

平面波在随机介质中 任意点之间的场相关函数

M. M. Fitelson

引 言

场的相干函数，就是在没有受扰动的波阵面上各点之间场的相关，当前向散射占优势时，已就平面波^[1]和柱面波^[2]的情况作了计算，本文计算空间任意位置上，各点之间场的相关函数。

假设单频平面波传播于折射率为均匀、各向同性高斯场的介质中。使用坦坦尔斯基方法^[1]，求得了在远程传播条件下场相关函数的方程式。我们还求得并给出在这样的场中线阵指向性的数值结果。

I、场的相关函数

假设平面波在 $x = 0$ 处进入随机介质，在此正的 x 轴是传播方向。波动方程式为：

$$\Delta^2 \varphi(\vec{r}, t) = \frac{[1 + \mu(\vec{r})]^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

式中 $\mu(\vec{r})$ 是统计上均匀、各向同性、平均值为 0 的高斯场。设 μ 远小于 1，则

$$(1 + \mu)^2 \approx 1 + 2\mu \quad (2a)$$

为了简便起见，设

$$E[\mu(\vec{r}) \mu(\vec{r}')] = c(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \overline{\mu^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{a^2}\right) \quad (2b)$$

式中 a 是折射率的相关半径。

请注意，对折射率的上述选取仅仅是为了简便，因为下面所建立的方法能应用于任何各向同性和均匀的相关函数。

鉴于上述假设， ψ 是

$$\psi(\vec{r}, t) = b(x, \vec{\rho}) a^{-i(kx - \omega t)} \quad (3)$$

式中

$$\vec{\rho} = (y, z) \quad (4)$$

把 (3) 式代入 (1) 式，得到：

$$2ik \frac{\partial b}{\partial x} + \Delta b + 2\mu k^2 b = - \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

$$b(0, \vec{\rho}) = 1$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5)$$

$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$ 项给方程式(5)的解贡献反向散射。相干函数 b 的定义为,

$$\Gamma(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = E[b(x, \vec{\rho}_2) b^*(x, \vec{\rho}_1)] \quad (6)$$

坦坦尔斯基求得了在计算相干函数时 $\frac{a^2 b}{ax^2}$ 可以忽略的条件。把 $c(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ 取成 $(2b)$

形式, 由坦坦尔斯基方程式^[1]求得,

$$\Gamma(x, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) = \exp\{-\sqrt{\pi} \mu^2 k^2 a x [1 - \exp(-|\vec{\rho}|^2/a^2)]\}$$

$$\vec{\rho} \equiv \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1 \quad (7)$$

在此假设:

$$\frac{\pi^{3/2}}{3} (\mu^2 x)^3 k^4 a \ll 1$$

$$\pi (\mu^2 k x)^2 \ll 1 \quad (8)$$

对于大气和海洋中的典型参量来说, (8)式允许 x 延伸到很远的距离上。

为了计算:

$$\gamma(x_1, \vec{\rho}_1, x_2, \vec{\rho}_2) \equiv E[b(x_1, \vec{\rho}_1) b^*(x_2, \vec{\rho}_2)] \quad (9)$$

假设在条件(8)或类似的条件下可以忽略 $\frac{a^2 b}{ax^2}$ 项。于是, b 满足:

$$2ik \frac{\partial b(x, \vec{\rho})}{\partial x} + \Delta b(x, \vec{\rho}) + 2k^2 \mu(x, \vec{\rho}) b(x, \vec{\rho}) = 0 \quad (10)$$

在作进一步推算之前, 最好先讨论一下某些相当重要的关系式。

首先, 因为假定 x 远大于 a , 所以同 x 的尺寸相比, $\exp[-(x-x')^2/a^2]$ 是一个很陡峭的函数。这表示如果 $\exp[-(x-x')^2/a^2]$ 出现在经过 x 或 x' 的积分号下, 可以写成:

$$\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{a^2}\right] \simeq \sqrt{\pi} a \delta(x-x') \quad (11)$$

同样:

$$c(|\vec{r} - \vec{r}'|) \simeq \sqrt{\pi} a \delta(x-x') \exp\left(-\frac{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^2}{a^2}\right) \quad (12)$$

对坦坦尔斯基^[1]使用过的一个任意的 $c(|\vec{r} - \vec{r}'|)$,

$$c(|\vec{r} - \vec{r}'|) \simeq \delta(x-x') \int_{-\infty}^{\infty} dx c(|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (13)$$

而言 (12) 式是近似的一种特殊情况。

其次, 方程式 (10) 有形式解:

$$b(x, \vec{\rho}) = \exp\left[\frac{ix}{2k} \cdot \Delta + ik \int_0^x \mu(x', \vec{\rho}) dx'\right] \quad (14)$$

在此, (14) 式右端的指数表示式是一个算符, 一起作用在右边。这表示 $b(x, \vec{\rho})$ 是由 $x' \in [0, x]$ 构成的 $\mu(x', \vec{\rho})$ 的泛函。结合 (13) 式和 μ 是高斯场的假定, 这就使坦坦尔斯基^[1]求得了 $E[\mu(x_2, \vec{\rho}_2) b(x_1, \vec{\rho}_1) b^*(x_2, \vec{\rho}_2)]$ 的表示式。

用上述 $c(|r - r'|)$ 的近似式, 得到:

$$\begin{aligned} E[\mu(x_2, \vec{\rho}_2) b(x_1, \vec{\rho}_1) b^*(x_2, \vec{\rho}_2)] \\ = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mu^2 k a \gamma(x_1, \vec{\rho}_1; x_2, \vec{\rho}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式是下面计算 γ 所必需的。

取 (10) 式的复共轭,

$$-2ik \frac{\partial b^*(x_2, \vec{\rho}_2)}{\partial x_2} + \Delta_2 b^*(x_2, \vec{\rho}_2) + 2k^2 \mu(x_2, \vec{\rho}_2) b^*(x_2, \vec{\rho}_2) = 0 \quad (16)$$

用 $b(x_1, \vec{\rho}_1) (x_2 > x_1)$ 乘 (16) 式, 求得数学期望并使用 (15) 式, 得到,

$$\frac{\partial \gamma(x_1, \vec{\rho}_1; x_2, \vec{\rho}_2)}{\partial x_2} = \frac{i}{2k} \Delta_2 \gamma(x_1, \vec{\rho}_1; x_2, \vec{\rho}_2) - \frac{\beta}{2} \gamma(x_1, \vec{\rho}_1; x_2, \vec{\rho}_2) \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \\ \beta &= \sqrt{\pi} \mu^2 k^2 a \end{aligned} \quad (18)$$

方程 (17) 的解为:

$$\begin{aligned} r(x_1, \vec{\rho}_1; x_2, \vec{\rho}_2) &= \exp\left\{-\left[\frac{i(x_2 - x_1)}{k} \left(\frac{\Delta_2}{2} - \frac{ik\beta}{2}\right)\right]\right\} \cdot \Gamma(x_1, \vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2) \\ &= \exp\left[-\frac{\beta}{2}(x_1 + x_2)\right] \exp\left[-\frac{i(x_2 - x_1)}{2k} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left\{\beta x_1 \exp\left[-\frac{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{a^2}\right]\right\} = \exp(-\beta x) \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{i\delta}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\right] \exp\left\{\beta x_1 \left[-\frac{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{a^2}\right]\right\} \end{aligned} \quad (19)$$

式中:

$$x \equiv \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \delta \equiv \frac{x_2 - x_1}{k} \quad (21)$$

等式:

$$\exp\left(-\frac{i\delta}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot f(y)=\sqrt{\frac{i}{2\pi\delta}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{i}{2\delta}(y-y')^2\right]\cdot f(y')dy'^* \quad (21)$$

是可以证明的, 只要对 (21) 式两边求其富氏变换即可。

利用 (21) 式可以把 (20) 式写成:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, \vec{p}_1; x_2, \vec{p}_2) &\equiv e^{-\beta x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2\pi\delta} \exp\left\{-\frac{i}{2\delta}[(y_2-y)^2\right. \\ &\quad \left.+ (z_2-z)^2]\right\} \exp\left\{\beta x_1 \exp\left[-\frac{(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{a^2}\right]\right\} dy dz \quad (22) \end{aligned}$$

按关系式:

$$\begin{aligned} \Delta y &\equiv y_2 - y_1 = \Delta r \cos \phi & \Delta z &\equiv z_2 - z_1 = \Delta r \sin \phi \\ y - y_1 &= r \cos \theta & z - z_1 &= r \sin \theta^{**} \end{aligned} \quad (23)$$

来转换成极坐标, (22) 式变成:

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, \vec{p}_1; x_2, \vec{p}_2)^{***} &= \frac{e^{-\beta x}}{\delta} \exp\left[-\frac{i(\Delta r)^2}{2\delta}\right] \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} r \exp\left(-\frac{ir^2}{2\delta}\right) \exp\left[\beta x_1 \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right] \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\frac{ir\Delta r}{\delta} \cos(\theta - \phi)\right] d\theta dr \\ &= \frac{e^{-\beta x}}{\delta} \exp\left[-\frac{i(\Delta r)^2}{2\delta}\right] \int_0^{\infty} r J_0\left(\frac{r\Delta r}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{ir^2}{2\delta}\right) \exp\left(\beta x_1 e^{-r^2/a^2}\right) dr \quad (24) \end{aligned}$$

使用展开式:

$$\exp\left(\beta x_1 e^{-r^2/a^2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta x_1)^m}{m!} \exp\left(-\frac{mr^2}{a^2}\right) \quad (25)$$

和积分式^[3]

$$\int_0^{\infty} r \exp(-ar^2) J_0(\beta r) dr = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4a}\right), \operatorname{Re}(a) \geq 0 \quad (26)$$

经过一些计算, 得到:

$$\gamma(x_1, \vec{p}_1; x_2, \vec{p}_2) = e^{-\beta x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta x_1)^m}{m! B_m} \exp\left[-\frac{m(\Delta r)^2}{a^2 B_m^2} + i A_m\right] \quad (27)$$

式中

$$\begin{aligned} B_m &\equiv (1 + 4m^2\delta^2/a^4)^{1/2} \\ A_m &\equiv (\Delta r)^2 (1/B_m^2 - 1) / 2\delta + tg^{-1}\left(\frac{2m\delta}{a^2}\right) \\ \delta &= (x_2 - x_1) / k \end{aligned} \quad (28)$$

译注 * 原文误印为 $\sqrt{\frac{i}{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$

译注 ** 原文误印为 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

译注 *** 原文印为 $\gamma(x_1, \vec{p}_1; s_2, \vec{p}_2)$

在 $x_2 = x_1$ 时横向相关函数为

$$\begin{aligned} \gamma(x_1, p_1; x_1, p_2) &= e^{-\beta x_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta x_1)^m}{m!} \exp\left[-\frac{m(\Delta r)^2}{a^2}\right] \\ &= \exp\left(-\beta x_1 \left\{1 - \exp\left[-\frac{(\Delta r)^2}{a^2}\right]\right\}\right) \equiv \Gamma(x_1, p_1, p_2) \end{aligned} \quad (29)$$

在 $p_1 = p_2$ 时纵向相关函数为

$$\gamma(x_1, p_1; x_2, p_1) = e^{-\beta x_1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta x_1)^m}{m!} B_m \exp\left[itg^{-1}\left(\frac{2m\delta}{a^2}\right)\right] \quad (30)$$

在典型条件 $ka \gg 1$ 下，除非 $x_2 - x_1 \gg a$ ， δ/a^2 是很小的。这表示除非 βx_1 很大， r 接近实数并几乎等于 1，这一点只要对方程 (30) 检验一下就可知道。当间隔很大于折射率相关半径时，纵向相关很接近于 1。相比之下，横向相关 [(29) 式] 在相隔 $\Delta r \simeq a$ 之后急剧下降。

下一节将把上述结果用于求线阵在前述介质中的指向性。

II、线阵的指向性

设基阵远离声源，而基阵长度比距离小很多。

图 1 表示坐标系统和基阵方位。 x 轴是传播方向， θ_B 和 θ_W 分别是波束指向角和基阵的方位角。当 $\theta_B = \pi$ 时，基阵指向信号。

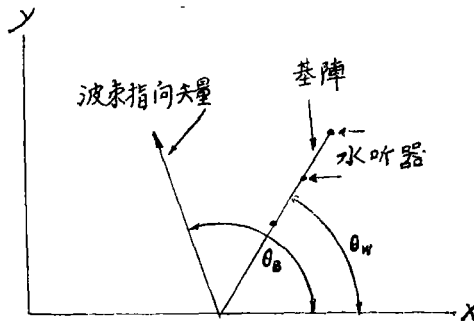


图 1 基阵方位

因为我们是处理线阵，欲求的量仅是两维量。第 n 号水听器的坐标是：

$$(x_n, y_n) = \{x_1 + (n-1)d\cos\theta_W, (n-1)d\sin\theta_W\} \quad 1 \leq n \leq N \quad (31)$$

因基阵长度比传播距离 x_1 小很多，所以

$$\frac{x_m + x_n}{2} \simeq x_1 \quad \text{对于所有的 } m, n \quad (32)$$

在第 n 号水听器上的复振幅是：

$$\psi_n = b(x_n, y_n) \exp(-ikx_n) \quad (33)$$

利用前面的假设和 (28) 式，得到

$$\begin{aligned} \gamma_{n-m} &\equiv E[b(x_m, y_m)b^*(x_n, y_n)] \\ &= e^{-\beta x_1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\beta x_1)^p}{p! B_p(n-m)} \exp\left[-\frac{p(n-m)^2 \alpha^2}{B_p^2(n-m)}\right] e^{i A_p(n-m)} \end{aligned} \quad (34)$$

式中

$$\begin{aligned} B_p(n-m) &= [1 + (n-m)^2 p^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}} \\ A_p(n-m) &= (n-m) \alpha^2 [1/B_p^2(n-m) - 1] / \gamma + tg^{-1} [(n-m)p\gamma] \\ \gamma &= 2d \cos \theta_w / a^2 k \\ \alpha &= d \sin \theta_w / a \end{aligned} \quad (35)$$

波束相移达到 θ_B 时，基阵响应是为：

$$\begin{aligned} P(\theta_B) &= E \left| \sum_{m=1}^N \psi_m \right|^2 = N + 2 \cdot \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \{ [Re(\gamma_m) \cdot \cos(m\phi) \\ &\quad - [Im(\gamma_m)] \sin(m\phi)] \} \end{aligned} \quad (36)$$

式中 $\phi = [\cos \theta_w + \cos(\theta_B - \theta_w)] kd$ (37)

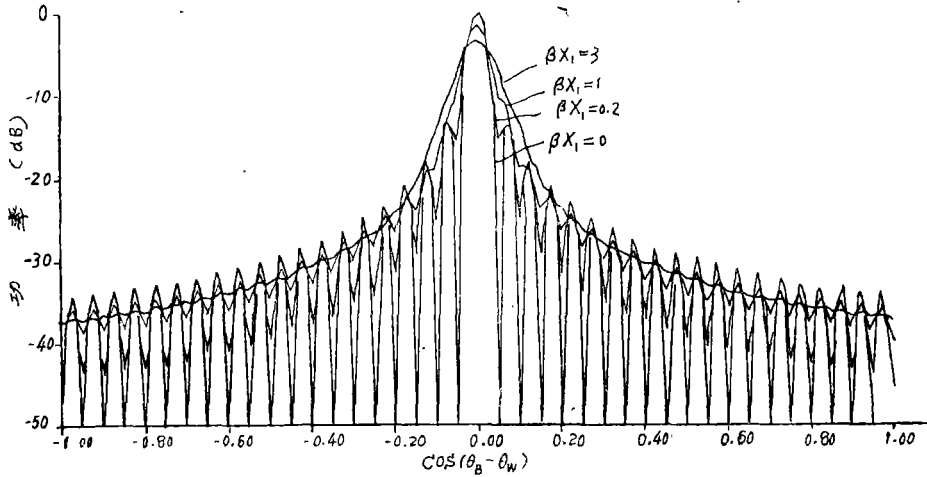


图2 指向性图 ($\cos \theta_w = 0$) : 60基元线阵, $\lambda/3$ 间隔, $\lambda/a=0.1$

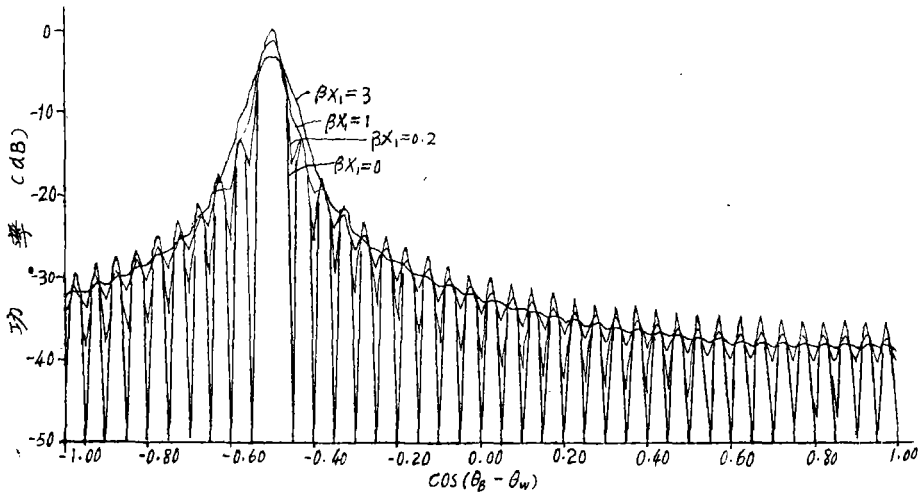


图3 指向性图 ($\cos \theta_w = \frac{1}{2}$) : 60基元线阵, $\lambda/3$ 间隔, $\lambda/a=0.1$

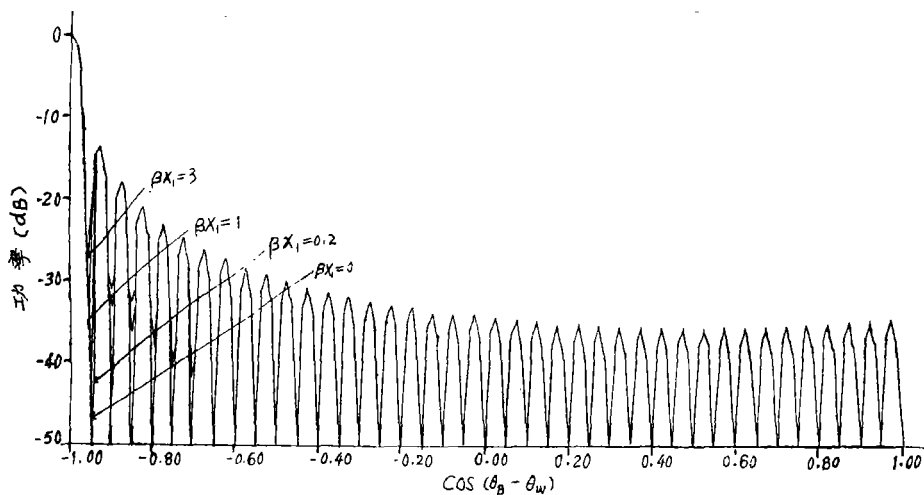


图4 指向性图 ($\cos\theta_W = 1$) 60基元线阵, $\lambda/3$ 间隔, $\lambda/a=0.1$

图2—4是60个基元线阵的指向性图, 基元相隔 $1/3$ 波长, $\lambda/a=0.1$, $\cos\theta_W=0, \frac{1}{2}, 1$, 而 $\beta x_1=0, 0.2, 1, 3$ 。

根据前述讨论能看得到, 在 $\cos\theta_W = 0$ 时, 随机起伏的影响最大。如若 βx_1 增大, 指向性图的凹谷渐渐填平。

对于 $\cos\theta_W = 0$ (参看图2), $\beta x_1=0.2$ 时的指向性图, 在相干图象的第一零处, 仅比主瓣下降16分贝。对于 $\cos\theta_W = \frac{1}{2}$ (参看图3) 和 $\cos\theta_W = 1$ (参看图4), 在相应点上分别下降17和43分贝。

主瓣和旁瓣随 βx_1 增大而减弱和扩展, 主瓣上最大的减弱是3分贝, 这出现在 $\cos\theta_W = 0$ 和 $\beta x_1 = 3$ 时 (参看图2)。

参 考 文 献

- [1] V.I.Tatarskii "The Effects of Turbulent Atmosphere on Wave Propagation" Israel program Sci.Transl. (1971) (Available in U. S.through NTIS,Chap.5)
- [2] M.M.Fitelson, "The Coherence Function for Cylindrically Spreading waves in a Random Medium" J.Acoust. Soc. Am.56, 53—57(1974)
- [3] I.S.Gtadshteyn. and I.M.kyzhik Tables of Integrals and products (Academic, Newyork, 1965),p. 717,Ep. 4

译自: J.Acoust. Soc. Am. 58, 3, 679—683(1975)

恽宗杨译 冯绍松校