

斜入射平面声波由弹性圆盘引起的散射

Max R. Knittel, Charles S. Nichols, and Don Barach

译自 *J. A. S. A. Vol. 58, No. 5, 1975, P983—995*

在前一篇的报告中，作者们建立了表述平面声波在弹性物体上散射的数学模型，给出了平面声波垂直入射在一个圆盘上引起的散射的结果。在本文中，给出了平面声波斜入射到相同的圆盘上引起的散射的结果，把总散射截面计算成频率和入射角的函数。对入射角为 60° 的入射波，把圆盘上算得的位移分布分解成圆盘在所选频率上的自由振动的本征方式。在几个有意义的频率上，还给出了总声压和散射声压的散射指向性图以及近场声压分布的等声压线。

引 言

在以前的两篇报告中^[1,2]，为了求解描述浸在无限流体介质中的弹性物体的运动方程，建立了一种数学近似方法。第一篇报告考虑了弹性物体作为声源的情况，并分析了自溢式压电陶瓷圆柱体。第二篇报告把弹性物体作为一个散射目标，并检验了平面声波垂直入射在铝圆盘上引起的散射。

这篇报告进一步给出平面声波在铝圆盘上散射的结果。这里入射角允许从 0° （垂直入射）到 90° 之间变化，给出了四种入射角时作为频率函数的总散射截面，散射截面的最大值等于具有自由边界圆盘的弹性共振。在有意义的频率上，绘制了总的声压或散射声压的散射指向性图。以外，还给出了圆盘在近场范围内的总声压分布的等声压线。

I. 数学表述

用来描述浸没在无限流体介质中的线性弹性物体的振动响应的数学近似方式是有限元程序^[3-5]。弹性物体的振动特性以及紧密围绕弹性物体之外到某一表面之间的那部分声学流体介质可以利用有限元方法来算出，而在这表面上标量波动方程式可予以分离变量。支配有限体积区域和这个体积外面的无限声学介质之间的相互作用的方程式（边界条件）可用一解析表达式来描述。通过选择体积有限的声学流体的表面，应用有限元方法从数学上来描述的该表面是球面，在这表面上的流体压力和法向速度可用球谐函数来展开，而边界条件则根据简单的表达式来计算。

对圆盘或具有轴对称的任何其他物体而言，沿对称轴传播的平面波只激发物体在 $m=0$ 的圆调谐子空间中的振动方式。在斜入射的情况下，把所有的场变量（总的声压场，入射声压场，和位移向量场）都用圆调谐基本函数来展开，就可求得圆盘的响应和

散射声压场。在圆柱坐标系中，点 $x(r, z, \phi)$ 处的声压由下式给出

$$p(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^M p_m(r, z) \cos(m\phi) \quad (1)$$

同样，位移向量函数的分量由下式给出

$$u^r(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^M u_m^r(r, z) \cos(m\phi) \quad (2)$$

$$u^z(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^M u_m^z(r, z) \cos(m\phi) \quad (3)$$

$$\text{和 } u^\phi(r, z, \phi) = \sum_{m=0}^M u_m^\phi(r, z) \sin(m\phi) \quad (4)$$

如果这些表达式都成立，支配这些场的方程式将彼此无关，并能独立地在每个圆调谐子空间中求解。这样把每个子空间算得的解相加，就可求出欲求的声场表达式。 M 的值由 ka 的最大值来确定，其中 k 是入射声波最高频率的波数，而 a 是球面（以 S_1 表示）的半径。对垂直入射情况， m 仅有一个值，其值为零。但对斜入射角情况，例如， ka 最大为 13 时， M 等于 17。

参考文献〔2〕中已经证明浸在无限声学流体介质中的轴对称散射体的运动方程式的有限元近似，在第 m 个圆调谐子空间上可写成

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 [\overline{M}_{p,p} \rho_T^{-1}] & [\overline{K}_{p,p} \quad 0] \\ 0 & [M_{u,u} \quad -T \quad K_{u,u}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{p} \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \alpha(ka) \overline{p}^{ino} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

矩阵 $[\overline{M}_{p,p}]$ 和 $[\overline{K}_{p,p}]$ 分别是声学流体的质量和劲度矩阵，而 $[M_{u,u}]$ 和 $[K_{u,u}]$ 分别是散射体的质量和劲度矩阵。矩阵 $[T]$ 把结构节点的法向速度和流体节点的声压关联起来。标量 ρ 为声学流体的密度。方程式 (5) 中的一划表示出在球表面 S_1 上的声压和法向速度已变换为球调谐的基本函数组。因此，声导纳对角矩阵 $[\lambda^{-1}(ka)]$ 中的元素能从含有球汉克尔函数比的简单解析表达式来计算。向量 $\alpha(ka) \overline{p}^{ino}$ 是入射波所产生的力函数。完整的推导给在参考文献〔2〕中。

II. 结 果

本文中考虑的物理情况示于图 1。平面声波以入射角 θ_k 入射在一个铝圆盘上。铝圆盘的直径为 0.344 米，厚度为 0.0254 米。在 5 到 15 千赫频率范围内，入射角为 0° 到 90° 时，在每个圆调谐子空间中对方程式 (5) 进行求介。总散射截面定义为〔6〕

$$\sigma \equiv \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{2} \frac{\text{Re} \int p^* v^n ds}{p_0^2 / 2 \rho c} \quad (6)$$

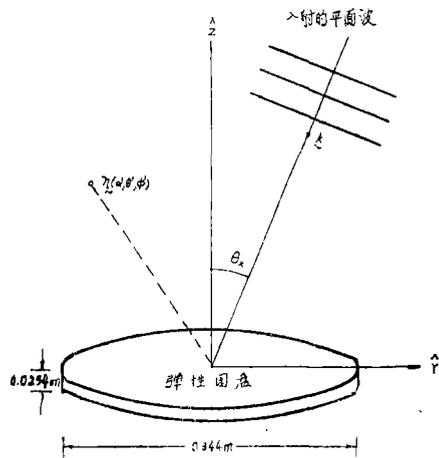


图 1 铝圆盘的尺寸和取向。角 θ_k 是激发平面波的入射角。

故即是每个子空间散射截面的和。参量 P_s 为散射功率, I_0 为入射声波的声强, p 为散射声压 p_0 是入射声压, v^n 为质点速度的法向分量, ρ 为流体密度, 以及 c 为流体中的声速。入射角在 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$, 和 90° 时作为频率函数的总散射截面示于图 2—5。为了确定散射截面最大值的位置用了 25 赫的频率分辨率。通过下述步骤便能够知道这些最大值在那里出现。首先, 就一个特殊频率和入射角, 计算在圆盘的每个圆调谐子空间中的总能量。一旦求出了包含大部分圆盘能量的子空间 (或许多子空间), 就可把圆盘上的位移分布分解成在那个特殊子空间中圆盘的自由振动的本征方式, 从而求得那一种振动方式或振动方程的组合〔7〕是入射波所激发的。

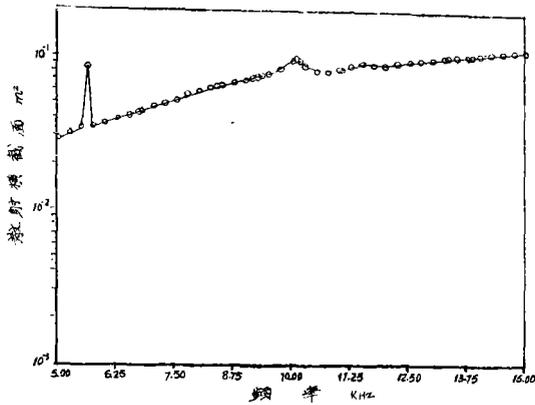


图 2 总散射截面与频率的关系。 $\theta_k = 0^\circ$ 。

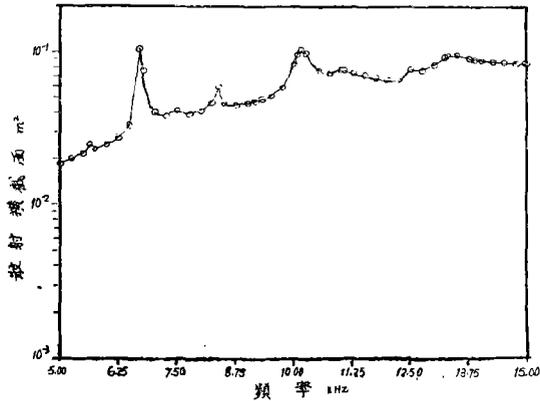


图 3 总散射截面与频率的关系。 $\theta_k = 30^\circ$ 。

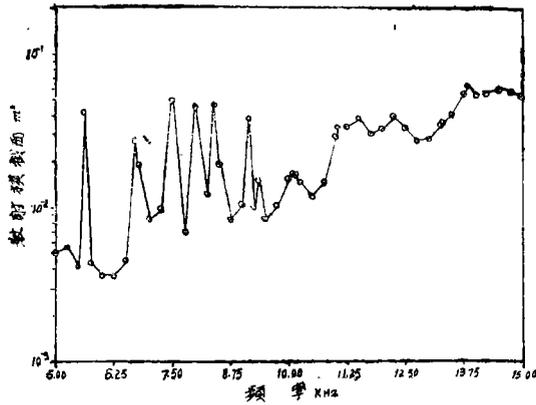


图4 总散射截面与频率的关系。 $\theta_0=60^\circ$ 。

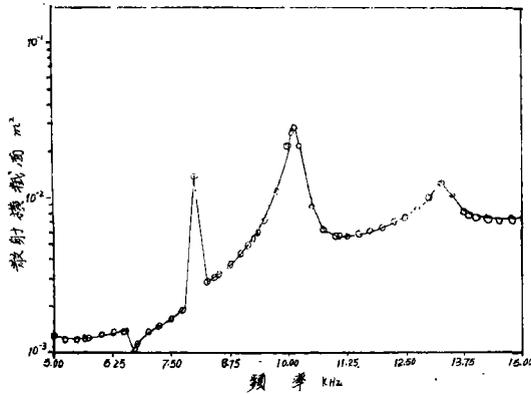


图5 总散射截面与频率的关系。 $\theta_0=90^\circ$ 。

例如，入射角 $\theta_0=60^\circ$ ，图4示出在总散射截面中有六个明确的最大值，就每一个给图4所示的总和有贡献的圆调谐子空间对总散射截面进行分析表明这一频带内十个圆调谐子空间中一共有十六个最大值。表I示出了在每个圆调谐子空间中十六个频率上所包含的总能量的百分比。对六个明确的最大值（中心频率为5.65，6.70，7.50，8.00，8.40和9.15千赫）中的每一个来说，只在一个圆调谐子空间中其包含的能量才是在95%以上。我们发现，不是十分明确的最大值其能量分散在一个以上的子空间中；即入射声波所激发的圆盘的共振方式是几个圆调谐子空间的单元。频率更高时，在几个圆调谐子空间中一起激发的共振方式将变得更为盛行，由于共振方式的密度较密，因而激发出一个以上的共振方式的可能性就越大。

表 I 入射角 $\theta_k=60^\circ$ 时, 几个入射波频率下包含在每个圆调谐子空间中的总能量的百分比。

入射波频率 (千赫)	圆调谐子空间									
	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$	$m=8$	$m=9$
5.65	9.81%	0.3	1.4	0.1	0	0	0	0	0	0
6.70	0.4%	0.8	97.5	1.0	0.2	0.1	0.1	0	0	0
7.50	0.1%	0.7	0.5	98.1	0.1	0.1	0.3	0	0	0
8.00	0%	99.5	0.1	0.4	0	0	0	0	0	0
8.40	0%	95.7	0.6	1.7	0.4	0.2	1.3	0	0	0
9.15	0.1%	1.0	0.3	0.5	96.4	0.1	0.6	1.0	0	0
9.35	0.3%	1.3	0.5	0.7	6.0	0.2	0.1	90.8	0	0
10.075	37.2%	9.3	6.2	29.2	10.5	2.6	1.4	3.5	0	0
10.15	34.4%	8.2	6.1	35.5	9.1	2.5	1.3	2.9	0	0
11.05	4.0%	4.0	73.9	6.5	3.8	3.3	1.1	1.1	2.1	0
11.50	1.0%	2.0	13.9	2.5	1.7	3.6	0	0	75.6	0
12.25	4.5%	4.4	11.7	5.4	5.2	60.6	2.2	0	5.7	0
12.50	3.3%	4.3	27.6	5.5	7.0	44.1	2.4	1.6	3.9	0
13.30	1.8%	4.9	6.0	14.7	49.0	11.1	4.0	1.7	2.2	4.5
13.75	1.0%	4.4	3.0	15.1	13.0	4.5	4.0	1.1	1.1	52.8
13.85	1.0%	4.0	2.4	11.7	8.6	3.5	3.9	1.0	1.0	63.2

为了证明这些最大值不仅能在一个特殊圆调谐子空间中确定, 而且还可用那个子空间中圆盘的一个特殊本征方式来确定, 所算得的位移分布可分介为在真空中的圆盘的自由振动本征方式。表 II 到表 VII 示在六个选定频率上算得的结果。例如, 由表 I 可看出, 在圆盘中频率为 7.5 千赫, 入射角 $\theta_k=60^\circ$ 时, 由于平面声波的激发总能量的 98.1% 是在 $m=3$ 的圆调谐子空间中。在这频率上, 把圆盘的位移分布分解为 $m=3$ 的自由振动本征方式 (表 IV) 表明在那个子空间中能量的 93.9% 是在第二个 $m=3$ 方式中。

表 II 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$, 频率 5.65 千赫, 在 $m=0$ 的圆调谐子空间中。

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
0^a	0.7%
1.888	6.0
7.414	93.2
10.386	0
15.315	0
	99.9%

a 刚体在 x 方向平移

表Ⅲ 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$ ，频率6.70千赫，在 $m=2$ 的圆调谐子空间中。

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
1.101	0.6%
6.765	0.7%
6.831	98.7%
12.457	0
14.647	0
	100%

表Ⅳ 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$ ，频率7.5千赫，在 $m=3$ 圆调谐子空间中。

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
2.509	5.9%
9.651	93.9
10.513	0.1
17.103	0
18.369	0.1
	100%

表Ⅴ 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$ ，频率8.00千赫，在 $m=1$ 圆调谐子空间中。

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
0^a	0%
0^b	0
4.114	0.1
8.019	99.8
10.957	0.1
17.668	0
	100%

a 刚体在 x 方向平移。

b 刚体围绕 y 轴旋转。

表 VI 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$ ，频率8.40千赫，在 $m=1$ 圆调谐子空间中

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
0^a	1.8%
0^b	0
4.114	7.1
8.019	0.9
10.957	90.1
17.668	0
	<hr/> 99.8%

a 刚体在 x 方向平移。

b 刚体围绕 y 轴旋转。

表 VII 圆盘位移分解 $\theta_k=60^\circ$ ，频率9.15千赫，在 $m=4$ 圆调谐子空间中

自由振动本征频率 (千赫)	每个本征方式占总能量的百分比
4.255	8.1%
12.819	91.0%
13.672	0
21.779	0
22.216	0.7
	<hr/> 99.8%

入射角 $\theta_k=0^\circ$ (图 2) 的散射截面表明最大值不多，因为只能激发 $m=0$ 的共振。对中间的角度，在十个以上的子空间中能激发出共振，因而在图 3 和图 4 中可看到许多最大值。对 $\theta_k=90^\circ$ (图 5)，再度出现只有不多的最大值，这是因为只能激发对圆盘的厚度来说是对称的振动方式。同时，还能看到当入射角增加时，散射截面的一般量级将减小，这是因为对入射角来说几何截面随 $\cos\theta_k$ 而减小。

在参考文献^[2]中已经证明声波垂直入射在圆盘上时，只保留盘作刚体平移方式的散射模型就足以对大多数频率下的散射声压场作预估。正如图 2 中所见的那样，弹性圆盘的共振仅在所研究的二个或三个频带范围内显现出来。然而，对 60° 的入射角(图 4)，圆盘的共振差不多在每个频率上都对散射声压场起重要的作用。不考虑圆盘的弹性特性的散射模型在大多数频率上将不能正确地预估近场声压分布。当散射体的几何形状变得更加复杂以致可以激发出的弹性散射体的共振更多，因而能否正确地塑造共振体的弹性特性将非常重要。

图 6 示在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 的平面内对入射角为 60° ，频率为 5.65 千赫时，所算得的总声

压散射指向性图（总声压和散射声压都用入射声压来归一化）。这个指向性图是在围绕半径为0.17243米的圆盘的球表面 S_1 上算得的（圆盘本身的半径为0.17196米）。因为声压和位移矢量场除 $\theta_k=0^\circ$ 外不是轴对称的。因此，存在着显示三维声压和位移分布的问题。图7表示了在 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 平面内入射为 60° ，频率为5.65千赫时算得的总声压的散射角指向性图。本文中散射指向性图仅表示在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 和 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 的两个平面内（入射波选 $\phi_k=0^\circ$ ）。这些图可与参考文献^[2]中的图6作比较，那里把这个频率上垂直入射时的总声压的散射指向图表示在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 平面内。

从表 I 能够看出，入射波频率为5.65千赫时，在散射截面中发生的最大值是一个 $m=0$ 的现象，因此，散射声压场大都必须是轴对称的。图8和图9表示在 $0^\circ/180^\circ$ 和 $90^\circ/270^\circ$ 平面内，频率在5.65千赫的归化散射声压的散射指向性图。对这些图和其他在不同的平面 ϕ 上的计算表明散射声压场确实大部分是轴对称的。因此，散射声压场确实是一个 $m=0$ 现象。表 I 还表明频率在6.70千赫和9.15千赫所发生的共振效应是 $m=$ 偶数现象，因而在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 平面内的散射场应和在 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 平面的散射场相同。图10—13示在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 和 $90^\circ/270^\circ$ 平面内的频率为6.70和9.15千赫的散射声压场，在每个频率上，两个平面具有几乎相同的声压指向性图。

频率在7.5，8.00和8.40千赫发生的共振效应是 $m=$ 奇数现象，在 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 平面内的散射声压场应是零。图14—16表示这三个频率上，在 $0^\circ/180^\circ$ 平面内的散射声压场。我们发现 $90^\circ/270^\circ$ 平面内的散射声压场在这三个频率上低于入射波声级20分贝以上。

散射指向性图中与期望的对称或零发生偏差是由于稍稍激发出结构在其他圆调谐子空间中的共振方式，以及由于一般的干涉和绕射效应所引起的。

图17是算得的归化恒定总声压线的等声压图和 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 平面内频率为5.65千赫，入射角为 $\theta_k=60^\circ$ 时的结构形变图。显示了在稳态时间周期内的一个点上压力分布和结构形变；随着时间的推迟，等声压图会有很大的变化。等声压线每隔0.5画一条，虚线表示零声压线，入射波是从图的右上方向左下方传播的。

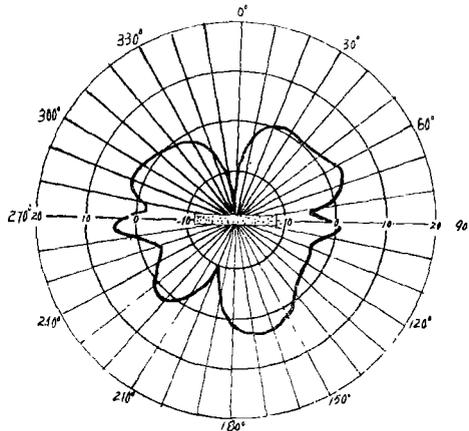


图6 频率为5.65千赫在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 平面内； $\theta_k=60^\circ$ 。归化总声压 $20 \lg(p^{total}/p^{inc})$ 的散射指向性图

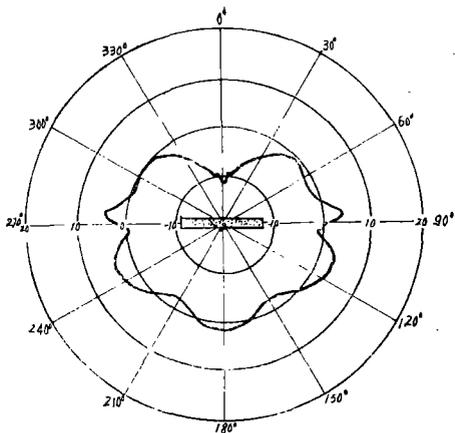


图7 频率为5.65千赫在 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 平面内； $\theta_k=60^\circ$ 。归化总声压的散射指向性图

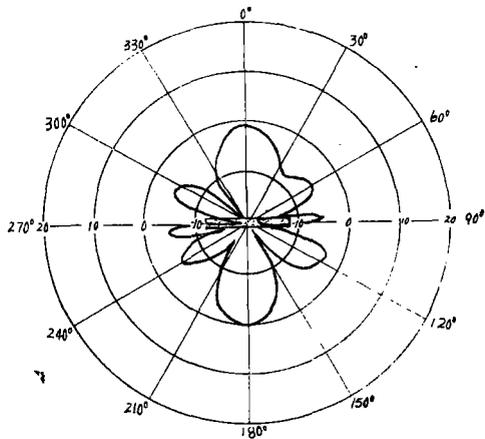


图8 频率为5.65千赫在 $\phi=0^\circ/180^\circ$ 平面内； $\theta_k=60^\circ$ 。归化总声压 $20\lg(p_{scat}/p_{inc})$ 的散射指向性图

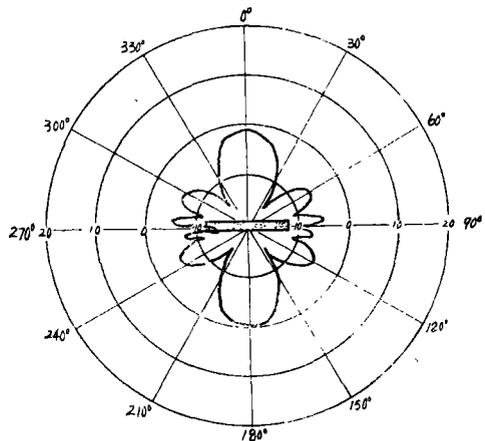


图9 频率在5.65千赫在 $\phi=90^\circ/270^\circ$ 平面内； $\theta_k=60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图。这图和前面那张几乎相同，一个 $m=偶数$ 现象。

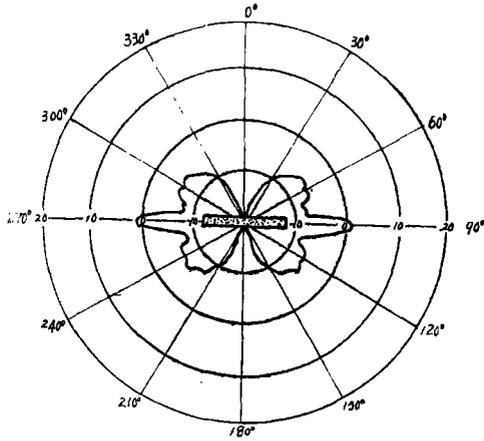


图10 频率为6.70千赫在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内， $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图。

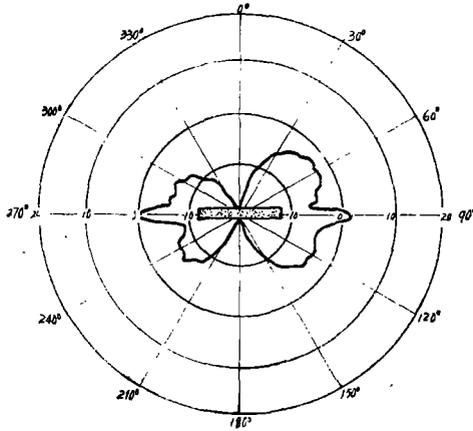


图11 频率为6.70千赫在 $\phi = 90^\circ / 270^\circ$ 平面内， $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图。这图和前面那张几乎相同，一个 $m = \text{奇数}$ 现象。

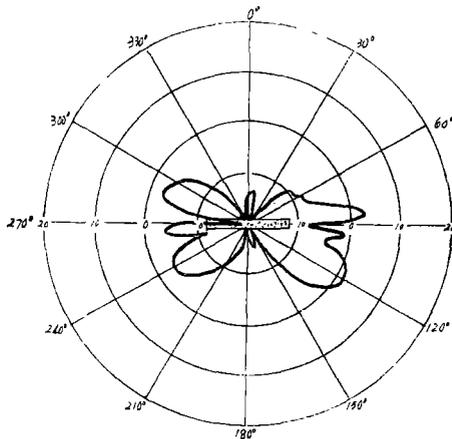


图12 频率9.15千赫在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内， $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图

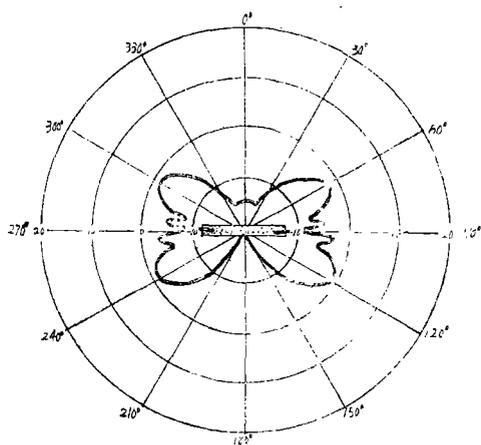


图13 频率在9.15千赫在 $\phi = 90^\circ / 270^\circ$ 平面内; $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图。这图和前面那张几乎相同, 一个 $m = \text{奇数}$ 现象。

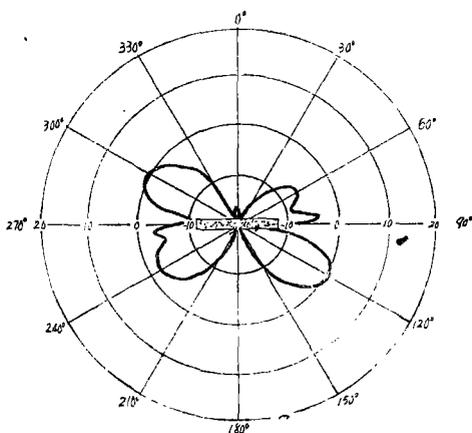


图14 频率在7.50千赫在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内; $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图

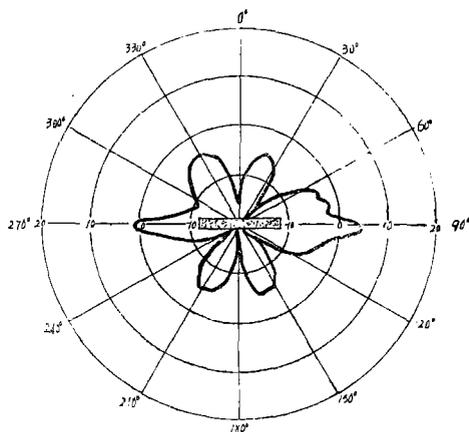


图15 频率在8.00千赫在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内; $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图

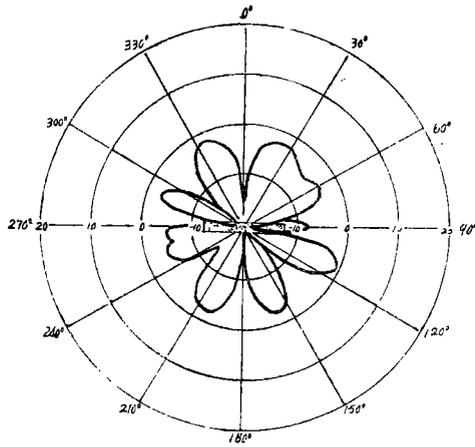


图16 频率在8.40千赫在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内， $\theta_k = 60^\circ$ 。归化散射声压的散射指向性图

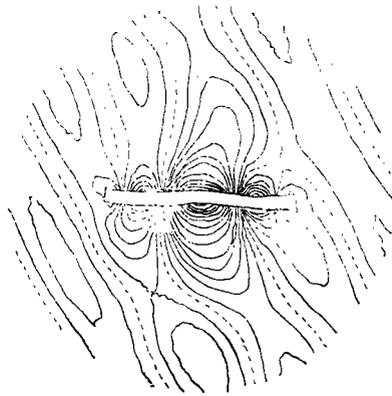


图17 频率在5.65千赫， $\theta_k = 60^\circ$ 。算得的归一化恒定总声压的等声压图和在 $\phi = 0^\circ / 180^\circ$ 平面内结构形变的图象。等值差是0.5虚线表示零声压的等值线。

Ⅲ. 总 结

我们给出了平面声波以任意角度射向浸没在无限流体介质中的铝圆盘的散射的结果。目前对组合的结构振动/声学散射问题的求介所使用的数学表述限于应用于 ka 的最大值小于40—50。当 ka 增大时，方程式1—4所给的展开式中必须使用更多的项，因而在结构和包绕声学流体的球内的有限元法必须使用更多的自由度。就这里所给的结果而言， ka 的最大值是13，计算结果是经过 $m = 17$ 圆调谐子空间相加而得到的。

作为频率函数的总散射图表明与根据盘的边界条件为绝对刚性或绝对软时所算得的截面有很大的偏高[8]，出现了不论在数量上或高度上随激发波的入射角而变的很多极大值，而且这些极大值是直接源于盘在低频时的某一本征方式。但激发的频率不是所激发方式的自由振动本征频率。加在圆盘上的流体负载产生的共振频率不同于从自由振动

圆盘的频率。在频率较高的情况下，可以激发一个以上的振动方式，因为在这个 ka 范围内振动方式的密度较大，而且流体负载起着使一个自由振动方式的运动产生激发其他自由振动方式的力的作用^[9]。在所检验的频带上，除在高频或小入射角外，几乎没有那种频率的入射波不明显地激发弹性共振现象的某种类型。 ka 大时，弹性效应是不可能正确的预估出远场声压的，因为比较高次的振动方式往往是一个发射声波能量差的发射器。然而，在预估近场声压分布时，不包含散射体弹性效应的散射模型会引起错误的结果。

归一化散射声压的散射指向性图表明围绕圆盘声压场犹如根据算得的结构形变的形式分解所预估的那样。归一化总声压的等声压线表明平面波向弹性结构传播时，由于同散射波相互作用，从而形成复杂的近场声压分布，而好比一系列畸变的平面波那样继续通过圆盘。在某些频率上，散射声压的振幅可以达到比入射声压的振幅还大一个数量级的程度。

参 考 文 献

- [1] J.T.Hunt, M.R.Knittel, and D.Barach, "A Finite Element Approach to Acoustic Radiation from Elastic Structures," *J.Acoust.Soc.Am* 55, 269—280(1974)。
- [2] J.T.Hunt, M.R.Knittel, C.S.Nichals, and D.Barach, "A Finite Element Approach to Acoustic Scattering from Elastic Structures," *J.Acoust.Soc.Am.* 57, 287—299(1975)。
- [3] O.C.Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science* (McGraw-Hill, Londn, 1971), 2nd ed.
- [4] J.S.Przemieniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis* (McGraw-Hill, New York, 1968)。
- [5] H.Allik et al., "GENSAM, A General Structural Analysis and Matrix System," *General Dynamics|Electric Boat Division Rep.P411-70-009*(March 1970)。
- [6] J.W.M.Baars, "On the Diffraction of Sound by a Circular Disc," *Acoustica* 14, 289(1964)。
- [7] H.Allik, K.M.Webman, and J.T.Hunt, "Vibrational Response of A Sonar Transducer using Piezoelectric Finitis Elemnts," *J.Acoust. Soc.Am.*56, 1782—1791(1974)。
- [8] F.B.Sleator, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes* J.J.Bowman, T.B.A.Senior, and P.L.E.Vsleoghi, Eds. (North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1969) pp.535, and 549.
- [9] M.Lax, "The Effect of Radiation on the Vibrations of a Circular Diaphran," *J.Acoust.Soc.Am.*16, 5—112(1944)。

孙璇筌 译 冯绍松 校