

数 字 滤 波 器 研 究

Philip Joseph Walsh

I. 引 言

在线性系统中，信号滤波过程一般定义为，当输入波形通过一个系统时，对它作一个线性运算。在时间域上这种变换如像内插，外插，微分和积分；在频率域上这种变换则如低通滤波或平滑，带通滤波，谱设计和谱分析。如模拟滤波器对连续时间信号的这种运算，在数学上是用线性常系数微分方程确定的。用拉普拉斯变换可在 S 域内进行这些运算的分析，用付立叶变换则在 f 域内分析。同样地，可用常系数线性差分方程来定义离散时间信号的线性变换，并且用 z 变换来分析和合成离散时间滤波器。

A. 数字滤波器概述

数字滤波定义为对离散时间信号的一个非时变线性运算。这个线性运算基本上是把一个称为输入的抽样信号或数列变换为另一个称为输出的数列的计算过程。有时，“数字滤波”这个术语包括执行模数和数模转换的意义。但因为某些信号本来就是数字，本文的“数字滤波”将仅仅考虑上述的计算过程。

在用线性常系数差分方程描述这个意义上说，数字滤波器是非时变的。任意给定一组系数就唯一地确定了一个滤波器，并且这些系数的任何改变将必然引起滤波器的改变。所以数字滤波器是非时变的。

实现数字滤波器所要求的计算过程需要使用移位寄存器，加法器和门电路这些数字部件。使用数字硬件得到的若干基本优点是，成本下降、速度高和增加可靠性。数字信号处理技术比较模拟信号处理另外还有一些优点：

1. 可以预言，能够获得任意高的精度而无性能漂移。这允许实现很高 Q 值的稳定滤波器。
2. 因为数字电路本来就是彼此隔离的，所以不存在阻抗匹配问题。
3. 不存在临界滤波频率的限制。特别是容易构成零点几赫频率的滤波器。
4. 滤波函数能够有较大的改变，因为本质上是一个数字系数的问题而不是电感和电容。
5. 适当地改变系数就可以容易地改变滤波器的响应。

6. 具有在时间上分配主要滤波段的内在可能性。例如，可以仅仅设置一个滤波段，通过时间开关多次复用这个滤波段而完成多段滤波。对每一段都能改变滤波系数。另一方面，一个给定的滤波器，利用时间多次复用可以对多于一个的输入序列工作。

这些优点加上大规模集成电路(LSI)在实时数字滤波器方面的潜力,使人确信这些器件在音频系统、语言处理、地震学、海洋学、雷达系统和数据通讯这样一些方面有广泛的应用。

B. 历史背景

1600年Kaiser^[1]已采用线性滤波器或加权序列来处理离散时间信号。他讨论了早期使用的经典数学方法和以后发展的 z 变换计算。 z 变换的理论和它对于早期数字信号处理的运用已于1950年在很多关于抽样数据控制系统的文献中发表。例如参考文献^[1]、^[2]和^[3]。

最近通用数字计算机已成为模拟连续滤波器的工具,并且数字滤波器本身也在飞快地发展。随着计算机工艺和技术(特别是在存储器尺寸、计算速度方面)的发展,以通用计算机完成实时的数字滤波器已成为可能^①。现在,由于大规模集成电路(LSI)的出现,以专用硬件实现数字滤波器设备是既实用又经济的。

简言之,由LSI制作实时数字滤波器的前景已在一般数字信号处理的场合引起了相当大的兴趣。参考资料^[4-8]具有很多关于这个新课题的最近出版的资料。

II. 数学的考虑

数字滤波器的分析和设计要求对离散时间信号的数学适当熟悉。本节讨论抽样过程和 z 变换计算的理论,并且介绍它们同信号数字处理的关系。尤其注重于产生数字传递函数 $H(z)$ 的方法;因为以后将要指出,这项工作是数字滤波器设计问题的本质。

A. 抽样过程

连续时间信号的抽样可以想像为一个脉冲调制的形式。假如一个信号 $f(t)$ 每隔 T 秒抽样,则抽样率是 $\omega_s = 2\pi/T$,而这个被抽样信号是一系列幅度变化的等间隔脉冲,

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t-nT) \quad (2-1)$$

在模数转换器中, $f(t)$ 在每个抽样时间的幅度 $f(nT)$ 被测量,然后,构成一个对应于测量值的二进制数字编码序列。直接看出,测量精度受到计算机码字长的限制,这是一个设计数字滤波器的方法。这个现象就是所谓的“量化”^[4, 5],在第IV节D将讨论它的影响。

回到(2-1)式,显然,在时间域中抽样函数 $f^*(t)$ 等于用调制函数 $\delta(t-nT)$ 乘原函数。因此在频率域中, $f^*(t)$ 的频谱等于无限多的等间隔谱线和原信号频谱的褶积。因此,得到图2-1所示的周期谱。注意这点是很重要的,在实际抽样情况下,调制脉冲不是数学上的 δ -函数,而是具有有限宽度的脉冲。这表明频谱的幅度沿频率轴,在零频的两边衰减。衰减的函数是熟悉的 $\sin x/x$ 形式,它可以用付立叶变换导出。

① 确实,在实时数字滤波方面通过快速付立叶变换(FFT)的高速卷积的效果还不了解。

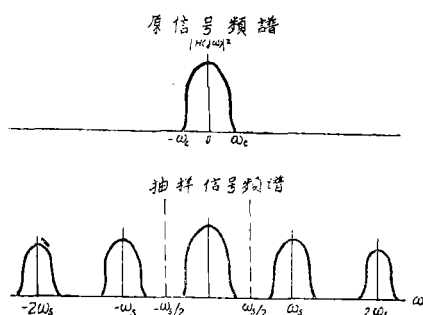


图 2—1 均匀抽样信号的频谱

特别重要的是频率的折迭或化名现象。再参考图 2—1。假如 ω_c 是原信号频谱的最高频率分量，并且 $\omega_s < 2\omega_c$ ，由于信号分量的重迭，抽样信号的频谱将出现畸变。因此通常为了恢复原频谱用一个低通滤波器，而频谱必须被限带在 $\pm\omega_s/2$ 。这就是通常所说的Nyquist抽样原理^[1-3]，并且 $2\omega_c$ 被称为Nyquist频率（最低抽样频率）。实际上总是有某种程度的频率折迭。因此决不能恢复全部的信息量。

应当特别强调的一点是，抽样频率必然是数字滤波器的钟频率。亦即，产生一个输出值所需要全部数字计算必须在一个抽样周期内完成。因此，数字滤波器的计算时间由抽样频率规定一个上限。

B. 线性差分方程

假如用 x_n 表示一个输入序列，而用 y_n 表示一个输出序列，则 x_n 经数字滤波产生 y_n ，可以用线性常系数差分方程来描述，它的形式是；

$$y_n + b_1 y_{n-1} + \dots + b_M y_{n-M} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N} \quad (2-2)$$

上面方程每一项是一个数字序列。序列 y_{n-1} 与 y_n 的不同点仅是在时间上滞后一个单位时间（ T ）。将方程式（2—2）写成时间 T 的函数，变为；

$$y(nT) + b_1 y(nT-T) + \dots + b_M y(nT-MT) = a_0 x(nT) + a_1 x(nT-T) + \dots + a_N x(nT-NT) \quad (2-3)$$

方程式（2—2）和（2—3）是等价的。为了简单，常采用（2—2）式的表示方法。一般化的差分方程的解释如下；当时间 $t=nT$ 时，输出序列 y_n 的新的值可以由输入序列 x_n 的最新值和对于计算有用的以前的输入、输出值的线性组合来确定。常系数 a_i 和 b_i 由所需要的特定的滤波函数来确定。决定这些系数是数字滤波器设计问题的实质。

一阶线性差分方程的一个例子是，

$$y(nT) = b_1 y(nT-T) + x(nT) \quad (2-4)$$

（这里，一阶指的是在这个方程中最高阶延迟是1）假如 $x(t)$ 是复数正弦函数 $e^{i\omega t}$ ，则 $x(nT)$ 是 $e^{in\omega T}$ 。同时 $y(nT-T)$ 可用 $y(nT)e^{-i\omega T}$ 表示；即 $y(nT-T)$ 是在时间上比 $y(nT)$ 延迟一个抽样周期（这个概念将在下一节说明）因此（2—4）式可写为；

$$y(nT) = \frac{e^{in\omega T}}{1 - b_1 e^{-i\omega T}} = \frac{x(nT)e^{i\omega T}}{e^{i\omega T} - b_1} \quad (2-5)$$

(2-5) 式指出, 在稳态情况, 输出仍然是一个复正弦函数, 不过由“传递函数”把它修正了。这个传递函数可定义为 $H(e^{j\omega T})$ 。它的幅值是

$$\left| H(e^{j\omega T}) \right| = \frac{1}{(1 + b_1^2 - 2b_1 \cos \omega T)^{1/2}} \quad (2-6)$$

而相位是

$$\psi = \omega T - \tan^{-1} \left(\frac{\sin \omega T}{\cos \omega T - b_1} \right) \quad (2-7)$$

(2-6) 式表示传递函数 $H(e^{j\omega T})$ 的选频特性。注意, 幅值响应在频率上是周期性的, 并且它的周期等于 $\omega_s = 2\pi/T$ 。事实上, 这些结果是很一般的, 而离散信号的传递函数概念将在下一节详细地讨论。

C. Z 变换

已经指出, 数字滤波涉及到解一个由 (2-2) 式给出的常系数差分方程, 而且 (2-2) 式对正弦输入的稳态解, 可以用输入信号的传递函数得到。允许构成离散时间信号传递函数的变换称为抽样数据或 Z 变换。所谓“数字传递函数”是用来描述一个复变量 Z 的离散时间传递函数。

1. Z 变换的定义

给定一个以数列 f_n 来表示的离散信号 f , 它的 Z 变换 $F(z)$ 用幂级数来定义

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (2-8)$$

式中 z 是一个复变量。变量 z 的作用相当于拉普拉斯变换中的变量 s 。对一个数列进行 z 变换的运算可表示为

$$F(z) = Z(f_n) \quad (2-9)$$

举一个简单的例子, 假如 f_n 是恒定信号

$$f_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2-10)$$

则从 (2-8) 式得到 z 变换的几何级数,

$$Z(1) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1 \quad (2-11)$$

Z 变换原理的资料已经发表^{[2], [3]}, 这里不提供详细的证明和更多的例子。下面给出适用于数字滤波的一些重要定理和若干结论:

① 根据定义可以推导出一个延迟序列的 Z 变换。这结果是

$$Z(f_{n-k}) = z^{-k} Z(f_n) \quad (2-12)$$

② 一个复数正弦的实部的 Z 变换是

$$Z(a^n \cos nb) = \frac{1 - a \sin b z^{-1}}{(1 - a e^{jb} z^{-1})(1 - a e^{-jb} z^{-1})}, \quad |z| > a \quad (2-13)$$

* 原文中误为 $\frac{1}{(1 + b^2 - 2b \cos \omega T)^{1/2}}$ ——译注

③一个复数正弦的虚部的Z变换是

$$Z(a^n \sin b) = \frac{a \sin b z^{-1}}{(1 - a e^{jb} z^{-1})(1 - a e^{-jb} z^{-1})}, \quad (2-14)$$

注意, 正弦函数的Z变换, 在由阻尼系数决定的半径上产生成对的复共轭极点。

4. 任意一个函数形式为

$$f_n = n^k a^n \sin(nb + c) \quad (2-15)$$

的Z变换以及它们的线性组合总是一个 z^{-1} 的有理函数, 并且这种函数可以分解为 (2-13) 和 (2-14) 式表示的项。这类信号与具有有理拉普拉斯变换的那类连续时间信号相对应。

现在说明Z变换和拉普拉斯变换之间的对应关系。由 (2-1) 式, 一个抽样信号是

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (2-16)$$

对 (2-16) 式的两边进行拉普拉斯变换, 得到

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTs} \quad (2-17)$$

这个结果在形式上是同Z变换所确定的 (2-8) 式相同的, 但要做以下一个置换,

$$z^{-1} = e^{-Ts} \quad (2-18)$$

在 (2-8) 式中可以把 z^{-1} 这个复变量解释为“单位延迟算符”, 或另一种意义是称为次序变量, 而它的指数表示序列中的一个脉冲的位置。后一种解释, 有时称为“形成函数”〔2〕, 这在后面讨论了Z逆变换后就清楚了。

2. 数字传递函数

数字滤波器的输出写为

$$y_n + b_1 y_{n-1} + \cdots + b_M y_{n-M} = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_N x_{n-N} \quad (2-19)$$

对每一项作Z变换并利用序列延迟定理给出

$$Z(y_n) + b_1 z^{-1} Z(y_n) + \cdots + b_M z^{-M} Z(y_n) = a_0 Z(x_n) + a_1 z^{-1} Z(x_n) + \cdots + a_N z^{-N} Z(x_n) \quad (2-20)$$

提出公因子并简化 (2-20) 式, 结果是

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}} = H(z) \quad (2-21)$$

$H(z)$ 定义为输出Z变换与输入Z变换之比, 并一般称之为数字传递函数。

另一种构成数字传递函数的途径是用线性算符 H 表示。假如给出一个输出序列是

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots, \quad (2-22)$$

这简单地是用权函数乘上输入序列, 然后可简化为

$$y_n = H(x_k), \quad k = n, n-1, \cdots \quad (2-23)$$

这里 H 确定了滤波器。假如 h_n 表示这个滤波器的脉冲响应（即，对于输入序列的响应在 $n=0$ 时是1，而在所有其它时间是0），从离散褶积定理可以得到时间响应 y_n 〔4〕，

$$y(nT) = \sum_{k=0}^n x(kT)h(nT-kT), \quad (2-24)$$

或等价地，

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (2-25)$$

对（2-25）式的两边做 Z 变换，再用序列延迟定理，

$$Z(y_n) = x_0 Z(h_n) + x_1 z^{-1} Z(h_n) + \dots,$$

或

$$y(z) = H(z) \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = H(z) x(z) \quad (2-26)$$

$H(z)$ 定义为这个数字滤波器的数字传递函数。

3. Z 逆变换

从 $y(z) = H(z) x(z)$ 关系式可以得到输出序列的变换 $y(z)$ 。假定 $H(z)$ 和 $x(z)$ 是已知的，并且是 Z 的有理多项式，则剩下从 $y(z)$ 确定序列 y_n 的问题。通常有三个方法确定 Z 逆变换〔2、3〕。前两个方法是利用 Z 变换的反变换公式和部分分式。反变换公式是最一般的，部分分式展开需要把分母多项式因式分解为已知变换对的项。

第三个方法，并且通常最容易的，是幂级数或长除法。假定函数 $y(z)$ 以 Z 的形式写为

$$y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots} \quad (2-27)$$

假如采用长除法，用分母除分子，结果是

$$y(z) = q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots \quad (2-28)$$

这个输出幂级数立即给出，

$$y^*(t) = q_0(t) + q_1(t-T) + q_2(t-2T) + \dots \quad (2-29)$$

这里 z^{-1} 变量解释为前面提到过的输出序列“形成函数”。这种处理过程通过计算和其它计算装置是很容易执行的。

4. 线性差分方程的正弦稳态解

在连续时间线性系统中，对于输入为正弦函数的特殊情况，可以避免做拉普拉斯反变换和付立叶反变换。这种系统在稳态时的输出总是相同频率的正弦，但它们的幅值和相位由这个系统的传递函数改变。在特定频段内的输出幅值称为这个系统的频率响应。沿实频率轴计算这个系统的传递函数 $H(s)$ 或 $F(j\omega)$ 就得到这个响应函数。现在将要指出，通过在 Z 平面中围绕单位圆计算数字传递函数 $H(z)$ ，可以求出离散时间线性系统的响应。因此，对于一个输入序列是均匀抽样正弦波的很普通的情况，不要计算 Z 逆变换就可以确定输出序列。

在第Ⅱ节B段中的（2-5）式指出：在离散一阶系统中对于一个正弦输入的输

出, 同样是正弦曲线, 但它经过频率灵敏传递函数 $H(e^{j\omega T})$ 修正。运用置换 $z = e^{sT}$ 和 $s = j\omega$, 容易把这个传递函数写为 Z 的函数。

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - b_1} = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1}} = H(z) \quad (2-30)$$

假定原差分方程式 (2-4) 是用 Z 变换求解的, 由此而得到的数字传递函数将和上面 (2-30) 式是相同的。若不是由 Z 变换的定义所要求, 这些结果就不是恰好一致的。因此, 一般来说, 可通过计算数字传递函数在 $z = e^{j\omega T}$ 时的值来求这个数字滤波器的频率响应。^①

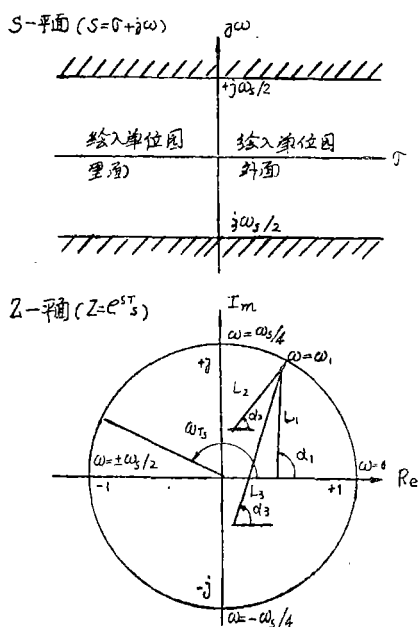


图 2-2 S平面到Z平面的变换

这个讨论, 在图 2-2 中, 用图解说明。以 $s = \sigma + j\omega$ 代入 (2-18) 式来实现由 S 平面到 Z 平面的绘图。

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} \quad (2-31)$$

这里 $T = 2\pi/\omega_s$ 。对于 $|\omega| < \omega_s/2$, S 平面的右边部分 (正 σ) 绘入 Z 平面的单位圆外边。同样地, S 平面的左边部分 (负 σ) 绘入单位圆内。正如连续时间滤波器的频率响应是用关于 $j\omega$ 轴上的传递函数值来确定的一样, 离散时间滤波器的频率响应是用在这个单位圆上的传递函数值确定的。假如在 Z 平面中画出了数字传递函数的零点和极点^②, 则在图 2-2 中, 频率 ω_1 的响应值是 L_1/L_2L_3 , 并且相位是 $\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$ 。这些结果利用普通的极点-零点图解方法得到。注意到, 幅值响应在 ω 值达到 $\omega_s, 2\omega_s$ 等等以后重复, 并

① 在这个意义上, 数字滤波这个术语仅仅是指模拟方式中的选频滤波, 而不是第 I 节/A 中一般的时间域滤波。

② 通过对 Z 的有理多项式分解因式, 求出数字传递函数的零点和极点。

在 $n\omega_s$ 附近是对称的。这结果同以前讨论的抽样信号的周期频谱相一致。一般来说相位特性曲线可以重复也可以不重复〔9〕。还有，数字滤波器的稳定性要求数字传递函数的极点设置在 Z 平面的单位圆里边。

在 $H(z)$ 函数表达式中以 $e^{-j\omega T}$ 代替 z^{-1} 能够解析地计算数字传递函数的频率响应。假定 $H(z)$ 能分解为二阶表达式的乘积，则

$$\begin{aligned} H(e^{-j\omega T}) &= \frac{A_0 + A_1 e^{-j\omega T} + A_2 e^{-j2\omega T}}{1 + B_1 e^{-j\omega T} + B_2 e^{-j2\omega T}} \\ &= \frac{A_0 e^{j\omega T} + A_1 + A_2 e^{-j\omega T}}{e^{j\omega T} + B_1 + B_2 e^{-j\omega T}} \end{aligned}$$

展开这个指数项并重新组合得

$$H(e^{-j\omega T}) = \frac{[(A_2 + A_0)\cos\omega T + A_1] + j[(A_0 - A_2)\sin\omega T]}{[(B_2 + 1)\cos\omega T + B_1] + j[(1 - B_2)\sin\omega T]} \quad (2-32)$$

计算机程序1*可用来计算(2-32)式右边的值。以FORTRAN IV语言编写了这个程序。

D. S 平面到 Z 平面的变换

在第Ⅲ节中讨论的很多数字滤波器的设计方法涉及到模拟滤波的数字化。这些间接的设计方法要求从 S 的函数转换到 Z 的函数。本段讨论各种绘制从 S 平面到 Z 平面变换的技巧，并且比较各种变换的相对优缺点。计算系数的公式不予推导，但可以从文献〔6〕看到。

1. 标准 Z 变换

这个变换是 Z 变换定义的简单推广。一个 S 的有理函数展开为部分分式，并且计算每一项的 Z 变换。假如 RR 表示部分分式展开式中余项的实部，而 RI 表示虚部，则实数项按下式变换：

$$\frac{RR}{s-u} \rightarrow \frac{A_0}{1+B_1 z^{-1}} \quad (2-33)$$

这里

$$A_0 = T(RR)$$

$$B_1 = -\exp(uT)$$

共轭项可以合并，并按下式变换：

$$\frac{RR+jRI}{s-u-jv} + \frac{RR-jRI}{s-u+jv} \rightarrow \frac{A_0 + A_1 z^{-1}}{1+B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2}}, \quad (2-34)$$

这里

$$A_0 = 2T(RR)$$

$$A_1 = 2T\exp(uT)[RR\cos(vT) + RI\sin(vT)]$$

$$B_1 = 2\exp(uT)\cos(vT)$$

$$B_2 = \exp(2uT)$$

因为这个变换包含关系式 $z^{-1} = e^{-sT}$ ，所以从 S 平面到 Z 平面的绘制如以前图2-2所

* 计算机程序见原文116—125页——译注

叙述的一样。注意到，在 S 平面中每一条由 $\omega = (n + 1/2)\omega_s$ 和 $\omega = (n - 1/2)\omega_s$ 限定的条带（这里 n 是整数），变换到整个 Z 平面中。所以，以后每一条的变换图和基本频带的函数图重迭。假如在 $\omega > \omega_s/2$ 时，函数 $H(s)$ 有任何有效响应（即，极矢量乘积除零矢量乘积对于 $\omega > \omega_s/2$ 不能忽略）则会出现频率折迭，并且这个变换是不满意的。因而标准的 Z 变换仅对带限函数适用。这个问题和抽样信号的讨论有关。然而，在现在的情况中，除输入信号外传递函数本身也必须是带限的。在 $H(z)$ 不是充分带限的情况下，可以在级中插入一个低通“保护”滤波器以使变换成功。

2. 双线性 Z 变换

为了防止频率折迭问题，寻找一种变换，将整个 S 平面变换到 Z 平面。作为第一步，把整个 S 平面变换到由直线 $s' = \pm j\omega_s/2$ 限定的 S' 平面。变换关系是

$$s = \frac{2}{T} \tan\left(-\frac{s' T}{2}\right) \quad (2-35)$$

注意，这个变换也就是整个 S 平面绘制到各个以后的由 $\omega' = (n + \frac{1}{2})\omega'_s$ 和 $\omega' = (n - \frac{1}{2})\omega'_s$ 限制的条带中（对 n 是整数）。这个条件是必要的，因为以后 Z 的函数在频率上必然是周期性的。因此， $z = e^{-s' T}$ 代入 (2-35) 式，则双线性 Z 变换成为，

$$s = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{s' T}{2}\right) = \frac{2(1 - e^{-s' T})}{T(1 + e^{-s' T})} = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} \quad (2-36)$$

这个变换把 S 平面的整个左半部画在 Z 平面的单位圆内部。因为没有折迭出现，折迭误差被消除。而为此付出的代价是频率标度有非线性弯曲。在 (2-35) 式中，假如 $s' = j\omega'$ 和 $s = j\omega$ 则

$$\frac{\omega T}{2} = \tan\left(\frac{\omega' T}{2}\right) \quad (2-37)$$

因为 ω' 是真正变换到 Z 平面的频率，频率标度的弯曲由正切函数产生。然而，在实行变换之前预先扭曲设计频率，通常可以得到满意的结果。

3. 匹配 Z 变换

这个变换产生一个零点和极点与连续函数匹配的数字传递函数。这个变换是

$$s \rightarrow e^{sT} = z \quad (2-38)$$

则实极点和实零点按照

$$s - u_1 \rightarrow 1 + A_1 z^{-1} \quad (2-39)$$

变换。上式中

$$A_1 = -\exp(u_1 T)$$

复极点和复零点合并为二次因式，并按照

$$(s - u)^2 + v^2 \rightarrow 1 + A_1 Z^{-1} A_2 Z^{-2} \quad (2-40)$$

变换。这里

$$A_1 = -2\exp(uT)\cos(vT)$$

$$A_2 = \exp(2uT)$$

匹配 Z 变换保持了频率响应曲线的形状。Golden 指出 [6]，为了得到满意的结果，

有时可能必须把 $H(z)$ 乘上 $(1+z^{-1})^n$ 形式的项。这个运算等价于在半抽样频率上插入 n 个附加零点到这个数字传递函数中。

4. 其它变换

Kaiser[1] 讨论了各种其它从 S 平面到 Z 平面的变换, 可以利用这些变换得到特殊的结果。一个重要的特殊变换是,

$$s \rightarrow \frac{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}{z^2 - 1} \quad (2-41)$$

这个变换是双线性 Z 变换的变种, 把 S 平面的整个虚轴画入 Z 平面的单位圆的上、下弧两边。规定 $s = 0$ 并对 Z 解 (2-41) 的分子, 则可看出 S 平面的原点变到 $e \pm j\omega_0 T$ 点。于是, 对低通 $H(s)$ 运用这个变换产生一个具有中心频率为 ω_0 的数字带通 $H(z)$ 。假如我们用 ω_A 表示模拟截止频率, 用 ω_D 表示数字截止频率, 则 (2-41) 式可以写成方程式

$$j\omega_A = \frac{e^{j2\omega_0 T} - 2e^{j\omega_D T} \cos \omega_0 T + 1}{e^{j2\omega_D T} - 1}$$

或

$$\omega_A = \frac{\cos \omega_0 T - \cos \omega_D T}{\sin \omega_D T} \quad (2-42)$$

频率弯曲也是明显的, 但是和双线性 Z 变换一样, 利用预扭曲可以得到有用的结果。

5. S 平面到 Z 平面变换的摘要

本段所讨论的每一种变换都具有一些优点和缺点。在数字滤波器的设计中, 一个变换的选择必然取决于这些因素。

首先, 标准 Z 变换是一个指数的变换, 需要传递函数 $H(s)$ 的部分分式展开式和附带的分母多项式的因式分解。这个变换保持脉冲时间响应曲线的形状; 但因为频率折迭, 仅对于低通和带通变形的带限函数是用的。

双线性 Z 变换是一个代数变换, 这种变换容易实现, 并且它不需要简化 S 的传递函数。但因为频率弯曲, 所以这种变换仅对幅度分段为常数的函数有用。双线性 Z 变换保持平的增益特征。

匹配 Z 变换像标准 Z 变换一样, 在形式上是指数的, 但仅需要 $H(s)$ 的因式形式, 不要部分分式展开式。它保持频率响应特征的形状, 并对于高通和带阻滤波器给出好的结果。

III 数字滤波器设计方法

已经指出, 可用下面的数字传递函数形式来描述数字滤波器

$$H(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\sum_{j=0}^N a_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=0}^M b_j z^{-j}} \quad (3-1)$$

方程式(3-1)是通用的,并适用于所有的数字滤波函数。滤波器的性质完全由 a_j 和 b_j 决定。并且确定这种系数几乎就是整个滤波器的设计问题。

数字滤波器通常分为“循环的”或“非循环的”。参照(3-1)式,假如 b_j 中至少一个不为零,就称这个滤波器是循环型的;即计算现在的输出值不仅需要过去和现在的输入值,而且也需要过去的输出值(反馈)。假如所有的 b_j 为零,则这个滤波器称非循环或横向型的;即,这个输出仅仅是输入值加权的线性组合。这个滤波器也称为“抽头延迟线”滤波器。

两类滤波器的设计方法显著不同,并且每一类有它的不同的特性。通常非循环滤波器需要大量的项以能在频率响应上得到相对陡峭的变化。但非循环滤波器具有极好的相位特性曲线,在某些情况下,是很线性的。反之,循环滤波器能以较少的项提供陡峭的截止特性,但相位特性曲线是差的。

在第IV节将要指出,目前实时数字滤波器的实现容易多了,并且当利用循环滤波结构时更现实。由于这个原因,本文对非循环滤波的讨论是简短的。为了允许以后实时处理,所有的数字滤波器的设计例子是循环型的。

A 非循环数字滤波器

非循环数字滤波器的设计方法分成三类。第一类是经典的数字方法。在这个方法中,使数字分析中的单位算符“ E ”和 Z 变换算符相对应后,对于等间隔数据的经典的插入公式和微分公式就能直接数字化。这些滤波器仅在低频时是好的,并且它们相当于利用幂级数展开式的开头几项。这方法主要局限于函数是积分、内插、微分等等的滤波器。

第二类方法涉及到付立叶级数的应用。假如在 $|\omega| < \omega_s/2$ 区间上以付立叶级数形式展开所要求的频率响应的值,则以余弦项(或正弦项)型式写出的结果是,

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega T) \quad (3-2)$$

但,因为 $Z^{-1} = e^{-j\omega T}$, (3-2)式可写为滤波器要求的形式:

$$H(z) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^n + z^{-n}) \quad (3-3)$$

这个滤波器具有无穷多个项,因而只有通过切断这个级数作近似时滤波器才是可以实现的。对快速收敛的级数这个近似是好的,但假如在需要的频率响应中,存在不连续的或陡峭的变化,则这个近似是差的。

非循环滤波器第三类设计方法涉及到去寻求一个较好的收敛级数,或系统加权误差函数。存在利用切比雪夫级数,最小二平方近似和“窗口”函数的方法。*Kaiser*[1]广泛地讨论了这个问题并举了几个例子来说明设计方法。

B 循环数字滤波

在时间域或在频率域都可以完成循环数字滤波的设计。过去的抽样数据滤波器的设计者关心的是阶跃响应,峰值过冲等等,并且综合和分析大量的传递函数以满足像上述

这样一些时间域的判据。近年来，因为数字信号处理的范围已经发展，重点更多地放在频率域上的稳态响应，Gold和Rader〔4〕已把各种在频率域上设计数字滤波器的方法列成公式。Golden〔6〕对于这些方法的发展也有贡献；而且他提出了一个本质上能完成在本节中提到的所有设计计算的计算方案。这个方案本文的作者没有利用过。

循环滤波器的设计通常有两个方法。即是直接设计法和间接设计法。后一个方法是更为流行的，用许多标准的连续时间滤波器作为中间设计步骤。

1.直接设计方法

这个方法直接根据滤波器的技术要求用计算方法以确定系数 a_i 和 b_i 。某些方法涉及到利用多项式近似的理论。另一个方法是直接在 Z 平面设置极点和零点〔9〕，因而可能去执行一个迭代或试凑过程。对于非标准形式（低通、带通等等）的特殊响应，可以利用这些设计方法。本文对此不作进一步的讨论。

2.由模拟滤波器设计到数字滤波器设计

数字滤波器的间接设计方法分两步实现。首先设计一个模拟滤波器的 $H(S)$ 满足这个滤波器的技术要求。然后对这个模拟函数进行一个变换以确定一个数字传递函数 $H(z)$ 。按照这个方法，就可以利用几年前已经得到发展的有关连续滤波器的很多设计和综合技术。参考文献〔10〕对这个课题进行了广泛的论述分析。

a. 连续滤波器的设计问题

连续滤波器的标准形式已经导出。并在文献〔10〕中充分提供了这方面的资料。这种滤波器用布特渥斯 (Butterworth)，切比雪夫 (Chebyshev)，椭圆 (Elliptic)，勒拿 (Lerner)和其他的名字来命名。每一类滤波器有其一定的特征，这些特征确定了对它如何最恰当的使用。下面简短地概述其中布将渥斯和切比雪夫的设计以便提供数字滤波器设计的基础。

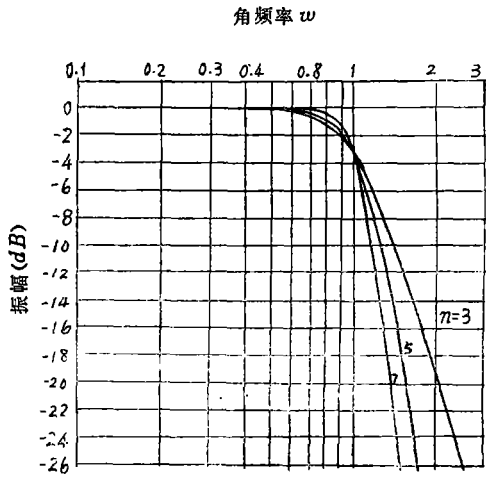


图 3—1 布特渥斯低通滤波器的响应

(1) 布特渥斯滤波器。布特渥斯滤波器可用下面关系来表示,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}} \quad (3-4)$$

这里 ω_c 是截止频率。 $|H(j\omega)|^2$ 是滤波器传递函数的平方值。可以指出, 传递函数 $H(s)$ 是一个分子为常数而分母为 n 次多项式的有理函数。例如, ω_c 归一化到1弧度/秒的四阶布特渥斯滤波器的传递函数为,

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613s^3 + 3.414s^2 + 2.613s + 1} \quad (3-5)$$

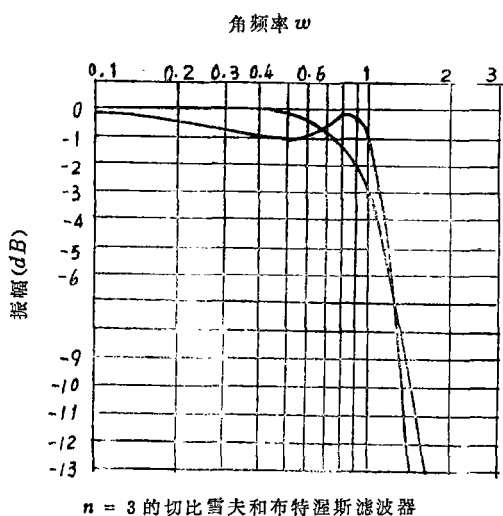


图 3-2 切比雪夫低通滤波器的响应

在表中^[10]很容易地求出四阶滤波器的这些系数。图 3-1 画出了取 n 在阻带内为三种值的布特渥斯频率响应曲线。一般说来, 这个响应的特征有一个平坦的通带以及频率每增加10倍衰减增加 $20n$ 分贝。

(2) 切比雪夫滤波器。用下面的关系来确定切比雪夫滤波器,

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_c)} \quad (3-6)$$

这里 V_n 是 n 阶的切比雪夫多项式。切比雪夫滤波器的特征是通带内有相等的波纹和阻带内有单调的衰减。波纹的幅度 δ 为,

$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (3-7)$$

切比雪夫滤波器的传递函数也是 S 的有理函数。它的系数由特定的 ε 值来确定, 计算这些系数是比较复杂的, 但已有很好的方法^[10]。图 3-2 画出了典型的三阶切比雪夫滤波器的响应曲线。一般来说, 在相同的阶数情况下, 切比雪夫滤波器的阻带响应的斜率比布特渥斯滤波器的陡峭。

(3) 频率标度。因为大多数的连续滤波器用归一化频率(即, $\omega_c = 1$ 弧度/秒)来设计。为了把滤波器的响应移到我们所关心的频带, 需要频率标度。假如我们用 ω_c 表示要求的截止频率, 则为了把归一化的传递函数的频率响应移到 ω_c , 作这样的变换,

$$s_n = \frac{s}{s_c} \quad (3-8)$$

(4) 频率转换。从一个低通设计作下面的频率转换可以得到高通, 带通和带阻滤波器,

$$\text{低通到高通} \quad s \rightarrow \frac{\omega_c}{s} \quad (3-9a)$$

$$\text{低通到带通} \quad s \rightarrow \frac{\omega_0}{BW} \left(-\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) \quad (3-9b)$$

$$\text{低通到带阻} \quad s \rightarrow \frac{BW}{\omega_0 \left(-\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)} \quad (3-9c)$$

在(3-9)式中, $BW = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ 和 $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c2} \cdot \omega_{c1}}$ (几何平均值)。因为包含了它们本身的频率标度, 所以这些转换全部按归一化的低通 $H(s)$ 来进行。注意, 当用带通和带阻转换时, ω_0 不一定要在这个频带的中心。因此, 最后的设计可能与预定的中心频率稍微有点不对称。

b. 设计过程

一个要求的频率响应, 本质上由通带中的特性曲线和阻带中的衰减量来确定。例如, 需要设计一个带通滤波器, 在1000赫通带中心是平坦的, 在800赫和1200赫(截止频率)下降3分贝, 在500赫和1500赫下降20分贝。平坦的特性通常要求采用布特渥斯方案, 20分贝衰减确定了布特渥斯滤波器的阶数, 并且3分贝频带指定了所要求的频率变换。在提出最终的数字滤波器方案时, 抽样频率是另一个重要的技术指标。

下面决定采用哪一种形式的 Z 变换。通常标准 Z 变换如先前讨论过的仅被用于带限函数以阻止频率折迭。带限函数是 S 的典型函数, 它的分母是一个高阶函数并且它的截止频率为半抽样频率的几分之一。如果不通过实际测量这个最终的滤波器, 通常就不能保证标准 Z 变换设计成功。

当频率特性曲线是相对地分段为常量时, 双线性 Z 变换是很有效的。因此, 可以令人满意地变换大多数布特渥斯方案和小波动的切比雪夫方案。双线性 Z 变换的代数式使它容易实现, 只不过需要先扭曲 S 域的临界频率以在 Z 域中达到预期的响应。

最后, 为实现高通、带阻或除分段常量以外的频率特性曲线, 可以用匹配 Z 变换。

以上讨论的数字滤波器设计方法将在下面章节中用一些例子来说明。

C 循环数字滤波器的例子

下面的例子用来说明前面讨论的数字滤波器设计方法。滤波器取低的阶数, 以便进行数字处理。所有的计算用电子计算机来完成, 其结果舍到十进制的小数第六位。对于更复杂的滤波器, 几乎肯定要用到像Golden^[6]写的计算机程序。

例1 设计一个在抽样频率为2000赫工作的低通数字滤波器。它的截止频率(3分贝)是200赫。并且在通带内响应是平坦的。

1. 选择二阶布特渥斯滤波器, 并利用双线性 Z 变换。需要预先扭曲模拟的截止频率。从(2-37)式^①

$$\omega_A = \tan \left(\frac{\omega_D T}{2} \right)$$

$$\omega_A = \tan \left(\frac{2\pi \cdot 200 \cdot 5 \times 10^{-3}}{2} \right) = \tan(0.314159) = 0.324920 \quad (3-10)$$

① 为了在其后的代换中避免处理大量数据, 省去系数 $2/T$ 。假如保留这个系数, 结果总是可以简化到相同的答案。

注意，把模拟的截止频率 ω_A 预先扭曲到 $(0.324920)(2/T) = 207$ 赫。

2. 归一化的二阶布特渥斯滤波器是

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.414213s + 1} \quad (3-11)$$

$s = s / 0.324920$ 代入(3-11)式得

$$H(s) = \frac{0.105573}{s^2 + 0.459506s + 0.105573} \quad (3-12)$$

3. 用 $s = (z - 1)/(z + 1)$ 代入(3-12)式得到双线性Z变换。结果是，

$$H(z) = \frac{0.105573(z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 2z + 1 + 0.459506(z - 1)(z + 1) + 0.105573(z^2 + 2z + 1)}$$

整理为，

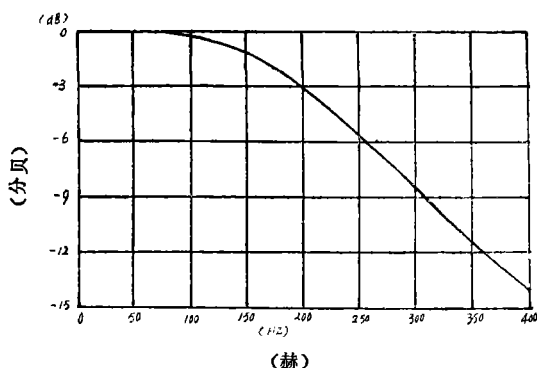


图 3—3 低通数字滤波器的响应

$$H(z) = \frac{0.067455 + 0.134910z^{-1} + 0.067455z^{-2}}{1 - 1.142980z^{-1} + 0.412801z^{-2}} \quad (3-13)$$

用计算程序 1 求得这个数字滤波器的频率响应值，结果已画图 3—3 中。3 分贝频率正好是 200 赫。(3-13) 式的传递函数的极点是：

$$z = 0.571490 \pm j 0.293598$$

这些极点都在单位圆内侧，表明它是稳定的滤波器。

例 2 设计一个带通数字滤波器，在抽样频率为 2000 赫下工作。截止频率 ω_{D1} 和 ω_{D2} 分别是 200 赫和 500 赫，并且这个响应在通带内是平坦的。

1. 选择二阶布特渥斯，又可以利用已给出的(2-41)式的带通双线性Z变换。这个变换将从一个S的二阶函数得到一个Z的四阶函数。

2. 为了方便起见再写出(2-42)式

$$\omega_A = \frac{\cos \omega_0 T - \cos \omega_D T}{\sin \omega_D T} \quad (3-14)$$

可以预想到，和每一个临界数字频率相联系的模拟频率符号彼此是相反的。因而，由 $H(S/|\omega_A|)$ 变换得到的数字传递函数将能在两个临界频率 ω_{D1} 和 ω_{D2} 处满足这个响应的技术指标。从下面式子中解出 $\cos \omega_0 T$

$$\frac{\cos \omega_0 T - \cos \omega_{D1} T}{\sin \omega_{D1} T} = \frac{-\cos \omega_0 T + \cos \omega_{D2} T}{\sin \omega_{D2} T} \quad (3-15)$$

用三角恒等式对 (3-15) 式进行运称, 结果是,

$$\cos \omega_0 T = \frac{\cos \frac{1}{2} [\omega_{D1} T + \omega_{D2} T]}{\cos \frac{1}{2} [\omega_{D1} T - \omega_{D2} T]} \quad (3-16)$$

(3-15) 式一下子就能推导出来。然而它在带通双线性 Z 变换设计过程中是一个有用的公式。

3. 回到这个例子

$$\cos \omega_0 T = \frac{\cos \frac{1}{2} (700 \cdot 2\pi \cdot T)}{\cos \frac{1}{2} (-300 \cdot 2\pi \cdot T)} = 0.509523 \quad (3-17)$$

4. 用 (3-13) 式

$$\omega_{D1} T = (200)(2\pi)(0.5 \times 10^{-3}) = 0.62832$$

$$\text{和} \quad \omega_A = \frac{0.509523 - \cos 0.62832}{\sin 0.62832} = 0.509523 \quad (3-18)$$

对 $\omega_{D2} T = 1.57080$ 得到相同的结果, 这证明了 (3-16) 式的正确性。

5. 以 $s = s / 0.509523$ 代入归一化二阶布特渥斯传递函数给出,

$$H(s) = \frac{0.259614}{s^2 + 0.720574s + 0.259614} \quad (3-19)$$

6. 现在用 $s = (z^2 - 1.019046z + 1) / (z^2 - 1)$ 代入 (3-19) 式得到这个传递函数。经过大量的代数运算后, 这个结果是

$$H(z) = \frac{0.131106 - 0.262212z^{-2} + 0.131106z^{-4}}{1 - 1.400064z^{-1} + 1.272216z^{-2} - 0.658419z^{-3} + 0.272217z^{-4}} \quad (3-20a)$$

$$\text{或} \quad H(z) = \frac{(0.362085 - 0.362085z^{-2})^2}{(1 - 1.222023z^{-1} + 0.603825z^{-2})(1 - 0.178041z^{-1} + 0.450821z^{-2})}^* \quad (3-20b)$$

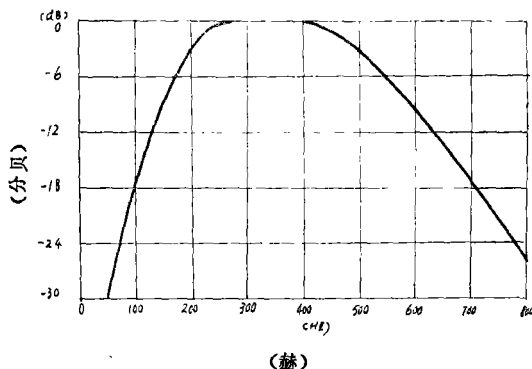


图 3-4 带通数字滤波器的响应

译注: * 原文有误, 已更改。

用 (3—20b) 式和计算程序求出这个滤波器的频率响应。结果完全满足技术要求，并画在图 3—4 中。这个带通数字滤波器的极点位于

$$z = 0.611011 \pm j0.480094$$

$$z = 0.089020 \pm j0.665505$$

这个滤波器也是稳定的。

例 3 设计一个带通数字滤波器，这个滤波器也是稳定的。它在通带内的频率特性曲线和高斯或正态的曲线的倒数相同。（在第 VI 节 C 段给出这种滤波器的运用）参照图 3—5。中心频率是 450 赫，抽样频率是 2000 赫。

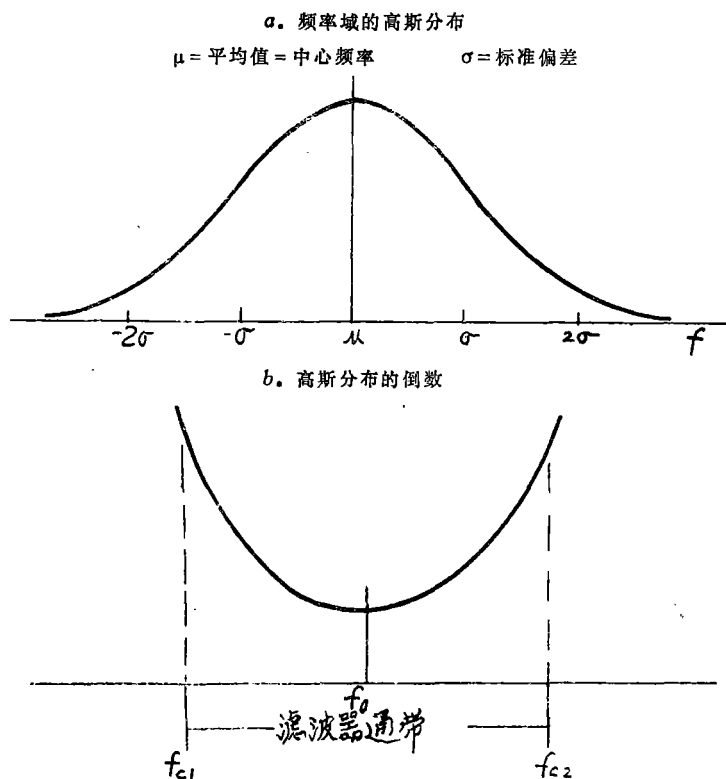


图 3—5 噪声滤波器的技术要求

1. 图 3—5 b 的形状可以用二阶切比雪夫滤波器来近似。（第 n 阶切比雪夫滤波器有 n 个峰和 $n-1$ 个谷，因此，一个大 ε 值的二阶滤波器在其通带的中心有一个凹点。）在这里仅扼要地讲这个特殊切比雪夫滤波器的设计。

计算出一个 ε 值以给出一个凹谷的形状，它近似于正态曲线的倒数。为此，必须确定曲线统计量和频率之间的关系^①。再利用标准的方法设计这个归一化的滤波器，最后作一个频率转换以给出所需要的带通滤波器。这个结果是

① 在第 VII 节 C 段，高斯曲线的原点看成是一个连续载波的频谱，这个连续载波是由噪声调频的。因此，这个线的宽度和频率之间的关系由所用的实际硬件决定。

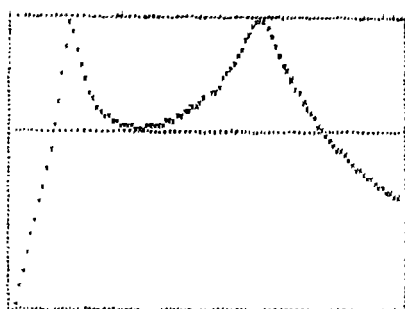


图 3—6 模拟噪声滤波器的响应

$$H(s) = 0.515422s^2 / (0.000000052s^2 + 0.00003993s^3) + 1.250115878s^2 + 283.77737s + 2610409.654 \quad (3-21)$$

这个滤波器的频率响应, ① $|H(j\omega)|$ 在图 3—6 中示出。结果是完全令人满意的。现在所研究的问题是获得一个产生相同频率特性曲线的数字传递函数。

2. 为获得这个所需要的数字传递函数, 选择匹配 Z 变换。这个传递函数 $H(s)$ 的极点是

$$s = -288.74512 \pm j4639.3984$$

$$s = -95.23544 \pm j1521.2546$$

用 (2—40) 式中已经给出的匹配 Z 变换关系可以计算出数字传递函数的系数。对于这两个二阶传递函数的结果是,

$$a_0 = 1.0$$

$$a_1 = -1.0$$

$$b_1 = 1.178165$$

$$b_2 = 0.479203$$

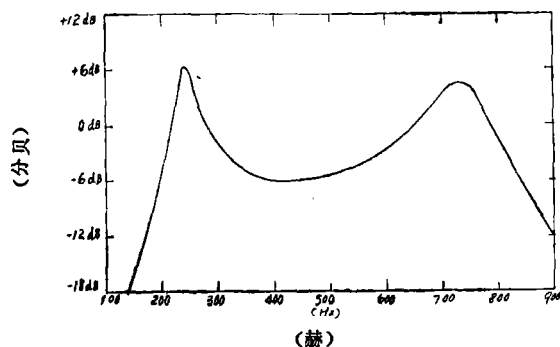


图 3—7 数字噪声滤波器的响应

和

$$a_0 = 1.0$$

$$a_1 = -1.0$$

$$b_1 = -1381435$$

$$b_2 = 0.909159$$

① 图 3—6 是根据 Calahan 网络分析计算程序 (I) 的实际输出。这个程序在本文提到的模拟传递函数综合方面是非常有用的。

则、这个完整的数字传递函数是

$$H(z) = \frac{K(1 - z^{-1})(1 - z^{-1})}{(1 + 1.178165z^{-1} + 0.749203z^{-2})(1 - 1.381435z^{-1} + 0.909159z^{-2})} \quad (3-22)$$

这里 K 是放大系数。

3. 考察 (3-22) 式给示的传递函数的频率响应, 发现在两个峰值频率处的值相差 5.5 分贝。假如对这个传递函数在半抽样频率处插入一个一阶零点, 则所需要的对称响应可以更好地近似。修正后的传递函数响应画在图 3-7 中, 放大系数 K 调到中心频率处有 6 分贝衰减。

IV. 数字滤波器的实现

设 $H(z)$ 确定了一个由第 II 节所讨论的方法之一所导出的任意数字传递函数。对于输出转换 $y(z) = H(z)x(z)$,

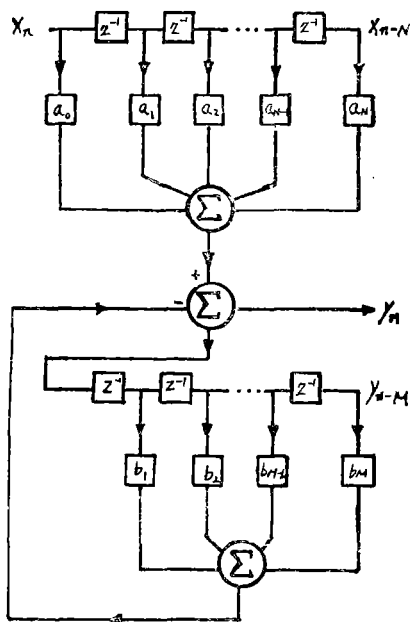


图 4-1 循环数字滤波器

的解可以写为,

$$y(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} x(z) - \sum_{i=1}^M b_i z^{-i} y(z), \quad (4-1)$$

或者, 在时间域中理解 z^{-1} 为单位延迟算符,

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^M b_i y_{n-i} \quad (4-2)$$

直接用数字元件可以实现这个差分方程。参照图 4—1。每一个 z^{-1} 的方块表示一个抽样延迟。的实时的硬设备中,即指的是一个一字长的存储器,它的毕特容量由表明 x_i 和 y_i 的精度 的毕特数字来确定。在这个滤波器中对于每一个分路都需要一个乘法器。一般为了允许改变传递函数,这些是可变系数的乘法器。注意,这些相乘的系数和出现在传递函数 $H(z)$ 中的系数相同。这是以前的基本结论,即一旦这些系数被确定实质上就完成了这个数字滤波器的设计。这与模拟滤波器设计大不相同,传递函数 $H(s)$ 的确定通常仅是模拟滤波器设计问题的一小部分。

加法器和乘法器一起构成一个专用计算机或数字滤波器的运算单元。(4—2)式的执行过程包括按 $f = \frac{1}{T}$ 速率驱动这个计算机,并且在每一个抽样间隔内进行指定的运算。在完成这个计算之后,移位寄存器或延迟单元的内容必须移位一次到一个对下一个抽样周期是适当的位置。例如,在时间 $t = nt$ 存入的输入值为 x_n ,则一个周期以后在 $t = (n+1)T$,这个值必须存入 x_{n+1} 的地址。

一般, $H(z) = Y(z) / X(z)$ 这个式子是一个 Z^{-1} 的多项式之比,它的分子是 N 次,分母是 M 次。假如, $N > M$ 则在 (4—2) 式中计算输出的现在值 y_n 将需要知道输入值 x_{n+1} 。例如,若 $N=5$ 和 $M=4$,则 y_4 的计算需要包括 x_5 这个值。因为实际上这是不可能的,所以一般可以指出,一个物理上可实现的数字传递函数,它的分子的次数必须小于或等于分母的次数。

可以看出,数字滤波器的实现基本上涉及到用一个计算装置解一个由这个滤波器数字传递函数确定的线性差分方程。因而,执行代数运算的次序和存储中间解答的方法会影响到滤波器的效率和所得到结果的精度^①。一个数字滤波器称为是规范形式的,即假如给定阶数 n ,它能以最少的加法器、乘法器和时延来表示,现在来讨论三种典型的滤波器结构。

A. 直接滤波形式

考虑一般二阶数字传递函数

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (4-3)$$

$H(z)$ 可以写成 $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 两个传递函数的乘积。则 (4—3) 式变成

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \cdot \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1} \quad (4-4)$$

并且, $y(z) = x(z) H_1(z) H_2(z)$ (4-5)

规定中间变量 $W(z) = x(z) H_1(z)$, 则以常用的表示法

$$\begin{aligned} W_n &= x_n - b_1 W_{n-1} - b_2 W_{n-2} \\ y_n &= a_0 W_n + a_1 W_{n-1} + a_2 W_{n-2} \end{aligned} \quad (4-6)$$

这个一般结果是,把 (4—2) 式的单个差分方程形式变换为两个下述形式的差分方程,

^① 效率指的是,计算速度和硬件的有效利用。这两项成为衡量一个数字滤波器有用性的重要“标准”。

$$W_n = x_n - \sum_{i=1}^M b_i W_{n-i}$$

$$y_n = \sum_{i=0}^N a_i W_{n-i} \quad (4-7)$$

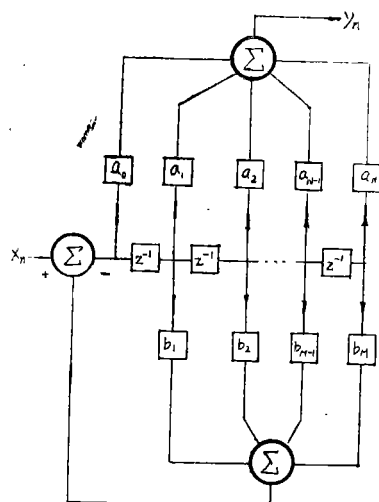


图 4—2 典型的循环数字滤波

在图 4—2 中给出了 (4—7) 式的图解表示法。注意，图 4—1 和图 4—2 在形式上是相似的，在图 4—1 中含有重复的延迟单元。因此，图 4—2 是一个规范性的滤波结构。这意味着更有效地使用硬件。

以图 4—1 和图 4—2 的形式可以实现任意阶的数字滤波。这两种称为直接形式，并且它们是最简单的循环滤波器结构。然而，数值考虑表明，直接形式通常仅对低阶滤波是令人满意的。关于数值考虑将在 IV 节 D 段更详细的讨论。

B. 串联形式

一般的 n 阶数字传递函数可以分解为二阶传递函数的乘积。这个结果是

$$H(z) = a_0 \prod_{i=1}^m \frac{1 + \alpha_{1i} z^{-1} + \alpha_{2i} z^{-2}}{1 + \beta_{1i} z^{-1} + \beta_{2i} z^{-2}}, \quad (4-8)$$

这里 m 是 $(n+1)/2$ 的整数部分。注意，对于具有复共轭对的极点和零点的 $H(z)$ ，系数 α_i 和 β_i 总是实数。通过上一节相同的讨论，结果差分方程式如以下形式

$$y_1(z) = H_1(z) x(z)$$

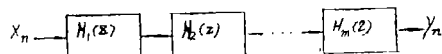


图 4—3 串联形式

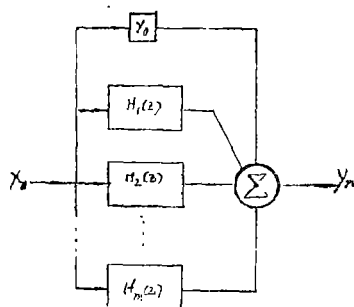


图 4—4 并联形式

$$\begin{aligned} y_2(z) &= H_2(z) y_1(z) \\ &\vdots \\ y_m(z) &= H_m(z) y_{m-1}(z)^* \end{aligned} \quad (4-9)$$

图 4—3 指出了 (4—9) 式的图解表示, 可以看出这是一个二阶滤波器的串联形式, 并且这个结构有若干重要的特征。首先, 这种结构容易多次复用。用一个基本的二阶滤波器结构和适当的计时及控制电路, 就能用时间分配这个二阶结构来实现高阶滤波器。在时间序列中对第 m 个子滤波段, 要提供适当的系数 α_i, β_i 。

其次要注意, 例如 $H(z)$ 在单位园上含有零点, 在含有一个二阶零点的子滤波段中系数 α_{2i} 为 1。这意味着, 少做一次乘法。上述情况常常在用双线性 Z 变换设计带通和带阻滤波器时发生。

C. 并联形式

展开 $H(z)$ 为二阶项的部分分式则得到第三种典型的数字滤波器。这个结果是

$$H(z) = \gamma_0 + \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_{0i} + \gamma_{1i}z^{-1}}{1 + \beta_{1i}z^{-1} + \beta_{2i}z^{-2}} \quad (4-10)$$

这里 $\gamma_0 = a_n/b_n$ ①。

(4—10) 式产生如下形式的差分方程式, 这个滤波器的结构如图 4—4 所示。

$$\begin{aligned} y_0(z) &= \gamma_0 x(z) \\ y_1(z) &= H_1(z) x(z) \\ &\vdots \\ y_m(z) &= H_m(z) x(z) \\ y(z) &= \sum_{i=0}^m y_i(z) \end{aligned} \quad (4-11)$$

在性能上这种并联形式和串联形式是能相比的。根据所包含的代数数量, 可以对两者进行选择。和所用的 Z 变换有关, 为获得一个最终的滤波器结构的工作量可能是相当大的, 尤其是对高阶滤波器。

① 另一种是 $H(z)$ 的展开式写为 Z 的函数而不是 Z^{-1} 的函数。

* 原文误为 $y(z) = H_m(z) y_{m-1}(z)$ ——译注

D. 数值考虑

到现在为止, 假定数字滤波器系数的计算和这些系数的控制是完全精确的。因为这种情况是不可能的, 并且数字滤波的输入抽样也仅是模拟信号瞬时值的近似, 因此实际的结果可能和理论的结果偏离很大。

正如任何其它的数字处理一样, 所用硬件及计算方法很严重地影响数字滤波器计算出的“答案”精度。计算机的有限字长是精度的基本限制。由于这个限制而引进的误差是: (1) 滤波器系数的有限精确度; (2) 输入数据量化到一个特定的毕特数; 以及 (3) 乘法和加法中的舍入误差。参考文献[1]和[2]严格处理了数字滤波器中的量化效应。其结果概括如下。

数值问题还能从滤波器的设计开始。第Ⅲ节的设计方法涉及因式分解和部分分式展开式。一般说来, 它介绍了在 S 域内执行这些运算和对产生的子滤波器数字化。虽然双线性 Z 变换不要求对 S 的多项式进行因式分解, 但假如这样做了就能得到更好的效果。应该避免 Z 的高阶多项式产生和操作。尤其是对 Z 的多项式求根可能相当困难。因为零点和极点在 Z 平面中紧密聚集。

通常认为较高的抽样频率总会产生较好的结果, 是并不正确的。实际上较高的抽样频率要求较高的计算精度。假如抽样频率增加到超过一定限度, 性能可能恶化。

在数字滤波器中最关键的数值问题常常是滤波系数的量化。这些系数确定滤波器零点和极点的位置, 系数的任何扰动引起零点和极点位置的偏移。对于高阶滤波器, 极点通常聚集在 Z 平面中接近单位圆的小范围内。这些系数的扰动实际上能使滤波器变得不稳定。而且, 当用直接滤波结构时, 极点的位置对于系数的扰动是很灵敏的。因此几乎总是采用并联或串联形式来实现高阶滤波。*Weaver*等提出了一种确定极点位置对系数扰动灵敏度界限的程序。给定这些界限就能计算出所需要的系数精度。

输入信号在模数转换中的量化可以作为滤波器的输入噪声来处理。也可以把计算单位中的舍入误差作为噪声来处理, 但它可能在和所采取的结构有关的不同位置上进入滤波器。在直接和并联形式中由舍入误差引起的量化噪声是简单的相加。但是对串联形式由于串联系统中的倍增作用, 舍入误差可能使工作很不满意。利用如*Gold*和*Parder* [4]所建立的噪声模型可以完成各种实施方案的完整分析。

E. 硬件的考虑

任何一个按照数字传递函数对信号进行实时计算的装置实质上是一架专用的数字计算机。计算程序或等效地传递函数和实现方案, 可以用硬件直接放入计算机。输入数据则是信号抽样和滤波器系数。可以预料, 大规模集成电路将提供一种结构把上述计算机合并成一个尺寸小、成本低、可靠性高的标准组件。这种标准组件的设计是极困难的。现在来讨论几个比较重要的考虑。

首先考虑选择抽样或钟频率。数字滤波器可惜在这方面的要求是自相矛盾的。为了获得陡的截止, 较窄的带宽, 深的凹谷等等, 需要计算时间相当长的高阶滤波函数。因为计算必须在一个信号抽样间隔内完成, 为了供给较长的时间 T , 抽样频率必须降低。

然而,当降低了抽样频率,由于 $\omega_s < \omega_s/2$ 关系式必须保持,则可用的频谱下降。

等二个重要的考虑是计算机字长。实时数字滤波的成本和复杂性与必须存储和操作的毕特数成正比。看来减小数算机字长的成功关键在于导出一种对数值不精确性较不敏感的新的实施方案。

因此一般来说,最重要的是设计和筹备专用的硬件,它们能有效地、精确地和尽可能地执行数字滤波形式的计算。在一个数字滤波器中最需要的计算之一是乘法。为了说明某些数字滤波器特有的逻辑设计问题,在附录A中详细地画出了一个二进制串联乘法器。这个乘法器仿照参考[8]中由Jackson等提出的一般设计。

F. 快速付立叶变换(FFT)

到目前为止,所讨论的实现数字滤波器的方法都涉及到把 z^{-1} 作为单位延迟标符并直接从时间域得到一个线性差分方程的解。这种方法对于分析正弦输入的数字传递函数的稳态响应是完全有效的,并且已经指出在实时应用中这是很现实的。但是,对于复杂滤波器,尤其是对于具有许多项的非循环滤波,乘法和加法数量要得太多。在此情况下,用快速付应叶变换的高速褶积实现滤波器变得有希望了。一个输入序列和一个滤波器脉冲响应的离散褶积是

$$y_n = \sum_{i=0}^{M-1} h_i X_{n-i}^* \quad (4-12)$$

这里 M 是褶积的抽样数。当 M 值很大时,用 Z 变换方法计算(4-12)式是困难和浪费时间的。

另一种方法是 y_n 序列值可以按下述顺序求出:(1)求出滤波器的输入序列和脉冲响应的离散付立叶变换(DFT)(2)把两个变换相乘,和(3)作这个结果的DFT反变换。这个过程很类似于在频率域中用连续付立叶变换分析连续时间信号。然而要稍多地涉及到DFT理论。^①

这个方法的现实性在于用FFT技术计算DFT的能力。

参考文献[4]和[12]中详细叙述了快速付立叶变换。简要地说,利用这个事实,即在一定条件下,可用迭代法完成这些系数的计算从而节省大量时间。一般 M 的值(抽样数)必然是一个高合成数(含有许多因素)。当 M 是一个2的幂次,则对于普通的褶积FFT的计算次数正比于 $M \log_2 M$,而不是 M^2 。

目前需要大的通用计算机,执行通过FFT的高速褶积。预料,为了实时应用,最终要把这种算法按排进专用的硬件。

* 原文误为 $y_n = \sum_{i=0}^{M-1} h_n X_{n-i}$ ——译注。

① 由于在频率域上两个DFT的乘积等效在时间域上的循环褶积,而不是(4-12)式指出的线性褶积。尽管如此,上面指出的一般结果是正确的。

参 考 文 献

- [1] Kaiser, J.F., "Digital Filters," in *System Analysis by Digital Computer*, F.F. Kuo and J.F. Kaiser, Eds. New York, Wiley 1966, ch.7.
- [2] Ragazzini, J.R., and Franklin, G.F., *Sampled-Data Control Systems*, New York, McGraw-Hill, 1958.
- [3] Kuo, B., *Analysis and Synthesis of Sampled-Data Control Systems*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1963
- [4] Gold, B., and Rader, C.N., *Digital Processing of Signals*, New York, McGraw-Hill, 1969.
- [5] G-AE Concepts Subcommittee, "On Digital Filtering," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. Au-16, pp. 303-314, September 1968.
- [6] Goldn, R.M., "Digital Filter Synthesis by Sampled-Data Transformation," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics* Vol. Au-16, pp. 321-329. September 1968.
- [7] Weaver, C.S., and others, "Digital Filtering With Applications to Electrocardiogram Processing," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics* Vol. Au-16, pp. 350-389, September 1968.
- [8] Jackson, L.B., Kaiser, J.F., and McDonald, H.S., "An Approach to the Implementation of Digital Filters," *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. Au-16, pp. 413-421, September 1968.
- [9] Nowak, D.J., and Schmid, P.E., "Introduction to Digital Filters," *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, Vol. EMC-10, pp. 210-221, June 1968.
- [10] Kuo, F.F. *Network Analysis and Synthesis*, New York, Wiley 1966, Ch. 13.
- [11] Calahan, D.A., "Linear Network Analysis and Realization Digital Computer Programs, An Instruction Manual," *University of Illinois Bulletin*, Vol. 62, no. 58,
- [12] *Special Issue on Fast Fourier Transform and its Application to Digital Filtering and Spectral Analysis*, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, Vol. Au-15, June 1967.
- [13] *XDS 9300 Computer Reference Manual*, Xerox Data Systems Reference Manual, no. 90 00 50F, March 1967.
- [14] *SYMBOL and META-SYMDQL Reference Manual*, Xerox Data Systems Reference Manual, no. 90 05 06F, August 1967.

(摘译自: 美AD.710381, 1—68页)

古经伦 译 张叔英 校)