

在随机介质中柱面扩展波的相干函数

M. M. Fitelson

引 言

在文献[1]中,作者对本课题作了初步分析。本文将提出更广泛的论述,包括推导相干函数的适用范围。在此所关心的随机介质是弱不均匀的,所以只有在传播若干波长距离之后,才会出现随机介质的影响。

推动这项工作很大程度上是,远程目标要了解声波在海洋中通过远距离的传播,在这情况下,湍流和温度梯度将导致折射率起伏。在很多情况下,有一条占优势的路径,在这路径的初端是球面波,但在若干波长之后,传播辐射在垂直面上近似于平行的射线束,同时在水平面上柱面扩展。

为在简易的模型结构上抓住这类传播的重点,我们不考虑折射而只考虑在统计上均匀和各向同性介质中的柱面扩展波。

这种模型能同平面波传播的相应解相比较。可见平面波和柱面扩展波的解有相同的适用范围。

求所得柱面波解的适用范围的方法,是平面波情况的坦坦尔斯基[2]方法的一个自然结果。

在下一节中推导相干函数。

一、相 干 函 数

因为本文讨论这样的情况,除非传播很多波长以后,随机影响是不明显的。设柱面波由柱体单频源发射产生,其半径 ϵ 满足

$$k\epsilon \gg 1, \quad (1)$$

这个源向在统计上均匀和各向同性的介质中发射声波。在柱坐标系中的波动方程是:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{(1+\mu)^2}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \epsilon \leq \rho. \quad (2)$$

设折射率起伏 μ 的平均值为零,以及 $\mu \ll 1$,则

$$(1+\mu)^2 \approx 1 + 2\mu \quad (3)$$

为简便起见,假设

$$\begin{aligned} E[\mu(\rho, z, \phi) \mu(\rho', z', \phi')] \\ = \bar{\mu}^2 \exp[-(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2)/a^2]. \end{aligned} \quad (4)$$

参量 a 是折射率的相关半径。值得注意的是,选用这样的折射率的相关函数形式仅仅是为了简便,因为所用的计算方法,对任何均匀的各向同性的相关函数都适用。

鉴于上述规定, 则

$$\phi = \phi_0(\rho) e^{i\omega t} b(\rho, \phi, z) = \phi_0(\rho) e^{i\omega t} b(\rho, s), \quad (5)$$

式中 s 表示点 (ϕ, z) 。 $\phi_0(\rho) e^{i\omega t}$ 是 $\mu = 0$ 时波动方程的解, 故 $\phi_0(\rho)$ 满足。

$$\frac{d^2 \phi_0(\rho)}{d\rho^2} + \frac{d\phi_0(\rho)}{d\rho} + k^2 \phi_0(\rho) = 0, \quad (6)$$

而 $b(\rho, s)$ 满足边条件。

$$b(\epsilon, s) = 1. \quad (7)$$

把(5)式和(6)式代入(2)式, 得到

$$\left(\frac{\phi_0}{\rho} + 2 \frac{d\phi_0}{d\rho} \right) \frac{\partial b}{\partial \rho} + \phi_0 \frac{\partial^2 b}{\partial \rho^2} + \phi_0 \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + 2\mu k^2 \phi_0 b = 0. \quad (8)$$

因 $\rho k \gg 1$, 设

$$\phi_0 = e^{ik\rho} / \sqrt{\rho} \quad (9)$$

把(9)式代入(8)式, 得到

$$2ik \frac{\partial b(\rho, s_1)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 b(\rho, s_1)}{\partial \rho^2} + \Delta_1(\rho) b(\rho, s_1) + 2\mu(\rho, s_1) k^2 b(\rho, s_1) = 0, \quad (10)$$

及其共轭方程

$$\begin{aligned} -2ik \frac{\partial b^*(\rho, s_2)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 b^*(\rho, s_2)}{\partial \rho^2} + \Delta_2(\rho) b^*(\rho, s_2) \\ + 2\mu(\rho, s_2) k^2 b^*(\rho, s_2) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_i(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \quad i = 1, 2, \\ b(\rho, s_i) &= b(\rho, \phi_i, z_i). \end{aligned} \quad (12)$$

项 $\partial^2 b / \partial \rho^2$ 和 $\partial^2 b^* / \partial \rho^2$ 给方程式(10)和(11)的解贡献反向散射。在此, 把它们忽略掉, 其影响将在下一节中估计。

定义相干函数为:

$$\Gamma(\rho, s_1, s_2) \equiv E[b(\rho, s_1) b^*(\rho, s_2)]. \quad (13)$$

在进行 Γ 的计算之前, 探讨 $b(\rho, s)$ 和 $\mu(\rho, s)$ 的一些特性是有利的。

首先考虑 μ 的协变函数, (4)式可以写成:

$$\begin{aligned} C(\rho - \rho', s - s') &\equiv E[\mu(\rho, s) \mu(\rho, s')] \\ &= \overline{\mu^2} \exp \left[-\frac{(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi)^2}{a^2} \right] \cdot \exp \left(-\frac{\rho_2^2 \sin^2 \phi}{a^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{z^2}{a^2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2,$$

$$z \equiv z_1 - z_2.$$

在一个表达式内含(14)式右端函数因子的积分时, 可以作如下的简化。因为本文讨论远程传播, ρ_1 及 ρ_2 会达到大于 a 的数值, 因而, $\exp [-(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi)^2 / a^2]$ 在 ρ_1 或 ρ_2 的尺度来看将是一陡峭函数, 如此, 可作近似如下:

$$\exp \left[-\frac{(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi)^2}{a^2} \right] = \sqrt{\pi} a \delta(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi). \quad (15)$$

于是,

$$C(\rho - \rho', s - s') \simeq \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \delta(\rho_1 - \rho_2 \cos \phi) \cdot \exp \left(-\frac{\rho_2^2 \sin^2 \phi}{a^2} \right) \exp \left(-\frac{z^2}{a^2} \right). \quad (16)$$

而且,在远程传播中,当水平间隔 $\rho |\phi|$ 很大于 a 时,相关点之间的角间隔可以很小。因为在间隔很大于 a 时,相关函数将降为渐近值,这就是以限制于小角度间隔之内。所以,(16)式变为:

$$C(\rho - \rho', s - s') \simeq \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \delta(\rho_1 - \rho_2) \exp \left(-\frac{\rho_2^2 \phi^2}{a^2} \right) \cdot \exp \left(-\frac{z^2}{a^2} \right). \quad (17)$$

(16)式和(17)式中所作的近似类似于坦坦尔斯基对平面波用过的情况【3】。

在附录A中,我们证明, $b(\rho, s)$ 是在 $\epsilon \leq \rho' \leq \rho$ 时 $\mu(\rho', z)$ 的值所组成的泛函数。从(A3)式看出,因为 $\mu(\rho, s)$ 是统计均匀和各向同性的,所以当 ϕ 和 z 作平移时 $b(\rho, s)$ 是一个统计不变量。于是,

$$\Gamma(\rho, s_1, s_2) \equiv \Gamma(\rho, \phi_1 - \phi_2, z_1 - z_2). \quad (18)$$

现在,再回到 Γ 的计算。注意到 $\partial^2 b / \partial \rho^2$ 和 $\partial^2 b^* / \partial \rho^2$ 已予忽略,以 $b^*(\rho, s_2)$ 乘(10)式, $b(\rho, s_1)$ 乘(11)式,并从(10)式减去(11)式,得到:

$$2ik(\partial/\partial\rho)[b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2)] + [\Delta_1(\rho) - \Delta_2(\rho)][b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2)] + 2k^2[\mu(\rho, s_1) - \mu(\rho, s_2)]b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2) = 0. \quad (19)$$

(19)式可以写成:

$$\exp[ik\Phi(\rho; s_1, s_2)] \cdot 2ik(\partial/\partial\rho) \{ \exp(-ik\Phi[\rho; s_1, s_2]) \times b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2) \} = [\Delta_2(\rho) - \Delta_1(\rho)]b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2), \quad (20)$$

式中

$$\Phi(\rho; s_1, s_2) \equiv \int_{\epsilon}^{\rho} [\mu(\rho', s_1) - \mu(\rho', s_2)] d\rho' \equiv \Phi_1 - \Phi_2, \\ \Phi_i \equiv \int_{\epsilon}^{\rho} \mu(\rho', s_i) d\rho', \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

(20)式两端乘以 $\exp(-ik\Phi)$, 对 ρ 积分,并在所得结果的两端乘以 $\exp(ik\Phi)$, 得到:

$$2ikb(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2) = 2ik \exp[ik\Phi(\rho; s_1, s_2)] + \int_{\epsilon}^{\rho} d\rho' \exp \{ ik \int_{\rho'}^{\rho} [\mu(\rho'', s_1) - \mu(\rho'', s_2)] d\rho'' \} \times [\Delta_2(\rho') - \Delta_1(\rho')] b(\rho', s_1)b^*(\rho', s_2). \quad (22)$$

在得到(22)式时,用了边界条件,

$$b(\epsilon, s_1) = b^*(\epsilon, s_2) = 1 \quad (23)$$

因 $\rho \gg a$, 无论是因为 $\mu(\rho, s)$ 满足相应的中心极限定理,或是因 $\mu(\rho, s)$ 是高斯场,在进一步推算之前,我们总能假定 $\int_{\epsilon}^{\rho} \mu(\rho' s) d\rho'$ 是高斯的。此外,因 $\mu(\rho, s)$ 有陡峭的相关函数,而 $b(\rho' s)$ 仅仅为 $\epsilon \leq \rho'' \leq \rho'$ 时 $\mu(\rho'', s)$ 的值所确立,所以 $\int_{\epsilon}^{\rho} [\mu(\rho'', s_1) - \mu(\rho'', s_2)] d\rho''$ 同 $b(\rho', s_1)$ 和 $b^*(\rho', s_2)$ 统计无关。

鉴于上述考虑, 在(22)式两端取数学期望, 得到.

$$2ik\Gamma(\rho; s_1, s_2) = 2ikE \{ \exp[ik\Phi(\rho, s_1, s_2)] \} \\ + \int_{\epsilon}^{\rho} d\rho' E \{ \exp \{ ik \int_{\rho'}^{\rho} [\mu(\rho'', s_1) - \mu(\rho'', s_2)] d\rho'' \} \} \\ \times \{ [\Delta_2(\rho') - \Delta_1(\rho')] \Gamma(\rho', s_1, s_2) \}. \quad (24)$$

因为 Γ 仅仅是 ρ , $\phi_1 - \phi_2$ 和 $z_1 - z_2$ 的函数, 故有:

$$[\Delta_2(\rho') - \Delta_1(\rho')] \Gamma(\rho', s_1, s_2) = 0 \quad (25)$$

所以,

$$\Gamma(\rho, s_1, s_2) = E \{ \exp[ik\Phi(\rho, s_1, s_2)] \} \quad (26)$$

注意(21)式以及 Φ_1 , Φ_2 的正态性质, (26)式变为:

$$\Gamma(\rho, s_1, s_2) = \exp \left[-\frac{k^2}{2} (E\Phi_1^2 + E\Phi_2^2 - 2E\Phi_1\Phi_2) \right]. \quad (27)$$

设小角度间隔, 并利用(17)式, 得到:

$$E\Phi_1^2 = E\Phi_2^2 \simeq \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{\epsilon}^{\rho} \delta(\rho_1 - \rho_2) d\rho_1 d\rho_2 \\ = \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a (\rho - \epsilon) \simeq \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \rho, \quad \rho \gg \epsilon, \quad \rho \gg a, \quad (28)$$

和

$$E(\Phi_1\Phi_2) \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \int_{\epsilon}^{\rho} \int_{\epsilon}^{\rho} \delta(\rho_1 - \rho_2) \exp \left(-\frac{\rho_2^2 \phi^2}{a^2} \right) d\rho_1 d\rho_2 \cdot \exp(-z^2/a^2). \\ \simeq \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 a \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{\text{erf}(\rho\phi/a)}{(\rho\phi/a)} \right] \cdot \exp(-z^2/a^2), \\ \rho \gg \epsilon, \quad \rho \gg a, \quad |\phi| < 1, \quad (29)$$

式中

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2, \quad z \equiv z_1 - z_2. \quad (30)$$

因此, 相关函数是:

$$\Gamma(\rho, s_1, s_2) = \exp \left(-\sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 k^2 a \times \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{\text{erf}(\rho\phi/a)}{(\rho\phi/a)} \right] \cdot \exp(-z^2/a^2) \right\} \right), \\ \rho \gg a, \quad \rho \gg \epsilon, \quad |\phi| < 1. \quad (31)$$

下节计算前向散射近似的适用范围.

二、前向散射近似的适用范围

我们希望估算(10)式中 $\partial^2 b / \partial \rho^2$ 项的重要性. 以 $B(\rho, s)$ 表示(10)式包含 $\partial^2 b / \partial \rho^2$ 项时的解, 则:

$$2ik \frac{\partial B(\rho, s)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 B(\rho, s)}{\partial \rho^2} + \Delta(\rho)B(\rho, s) + 2k^2 \mu(\rho, s)B(\rho, s) = 0. \quad (32)$$

假定(32)式能用逐级近似来求解. 因此, 可把 $B(\rho, s)$ 展开成微扰级数.

$$B(\rho, s) = b(\rho, s) + b_1(\rho, s) + \dots \quad (33)$$

现在, 因 $b(\rho, s)$ 是(10)式略去 $\partial^2 b / \partial \rho^2$ 项时的解, 代表零级解, 而 $b_1(\rho, s)$ 是一级相关, 则

$$2ik \frac{\partial b(\rho, s_1)}{\partial \rho} + \Delta_1(\rho) b(\rho, s_1) + 2k^2 \mu(\rho, s_1) b(\rho, s_1) = 0 \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} & -2ik \frac{\partial b_1^*(\rho, s_2)}{\partial \rho} + \Delta_2(\rho) b_1^*(\rho, s_2) + 2k\mu(\rho, s_2) b_1^*(\rho, s_2) \\ & = -\frac{\partial^2 b^*(\rho, s_2)}{\partial \rho^2} \end{aligned} \quad (34b)$$

标记:

$$\begin{aligned} \Gamma_B(\rho, s_1, s_2) & \equiv E[B(\rho, s_1)B^*(\rho, s_2)] \\ & \equiv \Gamma(\rho, s_1, s_2) + \Gamma_1(\rho, s_1, s_2) + \Gamma_1^*(\rho, s_2, s_1) + \dots \\ & \equiv \Gamma(\rho, s_1, s_2) + \tilde{\Gamma}(\rho, s_1, s_2) + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

式中

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho, s_1, s_2) & \equiv E[b(\rho, s_1)b^*(\rho, s_2)], \\ \Gamma_1(\rho, s_1, s_2) & \equiv E[b(\rho, s_1)b_1^*(\rho, s_2)], \\ \tilde{\Gamma}(\rho, s_1, s_2) & \equiv \Gamma_1(\rho, s_1, s_2) + \Gamma_1^*(\rho, s_1, s_2). \end{aligned} \quad (36)$$

设:

$$R = \tilde{\Gamma}_1 / \Gamma. \quad (37)$$

前向散射近似的适用范围可用条件:

$$|R| \ll 1 \quad (38)$$

确定。以 $b^*(\rho, s_1)$ 乘(34a)式, $b_1^*(\rho, s_1)$ 乘(34b)式,并用推导(22)式时大致相同的方法,得到:

$$\begin{aligned} 2ikb(\rho, s_1)b_1^*(\rho, s_2) & = \int_0^\rho d\rho' \exp\left(ik \int_0^{\rho'} [\mu(\rho'', s_1) - \mu(\rho'', s_2)] d\rho''\right) \\ & \times \left\{ [\Delta_2(\rho') - \Delta_1(\rho')] b(\rho', s_1) b_1^*(\rho', s_2) + b(\rho', s_1) \frac{\partial^2 b^*(\rho', s_2)}{\partial \rho'^2} \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

在此已经用了边界条件:

$$b_1(\epsilon, s) = 0 \quad (40)$$

在进一步推导之前,必须假定 $\mu(\rho, s)$ 是高斯场,因此,若 $A(\mu)$ 是 μ 的泛函数,则【4】

$$\begin{aligned} E[\mu(\rho, \phi, z) A(\mu)] & = \int \int d\rho' d\phi' dz' E[\mu(\rho, \phi, z) \mu(\rho', \phi', z')] \\ & \times E\{[\delta A(\mu)] / [\delta \mu(\rho', \phi', z')]\}, \end{aligned} \quad (41)$$

式中变分导数 $\delta A / \delta \mu$ 定义如下。设 μ 的变分 $\delta \mu(\rho, \phi, z)$ 除对点 (ρ, ϕ, z) 周围的很小邻域 $\Delta(\rho, \phi, z)$ 之外都为零。因此,

$$\frac{\delta A(\mu)}{\delta \mu(\rho, \phi, z)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{[A(\mu + \delta \mu) - A(\mu)]}{\int_{\Delta} \delta \mu(\rho, \phi, z) d\mu d\phi dz} \right\}. \quad (42)$$

对于变分导数的讨论,可参看【5】

因为 $b(\rho, s)$ 仅仅是 $\epsilon \leq \rho' \leq \rho$ 时 $\mu(\rho', s)$ 的泛函数,按变分导数的定义,就有,

$$\frac{\delta b(\rho, s)}{\delta \mu(\rho', s)} = 0, \quad \rho' > \rho. \quad (43)$$

(39)式两端取数学期望,利用(41)式、(43)式和 μ 的互相关函数的陡削性质,以及一联串的运算,得到:

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} \cdot \Gamma_1 + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} = \alpha \Delta_1(\rho) \Gamma, \quad (44)$$

式中

$$H(\rho, \phi, z) = \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 k^2 a \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left[\frac{\text{erf}(\rho\phi/a)}{(\rho\phi/a)} \right] \cdot \exp(-z^2/a^2) \right\}, \quad (45)$$

$$\alpha \equiv (\sqrt{\pi}/2) \cdot \bar{\mu}^2,$$

$$\phi \equiv \phi_1 - \phi_2,$$

$$z \equiv z_1 - z_2.$$

有兴趣的读者可以参看[6]中对于推导(44)式的详细讨论。

进一步的计算, 导得不等式[6]

$$|R| \equiv |\bar{\Gamma}_1| / \Gamma \leq \frac{\pi^{3/2}}{3} (\bar{\mu}^2)^3 k^4 a + \pi (\bar{\mu}^2 k \rho)^2. \quad (46)$$

因此, 若

$$\frac{\pi^{3/2}}{3} (\bar{\mu}^2 \rho)^3 k^4 a < 1 \quad (47a)$$

和

$$\pi (\bar{\mu}^2 k \rho)^2 < 1, \quad (47b)$$

则前向散射近似是正确的。在下节中将柱面波和平面波情况作比较。

三、比较柱面波和平面波情况

假定两个点在同样水平面上 ($z_1 - z_2 = 0$) 是相关的, 比较柱面波和平面波情况。设 ϕ 是点之间的角度。这样, 柱面波相干函数〔参看(27)式〕是

$$\Gamma_c(\rho, d) = \exp \left\{ -\sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 k^2 \rho a \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\text{erf}(d/a)}{(d/a)} \right] \right\}, \quad (48)$$

$$d \equiv \rho \phi.$$

对于平面波的情况, 无柱面扩展, 并假定平面波在介质中直线传播。坦坦尔斯基[7] Hufnagel 和 Stanley[8] 已对平面波相关函数作过计算。假定折射率的相关函数是(4)式, 相应的平面波相关函数是:

$$\Gamma_p(\rho, d) = \exp \{ -\sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 k^2 \rho a [1 - \exp(d^2/a^2)] \}. \quad (49)$$

设

$$\delta \equiv \sqrt{\pi} \bar{\mu}^2 k^2 \rho a,$$

$$x \equiv d/a.$$

$$(50)$$

图1和图2是 $\delta \equiv 0.2, 1, 3$ 时 Γ 对 x 的变化, 可见 Γ_c 和 Γ_p 之间的差异随 δ 的增大而变得更显著。

坦坦尔斯基[2]得到了对于 $-$ 阶相干函数的表示式 Γ_p 。

倘若在这个公式中利用上述相干函数, 则对于平面波前向散射解的适用条件是:

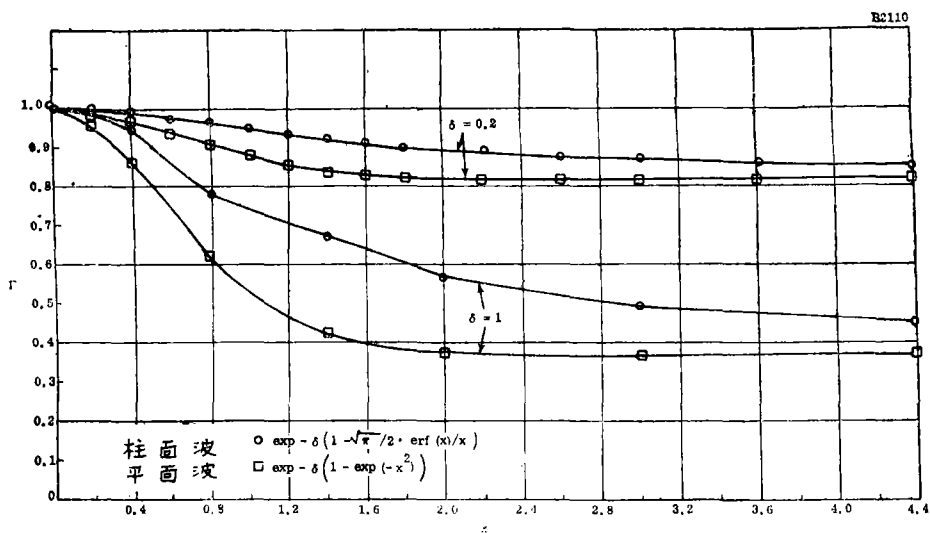


图1 柱面波、平面波的相干函数对照 ($\delta=0.2, 1$)

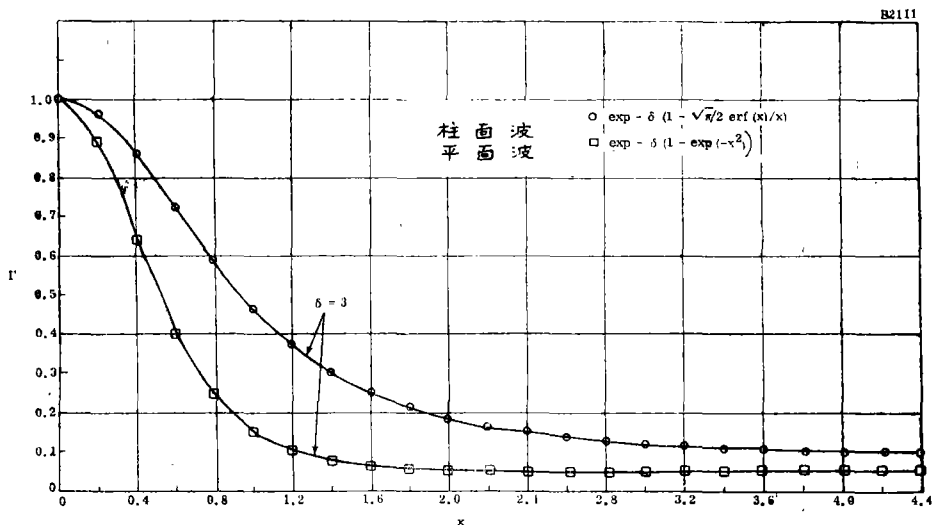


图2 柱面波、平面波相干函数对照 ($\delta=3$)

$$\frac{\pi^{3/2}}{3} \cdot (\bar{\mu}^2 \rho)^3 k^4 a < 1, \quad (51)$$

$$\pi (\bar{\mu}^2 k \rho)^2 < 1. \quad (52)$$

这些条件与柱面波情况下的条件是相同的。

附录A: $b(\rho, s)$ 对 μ 的依赖关系

由(10)式略去 $\partial^2 b / \partial \rho^2$,

$$2ik[\partial b(\rho, s) / \partial \rho] + \Delta(\rho)b(\rho, s) + 2k^2 \mu(\rho, s)b(\rho, s) = 0, \quad (A1)$$

和边界条件:

$$b(\epsilon, s) = 1. \quad (A2)$$

方程式(A1)有形式介:

$$b(\rho, s) = \exp \left[\frac{i}{2k} \int_i^\rho \Delta(\rho') d\rho' + ik \int_i^\rho \mu(\rho', s) d\rho' \right] \quad (\text{A3})$$

(A3)式右端是一个积分算符, 向右作用到常数1上。如果写

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{i}{2k} \int_i^\rho \Delta(\rho') d\rho', \\ B &\equiv ik \int_i^\rho \mu(\rho', s) d\rho', \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

则可以由表示式:

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= (A+B) \cdot 1 + \frac{(A^2 + AB + BA + B^2)}{2!} \cdot 1 + \dots \\ &= B + \left(\frac{AB + B^2}{2!} \right) \cdot 1 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

来估算 $\exp(A+B)$ 。注意到 A 和 B 不能互换, 因此, 解 (A5) 式比它表面所看到的要难。在任何情况下, (A3) 式表明 $b(\rho, s)$ 仅为 $\epsilon \leq \rho' \leq \rho$ 时的 $\mu(\rho', s)$ 值所确定。

参 考 文 献

- 1 M.M. Fitelson, "Cylindrically Spreading Waves in a Random Medium," Gen. Elect. ADE Tech. Memo No. 105 (Oct. 1973).
- 2 V.I. Tatarskii, "The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation," Israel Program for Scientific Translation (1971). (Available in U.S. through NTIS pp. 405-410).
- 3 Ref. 2, pp. 378, 389-401.
- 4 Ref. 2, pp. 378-379.
- 5 Ref. 2, pp. 441-448.
- 6 M.M. Fitelson, "The Coherence Function for Cylindrically Spreading Waves in a Random Medium," (Sec. II), Gen. Electr. TIS No. R74EMHI (Feb. 1974).
- 7 See Ref 2, pp, 381-382, 414.
- 8 R.E. Hufnagel and N. R Stanley, "Modulation Transfer Function Associated with Image Transmission Through Turbulent Media," J. Opt. Soc. Am. 54, 52-61 (1974).

[译自 J.A.S.A. 56. 1. (1974). 53-57]

恽宗杨译 冯绍松校