laboratory, The University of Michigan.
11. Hatsell, C.P. (1970). "Optimum Tracking Detectors", Technical Report №5, Adaptive Signal Detection Laboratory, Dept. of Electrical Engineering, Duke University, U.S.A.
12. Birdsall, T.G. (1964). "Likelihood Ratio and Optimum Adaptive Detection", NATO Advanced Study Institute, Grenoble, France.
13. Birdsall, T.G. (1968). "Adaptive Detection Receivers and Reproducing Densities", NATO Advanced Study Institute, Enschede, Netherlands.
14. Hatsell, C.P. and Nolte, L.W. (1971). "On transient and periodic signal detection in time-varying noise power". IEEE AES-7, №6.
15. Gallop, M.A. (1971). "Adaptive Optimum Array Detectors", Technical Report №7, Adaptive Signal Detection Laboratory, Duke University, U.S.A.