

样条和数值积分在几何声学中的应用

Cleve B. Moler* and Louis P. Solomon†

译自 *J. Acoust. Soc. Amer.* 48, 739—744 (1970)

本文对经过连续分层介质传播的射线理论方法给出两个贡献。其一是给出以样条多项式对声速剖面作平滑近似的方法，其二是消除了常用的距离积分中出现的奇性，从而得到了用于求解各种声传播问题的自动数值程序。

引 言

我们考虑波动方程

$$\partial^2 \varphi / \partial t^2 = c^2 \Delta^2 \varphi \quad (1)$$

其中声速是某一个空间变量的函数，假定为 $c = c(z)$ 。在海洋中声速依赖于压力、温度和盐度，这些量都是随深度而变化的。解决这一水声问题是我们的主要目标，但我们的方法也可同样适用于其它问题。

我们采用几何声学近似，也就是说我们假设 c 随 z 的相对变化与特征频率 ω 相比是小的，具体讲就是 $\delta(dc/dz) \ll \omega$ 。可以证明，由此可导至方程(1)的一个近似解 φ_0 ，实质上它就是严格解按波数的负幂作渐近展开时的“零阶”项^{1,2}。

如用 x 表示径向坐标或距离，则垂直于表示 $\varphi_0 = \text{常数}$ 的曲线族的射线是微分方程

$$dz/dx = \tan\theta \text{ 和 } \cos\theta = Ac(z) \quad (2)$$

的解，其中 A 是表征某一特定射线的常数。这个方程还可用许多方法导出，其中之一是用费马原理。方程(2)的第二部分是 Snell 定律。

这个微分方程原则上是可解的：

$$x - x_s = \pm \int_{z_s}^z \frac{Ac(z) dz}{[1 - A^2 c^2(z)]^{1/2}} \quad (3)$$

对传播时间和声强度可导出类似的表式。然而有两个重要的、实际上的困难。首先，通常由物理测量只能得到在一些特定的点 z_i 上的 $c(z)$ 值，其次，对一给定的 $c(z)$ ，积分也可能不能严格算出。由于当 $Ac(z) \rightarrow 1$ 时积分出现的奇性，数值计算也是困难的。当 $Ac(z) \rightarrow 1$ 时射线达到反转点并被折射，而这种折射在远程传播中是非常重要的，用任何一种计算方法时，都必须精确地处理它。

用以计算 (3) 式的一种简便近似是用直线段连接物理测量数据点 $c_i = c(z_i)$ ，从而可解析地算出积分。这种方法相当于用许多 $dc/dz = \text{常数}$ 的层来对介质作近似。然而正如曾被 Pedersen³ 所指出的，在这些层的分界面上 dc/dz 的不连续性会导致物理上不满意的結果。

许多作者也用过几种更有效的近似，其中大部分 4—6 是采用一些可以用严格形式求解积分的函数来平滑地满足测量数据。由于可被近似的声速剖面类型是有限的，而且凑实测数时的手续很难自动化，因而适应性较差。至少有一位作者曾对此积分作过数值计算，但发现由于积分的奇性，使具有反转射线时的强度计算很不成功。

本文中我们首先讨论用“三次方样条”来作声速剖面近似的方法。即在每一对测量值之间用三次方多项式来连接得到函数 $c(z)$ 。多项式这样来选取，使得 $c(z)$ 包含给定的测量值，并对所有的 z 都存在连续的二阶导数。这样的函数能精确地近似任一真实的声速剖面，并具有满足强度计算所要求的平滑性，而且曲线的选配手续很容易自动化。

然后我们讨论射线路径、传播时间和强度的计算。在计算 (3) 式时的困难主要是由于对某一给定的初始条件，方程 (2) 的解缺少唯一性。我们将方程 (2) 变换为一个具有唯一性解的二阶微分方程，这个方程和描述其它量的类似方程都可用广泛采用的标准化计算机子程序来作数值求解。

1. 声速剖面的近似

我们假设在有限个点上 $c(z)$ 的值从物理测量已知为 $c_i = c(z_i)$ ， $i = 0, 1, \dots, n$ ，实际上可能只有少至 4—5 个或多至几十个数据点。我们希望用一种完全自动的方法求得一个能包含这些数据点的平滑函数。我们这样来取点，使 $z_0 < z_1 < \dots < z_n$ 。

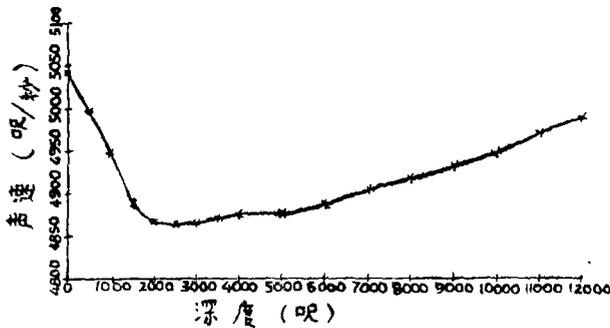


图 1 声速随深度的变化

三次方样条是一个定义于整个区间 $z_0 \leq z \leq z_n$ 的函数 $c(z)$ ，在每一个子区间（“层”） $z_{i-1} \leq z \leq z_i$ 内 $c(z)$ 是 z 的三次方多项式。其系数随区间而变，但 $c(z_i) = c_i$ 和 $c''(z)$ 是连续的。比直接计算这些系数更好的是采用一种既更简单、数值又更精确的表达式：

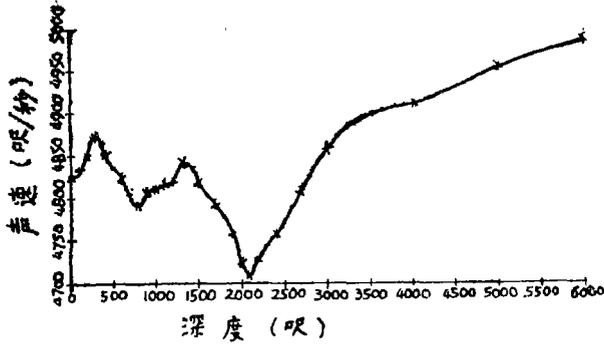


图2 声速随深度的变化

令

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

$$\Delta c_i = (c_i - c_{i-1}) / \Delta z_i \quad i = 1, \dots, n$$

对 $z_{i-1} \leq z \leq z_i$, 令 $w = (z - z_{i-1}) / \Delta z_i$,

$$\bar{w} = 1 - w$$

$$及 c(z) = \bar{w} c_{i-1} + w c_i + (\Delta z_i)^2 [a_{i-1} (\bar{w}^3 - \bar{w}) + a_i (w^3 - w)] \quad (4)$$

其中 a_i 尚待确定。注意到因 w 是在 0 到 1 之间取值而 \bar{w} 是在 1 到 0 之间取值, 所以 (4) 式中前两项表示简单直线连接, 而第三项是用于得到连续的一阶和二阶导数的三次方修正项。这种直至二阶为连续的导数是必须的, 因为影响强度计算的就是声速的二阶导数^{3,5}。我们看到

$$c'(z) = \Delta c_i + \Delta z_i [-a_{i-1} (3\bar{w}^2 - 1) + a_i (3w^2 - 1)] \quad (5)$$

$$c''(z) = 6(\bar{w} a_{i-1} + w a_i) \quad (6)$$

为了确定 a_i , 我们要求点 z_i 两边的 $c'(z)$ 的表示在 $z = z_i$ 处有相同的数值。这导致

$$\Delta z_i a_{i-1} + 2(\Delta z_i + \Delta z_{i+1}) + \Delta z_{i+1} a_{i+1} = \Delta c_{i+1} - \Delta c_i \quad (7)$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

比较合理的是令 $a_0 = a_n = 0$, 这相当于在数据区间外面 $c(z)$ 以线性函数外延, 其余 $n-1$ 个未知量 a_1, \dots, a_{n-1} 可由 $n-1$ 个联立的线性方程 (7) 式确定。这些方程是“三对角线”型的, 特别易于求解⁸, 而且对任一组数据, 它们只要求解一次。算出了 a_i 后, 可按 (4) 式很快地算出任意 z 处声速 $c(z)$ 的近似值, 且其导数 $c'(z)$ 就可以从 (5) 式求得。

在图 1 和图 2 中给出了这种样条函数的例子, 两个都是用的典型的声速测量数据。注意到这些测量不一定要在等间隔深度上进行。样条比其它函数表示式优越之处在于它利用了所有的数据点并求得了为确定任何一点的函数值所需要的那些常数。而其它一些表式如双曲余弦或 Epstein 剖面只有固定个数的常数, 必须用某些方法选择这些常数才能使所假设的函数与给定的数据之间得到按某种误差判据来说的“最佳逼近”。

2. 计算射线路径

现在我们有平滑的声速剖面 $c(z)$ ，并可以算出任一点 z 处的 $c(z)$ 和 $dc/dz = c'(z)$ 由此即可转向求解方程 (2) 和计算 (3) 式的问题。函数 $z(x) = \text{常数}$ 是方程 (2) 对某一初始条件的解，这些所谓奇解是非常数解的包络⁹。从物理上说，它们表示在所有时间都保持为水平的射线。方程 (2) 的数值解或 (3) 式的数值计算在靠近这些解时必然是不正确的。为了得到正确的、不会导致奇解的计算其它射线路径的自动程序，我们必须清除它们¹⁰。

我们将方程 (2) 的第二部分对 z 求微商而将第一部分对 x 求微商，这就给出

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} &= - \frac{Ac'(z)}{\sin\theta} \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= \sec^2\theta \left(\frac{d\theta}{dz} \right) \frac{dz}{dx} \\ &= - \sec^2\theta \left[\frac{Ac'(z)}{\sin\theta} \right] \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= - \frac{Ac'(z)}{\cos^3\theta} \end{aligned}$$

仅当 $\sin\theta \neq 0$ 时才可约去 $\sin\theta$ ，但对水平射线 $\sin\theta$ 都为零，因而这些射线就不满足最后的这个式子。而对其它射线虽在反转点处 $\sin\theta = 0$ ，但可由取极限方法而约去。

一个简单的例子可以澄清我们上面的方法。微分方程

$$(dz/dx)^2 = 1 - z^2$$

具有通解 $z = \sin(x + \alpha)$ ，但它也有两个奇解 $z = 1$ 和 $z = -1$ 。两边对 x 求微商并除以 $2 dz/dx$ 得到

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -z$$

这个方程不仅是我们所熟悉的而且是很容易用数值方法求解的。微商导致第二个解族，但原始方程被用来求得附加的初始条件。

用方程 (2) 和方程 (8) 的最后一式，我们得到下面的二阶常微分方程，以作为我们计算射线路径的基本工具：

$$d^2z/dz^2 = -c'(z)/A^2c^3(z) \quad (9)$$

初始条件可由源的位置 x_s 、 z_s 及源处射线的出射角 θ_s 给出：

$$\begin{aligned} z(x_s) &= z_s \\ \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x_s} &= \tan\theta_s \\ A &= \cos\theta_s/c(z_s) \end{aligned} \quad (10)$$

图 3 是从图 1 中的样条剖面得到的射线图的一个例子，它是用数值求解方程 (9)，并附以 (10) 式的初始条件而得到的，其中取 $z_s = 2000$ 呎， θ_s 从 -10° ，变到 10° 以 2.5° 为一步距。 0° 的射线如用 (3) 式的距离积分来算由于它的奇性是不可能算的，现在就很容易计算了。

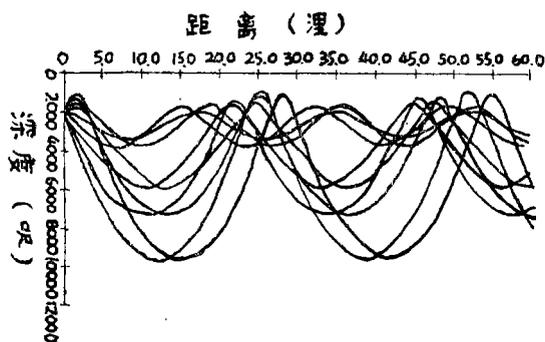


图3 一般射线路径

象图3这样的射线图通常还不是所要求的最后结果，在实际中提出的典型问题包含已知的接收器的位置和假设的源的位置。因为问题具有双向对称性，必须求出通过源和接收器两者的射线，这可由标准的“打靶”法来完成。方程(9)和(10)仍然是计算的基础，有规则地改变初始角 θ_s 直到找到靠近接收器通过的射线，然后用内插手段求得所要求的射线。重复这一过程，直至在给定束宽内的能到达接收点的所有射线都被求出为止。

图4给出了用这种方法得到的结果的一个例子。源位于2000呎深处，接收器位于3000呎深处，水平距离是24哩，速度剖面由图1给出。有5条射线可到达接收器，其初始角列于表I的第一列。

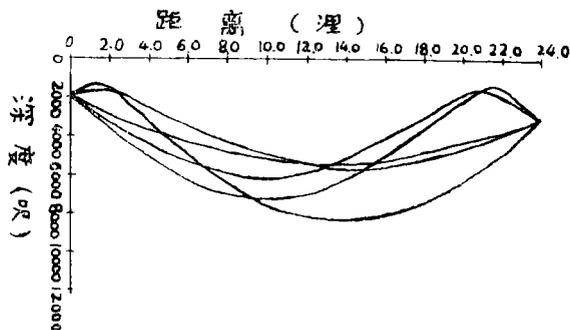


图4 问题的射线路径解

3. 传播时间和强度

声线本身是不能由实验观察的，可以实际观测和理论预计的两个量是不同射线的到达时间和从源到接收点之间的传播损失。传播时间和强度都直接依赖于射线路径。

传播时间可直接由声速的定义求得：

$$\frac{ds}{dt} = c(z)$$

其中 s 是沿路径的弧长。因为

$$ds/dx = [1 + (dz/dx)^2]^{1/2} = \sec\theta$$

我们得到

$$dz/dx = \sec\theta/c(z)$$

或 $dt/ds = 1/Ac^2(z)$ (11)

其中 $z = z(x)$ 是方程(9)的解。

表 I 问题的解

射线	θ_s (度)	t (秒)	I/I_0
1	7.2622	29.9854	0.5497×10^{-10}
2	5.4073	29.9913	0.1128×10^{-9}
3	3.7549	29.9473	0.2609×10^{-10}
4	-4.1867	29.9547	0.4908×10^{-10}
5	-8.3520	29.9348	0.3813×10^{-9}

在计算强度时假设强度的变化仅由扩展损失所引起。这样，两相邻射线间发射的全部功率都保留在这两条射线之内，这导致 $t = \lim(\Delta \text{功率} / \Delta \text{截面积})$ 可以看到强度之比正比于截面积之比¹¹。参考图5，我们看到

$$\frac{I(x)}{I_0} = \frac{\cos\theta_s^*}{x \cos\theta} \frac{1}{\partial z / \partial \theta_s} \quad (12)$$

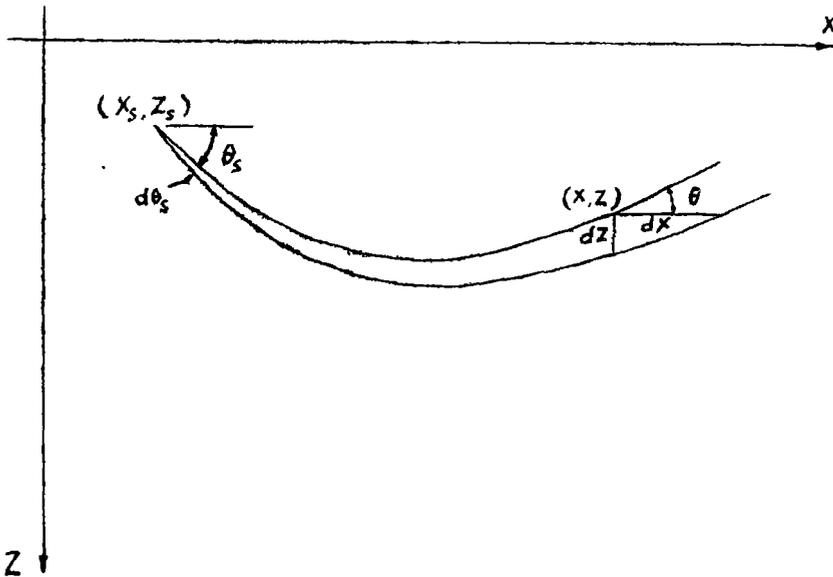


图5 射线几何

* 原文误为 $\sin\theta_s$

由于射线路径的解析解是不知道的，所以 (12) 式中的导数不可能解析地计算。因而必须用近似表式来代替 (12) 式，

$$\frac{I(x)}{I_0} \approx \frac{\cos\theta_s^*}{x \cos\theta \Delta z / \Delta\theta_s} \quad (13)$$

其中 $\Delta\theta_s$ 通常取得较小，比如 0.01° ， Δz 是在给定的距离 x 上得到的深度改变量。这就要求对每一 θ_s 值算出两条射线，它们的初始角是 θ_s 和 $\theta_s + \Delta\theta_s$ 。可以看出，对足够小的数值，强度对 $\Delta\theta_s$ 的选取是不敏感的。

为了计算的目的，将每一条射线的二阶微分方程化为一对一阶方程。这两对方程加上表示沿一条射线的传播时间的方程 (11) 中的一个，组成一个可同时进行积分的 5 个一阶常微分方程的组。

用 (13) 式可以计算任一射线的强度，为了得到在一特定点上的总强度，必须把通过该点的所有射线的强度合并起来。相位差使强度有很强的频率关系，因而在这里引入频率看来是适当的，虽然这在计算射线路径时被略去了。对给定的频率 f ，强度将是

$$I / I_0 = \left| \sum_k p_k e^{i2\pi f t_k} \right|^2 = \sum_j \sum_k p_j p_k \cos[2\pi f(t_j - t_k)] \quad (14) **$$

其中 $p_k = (I_k(x) / I_0)^{\frac{1}{2}}$ 和 t_k 是单条射线的相对声压和到达时间。（应指出 (14) 式略去了在焦散面发生的相移¹²⁾。

继续前面导出图 4 的那个例子，相应的强度和到达时间列于表 I。从这个表我们发现，时间差在 10 毫秒至 50 毫秒之间，在实用中我们感兴趣的频率是 100 赫—10 千赫，因此实际用 (14) 式时包括要计算 $\cos(500\varphi)$ ， φ 在 0 和 2π 之间。这样一种计算将具有很大的不确定性以致实际上失去意义。因而在强度计算中也忽略掉相位差和频率关系。通常就用所有射线的强度之和作为总强度的一种粗略近似。

4. 与 Epstein 剖面的比较

也许 Epstein 剖面是解析剖面中最具灵活性的一种了⁶⁾，它已被直接用来模拟海洋并被 Pedersen 和 Gordon¹³⁾ 间接地用作为以数值方法检验和比较其它剖面的“标准”。为检验我们自己的方法，我们也进行了与 Pedersen 和 Gordon 同样类型的数值试验（他们的报告¹³⁾ 下面表为 PG）。

Epstein 剖面是一个包含双曲正切函数和 5 个自由参数的解析表达式。利用在 PG 中给出的参数值，我们计算了表达式的值，深度从 0 到 126 码，以 9 码为增量。这就给出在表 I 中的 15 个数据点。然后直接从表 I 计算样条剖面，没有用 Epstein 剖面的导数和其它信息。

* 原文误为 $\sin\theta_s$

** 原文此式中漏掉平方

表 I 声速数据 (Epstein剖面)

Z (码)	$c(z)$ (码/秒)
0.0	1626.3631
9.0	1624.1103
18.0	1621.6269
27.0	1618.9714
36.0	1616.2325
45.0	1613.5239
54.0	1610.9721
63.0	1608.7011
72.0	1606.8108
81.0	1605.3638
90.0	1604.3732
99.0	1603.8094
108.0	1603.6081
117.0	1603.6861
126.0	1603.9580

我们用 θ_s 或参数 A 来表征某一射线。PG用了参数 c_m ，它是在反转点处的声速，从(2)式我们有

$$c_m = c(z) / \cos \theta_s = 1/A$$

在PG中求解的射线问题包含固定的源和接收器深度而距离是变化的，对每一参数值计算射线第一次达到接收器深度时的距离，其结果表示为距离对 c_m 的函数图。我们仅用表I中的数据也解决了同样的问题，假设源和接收器深度都是108码。我们的结果画在图6上。与PG中的图3相比说明在图的精度范围内两种结果没有差别。

图6上的曲线有3个局部极值： $c_m = 1603.96$, $x = 1.8539$; $c_m = 1608.80$, $x = 1.7566$ 和 $c_m = 1626.36$, $x = 2.3233$ ，前两个极值表示在焦散面上的反转点，在这些点上 $\partial x / \partial \theta_s$ 为

零，因而 $\partial z / \partial \theta_s$ 也为零，第三个相应于表面反射射线，即具有 $c_m = 1626.36$ 码/秒的射线恰好在表面上反转。

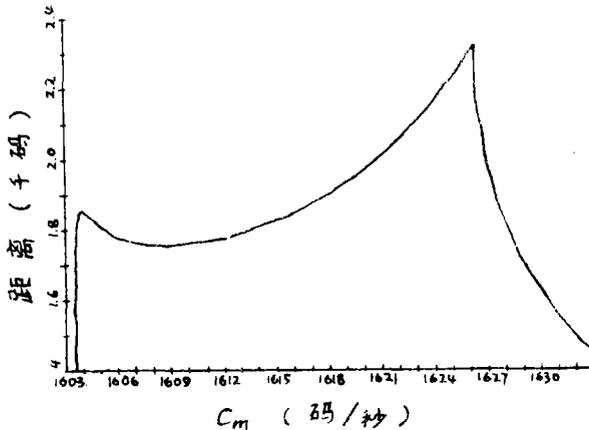


图6 距离与射线参数的关系

从图6可以看出,任一深为108码的接收器,当距离 x 处在区间 $1.7566 < x < 1.8539$ 中时至少可被4条射线所射中,其中有3条在低于表面的深度上反转一次,第4条在表面上反射。当 x 接近于这个区间的端点时,单条射线的强度理论上变为无限大,因此在这个地方强度计算将特别敏感和困难。

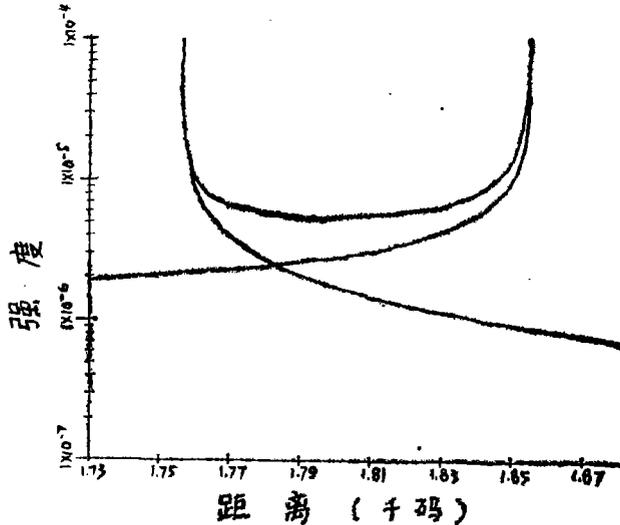


图7 强度随距离的变化

图7中我们详细描绘了在这个麻烦区域中作为距离的函数的射线强度图,这可与在PG中几个图形里的任一个相比较。

PG报告的主要目的是与平滑的 *Epstein* 剖面相比较而说明不同的近似剖面的设置对强度计算的影响。用我们的图7直接与由 *Epstein* 剖面给出的强度计算相比较再次说明它们之间没有可区分的差别。我们认为这就清楚地说明用样条来平滑化比 *Pedersen* 和 *Gordon* 所研究的方法好。当然,这无论如何不是对他们的结果的批评,因为他们的主要目的是说明平滑化的必要性,而我们的贡献就是简单地提供了一种计算“足够平滑”的剖面的方法。

在 *Pedersen* 最近的一篇报告¹⁴中,介绍了一种相当复杂的曲线—吻合方法,可以达到与我们的图7相比拟的精度。

5. 计算的细节情况

本文中的所有计算都是在IBM360/67机上完成的,图形由—*Calcomp* 描图器作出。计算程序有三个主要子程序,一个子程序用来读取速度数据并计算样条系数,然后计算在任一深度上的样条及其导数。第二个子程序用“打靶法”来解微分方程边值问题,其主要工具是一个对初值问题的图书馆预报—校正子程序和一个通用的求零程序。第三个子程序用作在其它程序、描图系统以及电传打字机用户之间的联接。

计算程序是不复杂的, 包括微分方程求解但不包括描图系统需要小于400个FORTRAN语句。解决象得到图4和表I的这样一个问题仅需要一分钟或两倍于在电传打字机上花费的时间, 其代价小于10美元(密执安大学非商业性的费用)。

6. 结论

许多作者都指出需要平滑剖面, 利用样条可提供必要的平滑性和适应性, 并且易于自动化。在距离积分中奇性的影响以前还没有被清楚地指出过, 不希望的解的消除提高了正确性并更易于计算。

我们的结果与用Epstein剖面及其它标准剖面得到的结果相比更为优越, 而且, 我们的方法具有比我们所知的任何剖面更大的适应性。例如像图2所表示的速度曲线就是实际中可能遇到的, 但它却不可能适当地用任一其它平滑剖面来近似。

参 考 文 献

* *DeP. of Mathematics.*

+ *DeP. of Mechanical Engineering. Present address: Tetra Tech., Inc., 1911 Fort Myer Drive, Arlington, Va. 222009*

1. L. P. Solomon, "Geometrical Acoustics With Frequency Dependence," *J. A. S. A.* 44, 1115—1120(1963).

2. R. K. Luneberg, *Mathematical Theory of Optics* (Univ. of Calif. Press, Berkeley, 1964)。

3. M. A. Pedersen, "Acoustic Intensity Anomalies Introduced by Constant Velocity Gradients," *J. A. S. A.* 33, 465—474 (1961).

4. L. P. Solomon, D. K. Y. Ai, and G. Haven, "Acoustic Propagation in a Continuously Refracting Medium," *J. A. S. A.* 44, 1121—1129 (1968).

5. K. R. Stewart, "Ray Acoustic Model of the Ocean Using a Depth/Sound-Speed Profile With a Continuous First Derivative," *J. A. S. A.* 38, 339—347 (1965)

6. M. A. Pedersen and Dewayne White, "Ray Theory of the General Epstein Profile," *J. A. S. A.* 44, 765—787 (1968).

7. M. K. Miller, "Calculation of Horizontal Ranges and Sound Intensities by use of Numerical Integration Techniques," *J. A. S. A.* 44, 1690—1698 (1968)

8. G. E. Forsythe and C. B. Moler, *Computer Solution of Linear*

Algebraic Systems (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967).

9. W. Kaplan *Ordinary Differential Equations* (Addison Wesley Reading, Pa., 1958)

10. C. B. Moley and L. P. Solomon, "Integrating Square Roots" *Comm. Assoc. Comput. Mach.* (to be published).

11. I. Tolstoy and C. S. Clay, *Ocean Acoustics, Theory and Experiment in Underwater Sound* (McCraw-Hill, New York, 1966), P.57.

12. A. Silbiger, "Phase Shift at Caustics and Turning Points," *J. A. S. A.* 44, 653—654(1967).

13. M. A. Pedersen and D. F. Gordon, "comparison of Curvilinear and Linear Profile Approximation in the Calculation of Underwater Sound Intensities By Ray Theory," *J. Acoust. Soc. Amer.* 419/-438 (1967).

14. M. A. Pedersen, "Ray Theory Applied to a Wide Class of Velocity Functions," *J. Acoust. Soc. Amer.* 43, 619-634 (1968).

吴承义译、裘辛方、金国亮校