

关于海洋中声传播的 简正波模型的新方法

J. Michael Mckisic 和 D.P. Hamm

(加利福尼亚洛克希德海洋实验室)

Newman 和 Thorson 最近提出并研究了一种新方法, 用这种方法能够快速而且有效地解出与线性二阶微分方程相联系的本征值问题。这里介绍把这种方法应用于水声学中感兴趣的问题的一些结果。

引 言

关于给出海洋中声传播模型, 现在有四种基本方法: 射线理论, 抛物线方程方法, 简正波模型, 以及快速声场程序(FFP)。所有这四种方法都与求解标量 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + (\omega^2/c^2) \psi(\vec{r}) = 0 \quad (1)$$

有关, 式中 c 为介质中的声速, $\psi(\vec{r})$ 为速度势, 它与质点速度的关系为

$$\mathbf{u} = -\nabla \psi \quad (2)$$

与声压的关系为

$$P = +i\omega\rho\psi \quad (3)$$

ρ 为介质密度, ω 为声源的角频率。

我们知道, 上面所列举的每一种方法无论在理论上还是在实际上对于计算的速度和精度都是有限制的。譬如, 在简正波和 FFP 方法中, 都取柱坐标, 速度势表为

$$\psi(\mathbf{r}, z, z_s) = \int_0^\omega d\lambda \lambda Z_0(\lambda r) \theta(z, z_s, \lambda), \quad (4)$$

其中 $Z_0(\lambda r)$ 为零阶柱 Bessel 函数(其形式取决于在渐近距离上所加的边界条件), λ 为传播常数, Z_s 为声源深度, Green 函数 $\theta(z, z_s, \lambda)$ 满足 z 向分离的波动方程

$$d^2\theta/dz^2 + (\omega^2/c^2 - \lambda^2)\theta(z, z_s, \lambda) = -2\delta(z - z_s) \quad (5)$$

在简正波方法中, 方程(4)得到下列形式的表达式¹:

$$\psi(\mathbf{r}, z, z_s) = \exp(-i\pi/4) \left(\frac{2\pi}{\gamma} \right)^{\dagger} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda_n r} u_n(z) u_n(z_s)}{(\lambda_n^{1/2} N_n)} \quad (6)$$

*本文译自 "New Methods for Normal-Mode Models of Sound Propagation in the Ocean", JASA, Vol. 50, No.2, 294(1976)

其中 N_n 可以有效地看成归一化常数, 而 u_n 则为方程(5)的齐次型即

$$d^2u_n/dz^2 + (\omega^2/c^2 - \lambda_n^2)u_n(z) = 0 \quad (7)$$

的解, λ_n 一般为-复常数。虽然在有坡度的海底以及(或者)在允许水平方向存在声速剖面变化的情况下难以应用简正波方法, 但是它并没有固有的限制。然而, 实际上它通常限于浅海或表面声道传播的远程情况以及深海低频的情况。其理由是对于某些应用必须计算大量的简正波, 从而要求过多的计算机时间。在 FFP 方法²中, Bessel 函数 $Z_0(\lambda r)$ 为其渐近形式所代替, 用快速 Fourier 变换方法完成方程(4)的直接的数值积分。已经知道这种方法得到的结果与用简正波模型的结果基本一致³, 其计算速度与为确定用作方程(4)的核的 Green 函数的大量计算时间差不多⁴。

下面我们报导有关一种新方法的工作, 用这种新方法可望提高计算速度, 从而有可能广泛地应用基于波动方程求数值积分的各种方法。这里提供一些简正波模型方面的结果, 这些结果是直接应用 Newman 和 Thorson 最近所研究的方法⁵(今后称为 NT)得到的, 他们两人曾把这种方法应用于非相对论的 Schrödinger 方程。此方法是以方程(7)的指数形式的解的存在, 解中的指数函数是平滑、缓变且非振荡的为基础的。在指数中所出现的那些函数满足 Riccati 方程, 可以用迭代方法在渐近的范围中产生。给定了由迭代得到的初始条件, 就可以把 Riccati 方程积分, 得到整个范围的解。这里的 Riccati 方程是一阶的, 而不是象波动方程的情况下是二阶的。只要在 WKB 近似有意义的时候这种方法一般总是适用的, 而且它保留 WKB 近似通过积分允许在转折点之前甚至通过转折点的解的连续性的所有概念上的简化。

本报告以下分成四部分。为了完整和表示方面的必要性, 我们把关于 NT 方法应用于 z 向分离变量的波动方程的讨论包括在第 I 部分中。在第 II 部分中, 我们通过研究对于有关水声学的问题的一些简单应用来说明这种方法的某些性质: 这些问题是 Stoke 方程的解和抛物线剖面的本征值和本征函数的计算。在第 III 部分给出关于表面声道情况的传播损失的结果, 第 IV 部分以一个总结和对于结果的讨论作为结束。

I. NT 方法

我们将沿用 NT 的基本表示方法, 假定声速只是深度 z 的函数, 定义实函数

$$k^2(z) = \omega^2/c^2 - \lambda^2 \quad (8)$$

所以方程(7)可以写成 $d^2u/dz^2 + k^2(z)u(z, \lambda) = 0$ (9)

这是任何线性二阶微分方程可以化简成的典则型⁶。不失一般性, 我们也将限于讨论自然地归结为 Schrödinger 形式 $k^2(z) = E - V(z)$ (10)

的那些剖面, 在(10)式中 E 为能量, $V(z)$ 为势。对于方程(9)有两种重要的情况, 它们相应于 $k^2(z) > 0$ 和 $k^2(z) < 0$ 的分别被称为容许区和禁区的两种 z 的区域。

NT 方法的中心思想是认识到方程(9)有两个本质上是复的具有指数形式的特解的存在, 对于这两个解, 指数函数具有这样的重要性质: 随着由势的变化所控制的空间变化它们是平滑的和非振荡的。因为这种平滑性, 就允许以很高的计算速度来计算它们。

为了说明这些函数的结构, 我们集中研究容许区并假定方程(9)的解具有下列形式:

$$u(z) = [\alpha_+(z)/k^{\frac{1}{2}}(z)]W_+(z) + [\alpha_-(z)/k^{\frac{1}{2}}(z)]W_-(z) \quad (11)$$

其中
$$W_{\pm}(z) = \exp\left[\pm i \int_{z_0}^z dz' k(z')\right] \quad (12)$$

两个 α 是待定的, z_0 是任意点。当把两个 α 取为常数时, (11) 式就是两个 WKB 形式的线性组合。将 (11) 式代入方程 (9) 并进行参数变换, 即让

$$[\alpha_+(z)/k^{\frac{1}{2}}(z)]' W_+(z) + [\alpha_-(z)/k^{\frac{1}{2}}(z)]' W_-(z) = 0 \quad (13)$$

我们便得到对偶的方程

$$\alpha'_{\pm}(z) = \alpha_{\mp}(z) \frac{k'(z)}{2k(z)} \exp\left[\mp i 2 \int_{z_0}^z dz' k(z')\right] \quad (14)$$

其中 $k'(z)$ 表示 k 对 z 的导数。到这一步, 我们只是把原来的问题变成解 α 的问题。

解题的标准方法是用首先把两个方程进行积分然后再迭代的办法使两个 α 的方程成为不对偶的⁷。在 NT 方法中, 则采用一种不同的独特的步骤。这种方法引入一对辅助函数 $\phi_{\pm}(z)$ 来使两个方程去偶。假定 $\phi_{\pm}(z)$ 是小的、慢变的, 它们与 α 的关系为

$$\alpha_{\pm}(z) = \phi_{\mp}(z) d_{\mp}(z) \exp\left[\mp 2i \int_{z_0}^z dz' k(z')\right] \quad (15)$$

把 (15) 式代入 (14) 式, 得到

$$\alpha'_{\pm}(z) = \frac{k'(z)}{2k(z)} \phi_{\pm}(z) \alpha_{\pm}(z) \quad (16)$$

以及一对非线性的 Riccati 方程

$$\phi'_{\pm}(z) = \mp \frac{ik'(z)}{4k^2(z)} \left[1 - \phi_{\pm}^2(z)\right] \pm \frac{i}{2k(z)} \phi'_{\pm}(z) \quad (17)$$

把方程 (16) 积分并代入 (11), 经过一些直接的代数运算后得到两个线性独立解

$$u_{\pm}(z) = A_{\pm} \exp\left[\pm i \int_{z_0}^z dz' q_{\pm}(z')\right] \quad (18)$$

其中

$$q_{\pm}(z) = k(z) \left[\frac{1 - \phi_{\pm}(z)}{1 + \phi_{\pm}(z)} \right] \quad (19)$$

对于容许区 [$k^2(z) > 0$], 这两个解具有下列性质: $\phi_{\pm}(z), q_{\pm}(z)$ 以及积分常数 A_{\pm} 都是复的, $\phi^* = \phi_{-}, q_{+}^* = q_{-}, A_{+}^* = A_{-}, q_{\pm}(z) = q_R \pm i q_I, q_I(z) = \frac{1}{2} q_R / q_R$, 其中 R 和 I 表示实部和虚部。

在这个时候应当强调, 至今没有作过明显的近似。在 (18) 式中的解的形式是精确的, 当然是以 $\phi_{\pm}(z)$ 的存在为条件的。

在禁区 [$k^2(z) < 0$] 中可以推导出完全类似于 (18) 式的两个解的形式。在这种情况下, 方程 (9) 为

$$d^2 u / dz^2 - K^2(z) u(z) = 0 \quad (20)$$

所代替, 其中

$$K^2(z) = V(z) - E \quad (21)$$

方程 (20) 是用假定下列形式的实解的办法来解的:

$$u(z) = \left[\frac{a_+(z)}{K^{\frac{1}{2}}(z)} \right] \exp\left[+ \int_{z_0}^z dz' K(z) \right] + \left[\frac{a_-(z)}{K^{\frac{1}{2}}(z)} \right] \exp\left[- \int_{z_0}^z dz' K(z') \right] \quad (22)$$

用与前面相同的方法, 我们得到禁区中的两个线性独立解

$$u_{\pm}(z) = B_{\pm} \exp \left[\pm \int_{z_0}^z dz' Q_{\pm}(z') \right] \quad (23)$$

其中 Q 与辅助函数 $\psi_{\pm}(z)$ [类似于 $\phi_{\pm}(z)$] 的关系为

$$Q_{\pm}(z) = \frac{K(z)[1 - \psi_{\pm}'(z)]}{1 + \psi_{\pm}(z)} \quad (24)$$

ψ 满足 Riccati 方程

$$\psi_{\pm}(z) = \pm \frac{K'}{4K^2} \left[1 - \psi_{\pm}^2(z) \right] \mp \frac{1}{2K(z)} \psi_{\pm}'(z) \quad (25)$$

上面 $B_{\pm}, Q_{\pm}(z)$, 以及 $\psi(z)$ 都是实的。

当然, 可以从一开始就假定等价于 (18) 式和 (23) 式的那种解。把 (18) 代入 (9), 得到 Riccati 方程

$$q_{\pm}'(z) = \pm i [k^2(z) - q_{\pm}^2(z)] \quad (26)$$

类似地, 把 (23) 代入 (20), 得到

$$Q_{\pm}'(z) = \pm \{K^2(z) - Q_{\pm}^2(z)\} \quad (27)$$

这两种方法是等价的, 因为分别把 (19) 和 (24) 代入 (26) 和 (27) 只是重新产生方程 (17) 和 (25) 的关于 ϕ 和 ψ 的 Riccati 方程。

当然, 辅助函数 ϕ 和 ψ 的引入并不保证它们的存在。但是, NT 发现, 这两个函数可以在对方程 (9) 的解的 WKB 近似有望是好的那些范围内用迭代方法来产生。特别是如果 ϕ_{\pm} 是小且慢变的话, 则方程 (17) 的一阶近似将为

$$\phi_{\pm}^{(0)} \cong -ik'(z)/4k^2(z) \quad (28)$$

只要不接近反转点, 即 $k^2(z)$ 的零点由

$$k^2(z_{TP}) = 0 \quad (29)$$

所确定或者不在 $k(z)$ 快变的点上即可。NT 方法不是简单地在方程 (17) 的右边引入 (28) 并导出逐次迭代, 而是引进一种要求每个近似都满足 Riccati 方程的线性化方法。按照 NT 的表示法(我们把方程 (17) 中的下标 \pm 去掉了),

$$\phi(z) = \alpha_0(z) + \beta_0(z)\phi^2(z) + \gamma_0(z)\phi'(z) \quad (30)$$

其中定义

$$\alpha_0(z) = -ik'(z)/4k^2(z) \quad (31)$$

$$\beta_0(z) = -ik'(z)/4k^2 = -\alpha_0(z) \quad (32)$$

$$\gamma_0(z) = i/2k(z) \quad (33)$$

于是, “零级”近似为

$$\phi^{(0)}(z) = \alpha_0(z) = -ik'(z)/4k^2(z) \quad (34)$$

写

$$\phi^{(1)}(z) = \alpha_0(z) + \chi_1(z) \quad (35)$$

其中 $\chi_1(z)$ 是待定的, 便可得到下一个近似。把 (35) 式代入 (30) 式, 得到关于 χ_1 的 Riccati 方程为

$$\chi_1(z) = \alpha_1(z) + \beta_1(z)\chi_1^2(z) + \gamma_1(z)\chi_1'(z) \quad (36)$$

它与方程 (17) 的形式一样, 其中

$$\alpha_1(z) = [\beta_0(z)\alpha_0^2(z) + \gamma_0(z)\alpha_0'(z)]/[1 - 2\alpha_0(z)\beta_0(z)] \quad (37)$$

$$\beta_1(z) = \beta_0(z) / [1 - 2\alpha_0(z)\beta_0(z)] \quad (38)$$

$$\gamma_1(z) = \gamma_0(z) / [1 - 2\alpha_0(z)\beta_0(z)] \quad (39)$$

方程(36)的“零级”近似为

$$z_1^{(0)}(z) \cong \alpha_1(z) \quad (40)$$

我们有 ϕ 的一级近似

$$\phi^{(1)}(z) \cong \alpha_0(z) + \alpha_1(z) \quad (41)$$

按这种方式进行下去, 经过较高阶的迭代, 得到关于 ϕ 的一个 α 的级数表达式:

$$\phi = \sum_{j=0}^n \alpha_j(z) + \chi_{n+1}(z) \quad (42)$$

而每一个 α_j 都是用 $j-1$ 阶来确定的。为了有效地利用计算机, 把迭代方案按这种方式用公式写出来便允许利用 Leibnitz 规则。我们也注意到方程(26)和(27)可以象在 WKB 方法中那样直接地迭代。一般来说, 这种方法更精确一些, 但是收敛的比较慢(参考文献 5)。对于在这里所考虑的所有应用, 在容许区中我们都用 α 级数迭代而在禁区中则用方程(27)的直接迭代。

我们通过给出将禁区解的线性组合与返转点上的容许区解连接起来的所谓连接公式来结束这一节。这对于阐明这种方法在下面接着要考虑的边值问题上的应用是有用的。

让我们来研究图 1, 这张图表示在 $z=a$ 有一返转点的“任意” $k^2(z)$ 的图形。在返转点的左边为容许区, $k^2(z) > 0$, 其解可写成(18)式的解的线性组合, 即在 $z < a$ 时写成

$$u_1(z) = A_1 \exp\left[i \int_a^z dz' q_+(z') \right] + B_1 \exp\left[-i \int_a^z dz' q_-(z') \right] \quad (43)$$

在写(43)式时, 我们假定为了得到 $q_{\pm}(a)$ 在某些 $\bar{z} < a$ 上方程(17)已经用迭代方法解出, 并且已经通过将方程(19)和(26)进行数值积分的办法构造了一个 $q_{\pm}(\bar{z})$ 。类似地, 在返转点右方的解可以写成(23)式形式的线性组合, 即在 $z > a$ 时写成

$$u_2(z) = A_2 \exp\left[\int_a^z dz' Q_+(z') \right] + B_2 \exp\left[- \int_a^z dz' Q_-(z') \right] \quad (44)$$

在写(44)式时, 我们假定为了得到 $Q_{\pm}(a)$ 已经利用(24), (25)和(27)完成了一个类似的迭代-积分程序。

用要求(43), (44)式及它们的微商在返转点上连续的办法得到连接公式。由这些要求我们得到

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (45)$$

$$\text{和} \quad iq_+(a)A_1 - iq_-(a)B_1 = Q_+(a)A_2 - Q_-(a)B_2 \quad (46)$$

利用这些方程我们可用 A_2 和 B_2 分别表示 A_1 和 B_1 。我们得到

$$A_1 = \frac{1}{2} A_2 \left\{ 1 - \frac{i[Q_+(a) + q_+(a)]}{q_R(a)} \right\} + \frac{1}{2} B_2 \left\{ 1 + \frac{i[Q_-(a) - q_-(a)]}{q_R(a)} \right\} \quad (47)$$

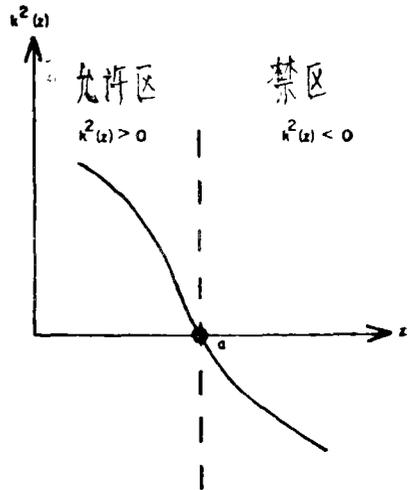


图 1. 在 $z=a$ 具有返转点的“任意” k^2_z ,

$$B_1 = \frac{1}{2} A_2 \left\{ 1 + \frac{i[Q_+(a) + q_I(a)]}{q_R(a)} \right\} + \frac{1}{2} B_2 \left\{ 1 - \frac{i[Q_-(a) - q_I(a)]}{q_R(a)} \right\} \quad (48)$$

如果我们定义角度

$$\theta_a^+ = \tan^{-1} \left[\frac{Q_+(a) + q_I(a)}{q_R(a)} \right] \quad (49)$$

$$Q_a^- = \tan^{-1} \left[\frac{Q_-(a) - q_I(a)}{q_R(a)} \right] \quad (50)$$

(47)和(48)式可以写成极坐标的形式:

$$A_1 = \frac{1}{2} A_2 \sec(\theta_a^+) \exp(-i\theta_a^+) + \frac{1}{2} B_2 \sec(\theta_a^-) \exp(+i\theta_a^-) \quad (51)$$

$$B_1 = \frac{1}{2} A_2 \sec(\theta_a^+) \exp(i\theta_a^+) + \frac{1}{2} B_2 \sec(\theta_a^-) \exp(-i\theta_a^-) \quad (52)$$

这就是两个连接公式。在容许区和禁区与图 1 所示情况相反的情况下, 只要将(43)式和(44)式作重新的意义, 同(51)和(52)式相同的关系也成立。

II. 对于方法的几点说明

在这一节中我们来更清楚地说明刚才所给出的那套公式及其对于在水声学中感兴趣的边值问题的应用。这一节分成两部分: (A) Stoke 方程的解和 (B) 有限抛物线波导的简正波函数。

1. Stoke 方程的解

正如大家所周知的, Stoke 方程

$$d^2u/dz^2 + zu(z) = 0 \quad (53)$$

在水声学中经常出现。方程(53)有两个线性独立解, 这两个解都可表成好多种形式。根据我们的需要, 我们将把普遍的线性组合写成

$$u(z) = Ah_1(z) + Bh_2(z) \quad (54)$$

其中 A 和 B 都是常数, $h_1(z)$ 和 $h_2(z)$ (复函数) 是三分之一阶修正的 Hankel 函数⁸。

为了说明这个适用于得到 Stoke 方程的解的方法, 我们来考虑(18)式中的 + 解形式, 即

$$u_+(z) = \exp \left[i \int_{z_0}^z dz' q_+(z') \right] \quad (55)$$

其中 z_0 为容许区中心任意点。第一步是通过(42)式在 z_0 点将 ϕ_+ Riccati 方程进行迭代并利用(19)式来得到 $q_+(z_0)$ 的初始值。给定了这个和 $u_+(z)$ 的边界条件后, 就对方程(26)作数值积分以得到所有点的 $u_+(z)$ 。不象 WKB 近似那样, 现在在返转点之前和通过返转点时将方程(26)积分毫无困难。

这种方法的可用性要求为求出 $\phi_+(z)$ 所作的方程(17)的迭代以足够的数值精度以收敛。正如前面所提到的, ϕ 迭代的收敛在很大程度上依赖于接近返转点的程度。作为对此的图解说明, 我们在表 1 中给出了由(42)式得到的部分和(即 $\alpha_0, \alpha_0 + \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \dots$) 这是在 $z=20$, $z=6$ 和 $z=2$ 点上 ϕ_+ Riccati 方程 15 次迭代所得的结果。左边的一列是 ϕ_+ 的实部, 右边的一列是 ϕ_+ 的虚部, 而由(19)式确定的 $q_+(z)$ 则列在诸部分和的下面。在 $z=20$, 实部收敛于

表 1. Stoke 方程一代数级数部分和

(a) $z=20$	$\text{Re}(\phi_+)$	$\text{Im}(\phi_+)$
0.0		$-1.397542485987369 \times 10^{-3}$
$-1.171879577654601 \times 10^{-5}$		$-1.397545215523199 \times 10^{-3}$
$-1.171886553546402 \times 10^{-5}$		$-1.397348683616088 \times 10^{-3}$
$-1.171392046389039 \times 10^{-5}$		$-1.397348681313499 \times 10^{-3}$
$-1.171392036736470 \times 10^{-5}$		$-1.397348847142072 \times 10^{-3}$
$-1.171392732008157 \times 10^{-5}$		$-1.397348847146928 \times 10^{-3}$
$-1.171392732036653 \times 10^{-5}$		$-1.397348840797117 \times 10^{-3}$
$-1.171392729983319 \times 10^{-5}$		$-1.397348846797098 \times 10^{-3}$
$-1.171392729983175 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798476 \times 10^{-3}$
$-1.171392729953571 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798476 \times 10^{-3}$
$-1.171392729993572 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798467 \times 10^{-3}$
$-1.171392729993492 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798467 \times 10^{-3}$
$-1.171392729993492 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798467 \times 10^{-3}$
$-1.171392729993492 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798467 \times 10^{-3}$
$-1.171392729993493 \times 10^{-5}$		$-1.397348846798467 \times 10^{-3}$
$q_+(z=20) = 4.472223263757722 + i1.249853644662905 \times 10^{-2}$		
(b) $z=6$		
0.0		$-8.505172717997145 \times 10^{-3}$
$-4.340905802344087 \times 10^{-4}$		$-8.505788053890503 \times 10^{-3}$
$-4.341844838869310 \times 10^{-4}$		$-8.461469443233176 \times 10^{-3}$
$-4.273965054450246 \times 10^{-4}$		$-8.461450368578656 \times 10^{-3}$
$-4.273916633486915 \times 10^{-4}$		$-8.462836800361361 \times 10^{-3}$
$-4.277456864291622 \times 10^{-4}$		$-8.462838274107367 \times 10^{-3}$
$-4.277462092780966 \times 10^{-4}$		$-8.462729778875770 \times 10^{-3}$
$-4.277074126186742 \times 10^{-4}$		$-8.462729567071241 \times 10^{-3}$
$-4.277073155797356 \times 10^{-4}$		$-8.462745425044523 \times 10^{-3}$
$-4.277146086576024 \times 10^{-4}$		$-8.462745473788701 \times 10^{-3}$
$-4.277146357328485 \times 10^{-4}$		$-8.462741746481297 \times 10^{-3}$
$-4.277125400013038 \times 10^{-4}$		$-8.462741730091115 \times 10^{-3}$
$-4.277125292634524 \times 10^{-4}$		$-8.462743015755648 \times 10^{-3}$
$-4.277133838271077 \times 10^{-4}$		$-8.462743023323643 \times 10^{-3}$
$-4.277133895357903 \times 10^{-4}$		$-8.462742411525598 \times 10^{-3}$
$q_+(z=6) = 2.451234717941177 + i4.149131513200432 \times 10^{-2}$		
(c) $z=2$		
0.0		$-4.590479961791240 \times 10^{-2}$
$-1.269701535492392 \times 10^{-3}$		$-4.600194194218129 \times 10^{-2}$
$-1.276969817873378 \times 10^{-3}$		$-3.894078554546440 \times 10^{-2}$
$-1.860268383380387 \times 10^{-3}$		$-3.887377478678514 \times 10^{-2}$
$-6.783961047831684 \times 10^{-3}$		$-4.549076546383436 \times 10^{-2}$
$-1.608332210350738 \times 10^{-2}$		$-4.558938739545179 \times 10^{-2}$
$-1.620039899891328 \times 10^{-2}$		$-2.984613769235304 \times 10^{-2}$
$-1.495623615387721 \times 10^{-2}$		$-2.978783558375904 \times 10^{-2}$
$-1.473588227813271 \times 10^{-2}$		$-1.003838984247190 \times 10^{-1}$
$-1.665584656094732 \times 10^{-1}$		$-9.909745604768260 \times 10^{-2}$
$-1.526299034274030 \times 10^{-1}$		$4.229361959958533 \times 10^{-1}$
$1.436254345699962 \times 10^{-0}$		$3.199140148384495 \times 10^{-1}$
$1.534332912929405 \times 10^{-0}$		$-4.709693081086359 \times 10^{-0}$
$-2.517395342992267 \times 10^{-1}$		$-1.573221350638817 \times 10^{-1}$
$4.991568657198637 \times 10^{-1}$		$3.594778086540719 \times 10^{-1}$
$q_+(z=2) = -1.359818449017548 - i2.584446112994710 \times 10^{-2}$		

15 位，虚部收敛于 16 位。当达到 $z=0$ 的转折点时，收敛情况变坏。在 $z=6$ ，对于实部和虚部都只收敛于 6 位。最后，在 $z=2$ 附近，级数发散。在禁区，类似的结果也成立。

在一种有利的情况下关于此方法的精度的说明示于表 2，在表中把 $\text{Re}(h_1)$ 的精确值与通过积分得到的 u_+ 的实部作了比较。这些结果是这样得到的：把 u 固定于其在 $z=6$ 的已知值（边界条件），用以迭代方法得到的 q_+ 的值 [表 1(b)] 作为初始条件，数值积分（四阶 Runge-Kutta 算法）通过转折点进入禁区直到 $z=-6$ 。 $|Z| \leq 6$ 的区域相当于参考文献 8 的表列范围，在所考虑的整个范围上符合到七位。利用复数共轭函数 $u_-(z)$ 来算，对于虚部和 $h_2(z)$ 的结构发现有类似的结果。

表 2. $\text{Re}(h_1)$ 的精确解和 NT 解

z	精确的 $\text{Re}(h_1)$	NT $\text{Re}(h_1)$
6.0	-0.32031858	-0.320318580797
4.0	-0.38881627	-0.838816263899
2.0	0.60991262	0.609912610551
0	0.00000000	$1.22029911159 \times 10^{-6}$
-2.0	-2.44938672	-2.44938666889
-4.0	-63.43265754	-63.4326574181
-6.0	-4945.10171350	-4945.10169391

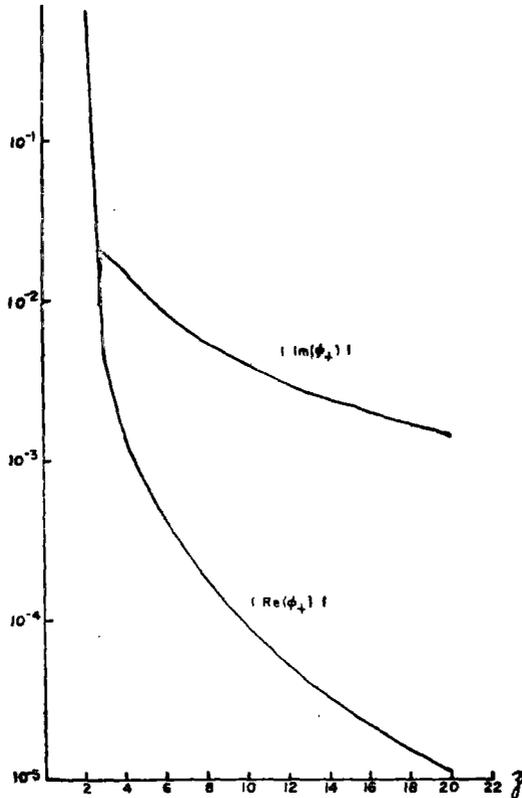


图 2. 辅助函数 ϕ_+ 作为离开转折点的距离的函数的性质

为了表明辅助函数平滑和慢变的性质，在图 2 中我们给出了在容许区中 $\text{Re}(\phi_+)$ 和 $\text{Im}(\phi_+)$ 的幅度作为 z 的函数的结果。当达到在 $z=0$ 的返转折点时，两个函数都迅速变大而远离返转折点时情况则相反。两条曲线都没有延伸到 $|z| \leq 2$ 的区域中，因为在这个区域中它们的符号和幅度都迅速地变化；这是迭代的收敛性破坏的证明。当然，具有头等重要性的变量是用 ϕ_+ 构造起来的那些变量。对于容许区，感兴趣的变量是 $q_+(z)$ ，这在(18)式中明确地显示出来。图 3 表示根据(19)式构造起来的 $q_+(z)$ 的实部 ($\times 10^2$) 和虚部作为距返转折点的距离的函

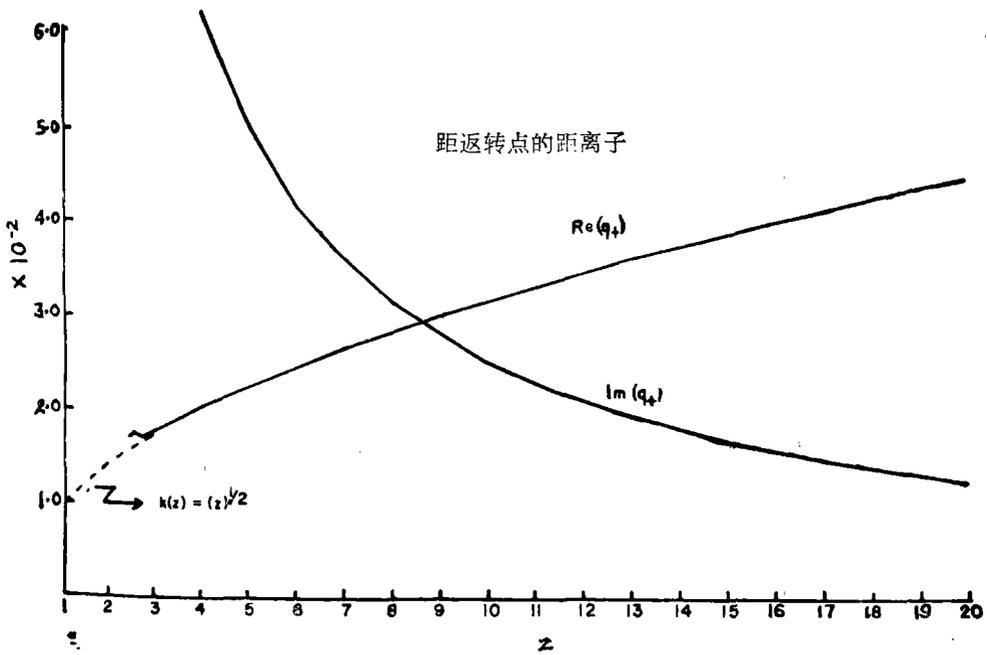


图 3. q_+ 作为距这转点的距离的函数的性质

数。两个变量在远离返转折点时的慢变性质是相当明显的，特别是实部。两个解的共同性质也表现了出来：

$$q_R(z) \geq k(z) \quad (56)$$

$$q_I(z) = q'_R / 2q_R \quad (57)$$

诚然，对于所研究的方程， $q_R(z)$ 不能区别于 $z^{1/2}$ ，除了在接近返转折点的区域中 ($z^{1/2}$ 的外推曲线用虚线表示)。在所画的区域中，如所预料的那样， $q_I(z) = 1/4z = k'/2k$ 。

2. 有限抛物线波导

这一节是有关由抛物线声速剖面所确定的本征值问题。在三个深度范围 (R_1 , R_2 和 R_3) 内确定的声速剖面为

$$\left. \begin{aligned} R_1: & -\infty < z \leq z_1, 1/c^2(z) = 1/c_0^2 \\ R_2: & z_1 \leq z \leq z_2, 1/c^2(z) = 1/c_a^2 - a^2(z - z_a)^2 \\ R_3: & z_2 \leq z < \infty, 1/c^2(z) = 1/c_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

其中 c_0 为一参考声速， c_a 为在波导轴上的声速， z_1, z_2 和 a 确定波导的宽度。

对此情况，对于低于阱的顶端的任何正能量都有两个返转折点 z_L 和 z_R (左和右)。在容许区 ($z_L \leq z \leq z_R$) 中，可以把解写成 (18) 式中的指数形式的线性组合。因为深度范围在两个方

向上都是不受限制的, 所以必须把容许区的解与具有(23)式形式的指数衰减的禁区解在每个返转点上连接起来。在左禁区 $-\infty < z \leq z_L$ 中, 解的合适形式为

$$u_1(z) = A_1 \exp \left[\int_{z_L}^z dz' Q_+(z') \right] \quad (59)$$

在禁区 $z_R \leq z < \infty$ 中, 指数衰减的解为

$$u_3(z) = B_3 \exp \left[- \int_{z_R}^z dz' Q_-(z') \right] \quad (60)$$

为了把两个解在左返转点上连接起来, 我们把容许区的解写成

$$u_2(z) = A_2 \exp \left[i \int_{z_L}^z dz' q_+(z') \right] + B_2 \exp \left[-i \int_{z_L}^z dz' q_-(z') \right] \quad (61)$$

要求在左返转点上(59)和(61)的对数微商连续, 便得到

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1 \sec(\theta_L) \exp(-i\theta_L) \quad (62)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} A_1 \sec(\theta_L) \exp(i\theta_L) \quad (63)$$

于是(61)变成

$$u_2(z) = A_1 \sec(\theta_L) \left[\frac{q_R(z_L)}{q_R(z)} \right]^{1/2} \cos \left[\int_{z_L}^z dz' q_R(z') - \theta_L \right] \quad (64)$$

其中

$$\tan(\theta_L) = \frac{q_I(z_L) + Q_+(z_L)}{q_R(z_L)} \quad (65)$$

同时用了(57)式。为了把(60)的解连接起来, 我们把容许区的解写成

$$u_2(z) = \bar{A}_2 \exp \left[i \int_{z_R}^z dz' q_+(z') \right] + \bar{B}_2 \exp \left[-i \int_{z_R}^z dz' q_-(z') \right] \quad (66)$$

得到类似于(64)式的

$$u_2(z) = B_3 \sec(\theta_R) \left[\frac{q_R(z_R)}{q_R(z)} \right]^{1/2} \cos \left[\int_{z_R}^z dz' q_R(z') + \theta_R \right] \quad (67)$$

θ_R 定义为

$$\tan(\theta_R) = \frac{Q_-(z_R) - q_I(z_R)}{q_R(z_R)} \quad (68)$$

在内部的点上, (64)式和(67)式至多有一常数不同。按照著名的理论¹⁰, 这要求

$$\int_{z_L}^{z_R} dz' q_R(z') = n\pi + \theta_L + \theta_R \quad (69)$$

其中 $n=0, 1, 2, \dots$ 。因此, 量

$$S(E) = \frac{1}{\pi} \left[\int_{z_L}^{z_R} dz' q_R(z') - \theta_L - \theta_R \right] \quad (70)$$

在本征值上将是整数。(69)式的本征值关系和(64)与(67)在右返转点上匹配的要求给出

$$u_2(z) = (-1)^n \sec(\theta_L) \left[\frac{q_R(z_R)}{q_R(z)} \right]^{1/2} \cos \left[\int_{z_L}^z dz' q_R(z') - \theta_L \right] \quad (71)$$

作为容许区中的解，而相应的 $(-1)^n$ 因子被理解为用以连接禁区解。作为比较，我们抄下著名的¹¹对于无限波导成立的容许区解和本征值表达式：

$$\psi_n(z) = \frac{\exp[(2n+1)/2]}{H_n[(2n+1)^{1/2}]} \exp\left[-\frac{\omega a(z-z_a)^2}{2}\right] \times H_n[(\omega a)^{1/2}(z-z_a)] \quad (72)$$

和

$$E_n = \omega a(2n+1), (n=0, 1, 2, \dots) \quad (73)$$

H_n 为 Hermite 多项式。(72)式被归一化使得在转折点幅度为 1，这相应于(71)式的归一化。在 Z_1 和 Z_2 以外的禁区中，有限波导的精确解都是普通的实指数形式。

因为 $S(E)$ 是能量的慢变¹²(单调增加的)函数，故可以对于占据了有待于确定的那些本征值的值域的选定数目的输入能量水平 E_i ($i=1, 2, \dots, N$) 求它的值，用内插法得到那些能量值，因为 E_i 是整数的。几种方法都是可能的。NT 用有理多项式拟合，我们研究了三次样条拟合 (cubic spline fit)。一般来说，样条方法不象多项式方法那样有用。理由是因为在某些场合需要外推到输入能量的范围以外(见下面)。显然，两种方法都提供大量简正波的快速计算。

作为例子，对于 100 赫频率的势 ($z_1=1$ 公里, $z_2=3$ 公里, $z_a=2$ 公里, $c_0=1.55$ 公里/秒, $c_a=1.525$ 公里/秒) 示于图 4。

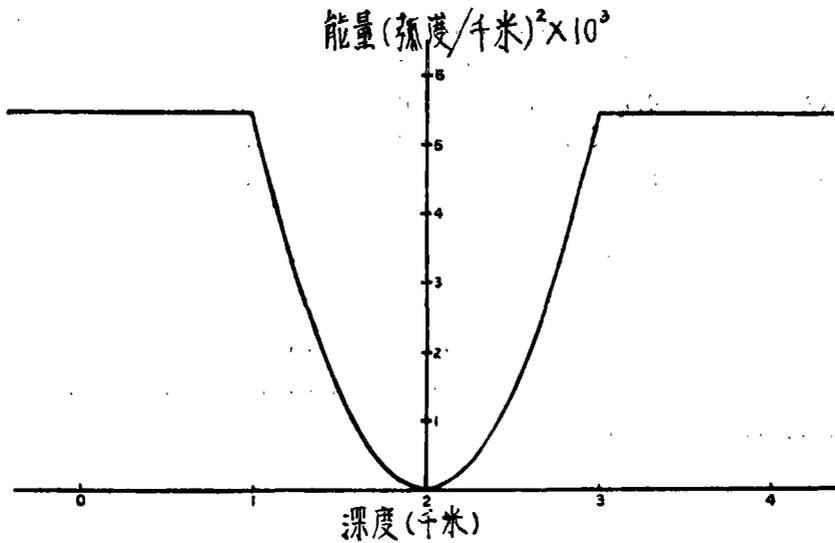


图 4. 有限抛物线波导的势

在计算本征值时，用了由占据 1×10^3 到 5.25×10^3 ($\text{rad}/\text{公里})^2$ 范围的九个等间隔的能量构成的输入能量谱。Q 的 Riccati 方程在 $z=0$ 和 $z=4$ 公里处进行迭代，而 α 级数在 $z=2$ 公里处进行迭代。然后用数值积分来计算(70)式中的 $S(E)$ 的值，在这种情况下 $S(E)$ 与 E 的关系是线性的。在 10 秒钟的 CPU (中心处理机) 时间内确定了 37 个波导简正波。之表 3 中我们给出了分别由多项式内插和由(73)式得到的选定个数的本征值。

在阱的顶端附近，两个表达式之间在预期的误差下符合得非常一致。对于在 $n=8$ 到 $n=20$ 范围内的各号简正波，(73)式和多项式内插法之间符合到十位，而用外推到输入谱范围之外的方法得到的 $n=0$ 到 $n=6$ 的较低号简正波，至少符合到七位。关于本征值能够外推的特性是这个方法的一个重要部分，因为对于最低号简正波， α 级数在 $z=0$ 处收敛，而在输入

表 3. 对于抛物线波导($F=100$ 赫)的选定的本征值

n	$E_n(NT)$	$E_n[=\omega_n(2n+1)]$
0	$7.370057881330024 \times 10^1$	$7.3700577499533 \times 10^1$
2	$3.685028880171961 \times 10^2$	$3.6850288749766 \times 10^2$
4	$6.633051975804553 \times 10^2$	$6.6330519749580 \times 10^2$
6	$9.581075074017037 \times 10^2$	$9.5810750749392 \times 10^2$
8	$1.252909817377323 \times 10^3$	$1.2529098174921 \times 10^3$
10	$1.547712127410119 \times 10^3$	$1.5477121274902 \times 10^3$
12	$1.842514437425095 \times 10^3$	$1.8425144374883 \times 10^3$
14	$2.137316747394965 \times 10^3$	$2.1373167474865 \times 10^3$
16	$2.432119057370668 \times 10^3$	$2.4321190574846 \times 10^3$
18	$2.726921367467822 \times 10^3$	$2.7269213674827 \times 10^3$
20	$3.021723677523423 \times 10^3$	$3.0217236774808 \times 10^3$
22	$3.316525984787078 \times 10^3$	$3.316525984790 \times 10^3$
24	$3.611328268536392 \times 10^3$	$3.6113282974771 \times 10^3$
26	$3.906130348660044 \times 10^3$	$3.9061306074752 \times 10^3$
28	$4.200927377370186 \times 10^3$	$4.2009329174734 \times 10^3$
30	$4.495750968766893 \times 10^3$	$4.4957352274715 \times 10^3$
32	$4.790490097603708 \times 10^3$	$4.7905375374696 \times 10^3$
34	$5.085307981341652 \times 10^3$	$5.0853398474678 \times 10^3$
36	$5.380172574182845 \times 10^3$	$5.3801421574659 \times 10^3$

能量谱的范围内该级数从 6 到 15 位收敛。正如我们将在下一节中将要看到的,在级数收敛的输入谱中存在能量的情况下,这样一个缺点不会引起困难。

由 (71) 式得到的解将不明显地表现出它们的形式与著名的简谐振荡“波函数”一样。然而,我们发现它们在能量的大部分范围内与 (72) 式符合到六位,而在靠近阱的顶端的地方,正如预期的那样,这种符合就不好了。

III. 表面波导传播

在这一节中我们研究位于表面波导中的单位强度的点源发出的声的传播,忽略海底的影响。以前 Pederson 和 Gordon¹³ 曾研究过这个问题,最近 Labianca¹⁴ 也研究了此问题,他指出了这个问题与核 α 蜕变的虚能级(virtual-level)理论的形式上的类似性¹⁵。

声速剖面将取为具有如下形式:

$$c(z) = c_0 / (1 - 2\gamma z)^{1/2} = c_0 / [1 - 2\gamma L + 2\gamma_T(z - L)]^{1/2} \quad 0 \leq z \leq L \quad z \geq L \quad (74)$$

其中 c_0 为表面声速, L 为层的深度, $\gamma (>0)$ 和 $\gamma_T (<0)$ 分别为波导上下的剖面参数。当把 (74) 式代入 z 向分离的波动方程时,势有如下形式:

$$V(z) = \Gamma z = (\Gamma + \Gamma_T)L - \Gamma_T z \quad 0 \leq z \leq L \quad z \geq L \quad (75)$$

其中 $\Gamma = 2\gamma k_0^2, \Gamma_T = 2\gamma_T k_0^2, k_0 = \omega/c_0$ 。对一任意的 $E (=k_0^2 - \lambda^2)$ 的势的图示于图 5。正如图中

所描述的, 深度范围被左(Z_L)右(Z_R) 转折点分成三个区域。为了说明, 我们把这些区域编号为 $R_1: 0 \leq z \leq z_L$ (容许区), $R_2: z_L \leq z \leq z_R$ (禁区) 和 $R_3: z_R \leq z < \infty$ (容许区)。在 R_1 中, 通解为复指数形式的线性组合, 在 R_2 中, 一般既应该包含指数增加的实形式也应该包含指数下降的实形式, 因为这个区域的范围是有限的。但是, 因为我们对在波导中给出最大贡献的那些简正波 (被强烈地陷入的 (trapped) 简正波) 感兴趣, 所以我们只在禁区中保留指数衰减的解。因此, 根据与在 II.02 节中所提出的类似的理由, 得到

$$u_1(z) = \sec(\theta_L^-) \left[\frac{q_R(z_L)}{q_R(z)} \right]^{1/2} \cos$$

$$\left[\int_{z_L}^z dz' q_R(z') + \theta_L^- \right] \quad (76)$$

$$u_2(z) = \exp \left[- \int_{z_L}^z dz' Q(z') \right] \quad (77)$$

而 z_R 以下的解则要减小一个因子

$$I = \exp \left[- \int_{z_L}^{z_R} dz' Q_-(z') \right] \quad (78)$$

上面

$$\tan(\theta_L^-) = \frac{Q_-(z_L) - q_I(z_L)}{q_R(z_L)} \quad (79)$$

由要求(76)在表面上等于 0 而得到的本征值条件为:

$$\int_0^{z_L} dz' q_R(z') - \theta_L^- = (\pi/2)(2n-1) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (80)$$

作为上述方法对于一特定问题的应用, 我们来考虑曾在关于声传播的 AESD 专题讨论会上研究过的 300 赫表面波导的例子⁴。为了得到所给出的结果, 对于占据 $E=2 \times 10^{-3}$ 到 $3 \times 10^{-3} \text{ rad}^2/\text{码}^2$ 范围的十个等距的输入能量求 $S(E)$ 量 [类似于(70)式] 之值。在构成角度 θ_L^- 的同时, 在表面求 α 级数之值, 在禁区中 $z=160$ 码处求 Q 的 Riccati 方程的迭代解之值。然后用数值积分得到转折点(z_L)之值, 用多项式内插法来确定诸本征值。给出两个简正波, 能量分别为 $E_1=2.2365 \times 10^{-3}$ 和 $E_2=3.9097 \times 10^{-3} \text{ rad}^2/\text{码}^2$, 这可以与 WKB 近似的值 $E_1=2.2194 \times 10^{-3}$ 和 $E_2=3.9044 \times 10^{-3} \text{ rad}^2/\text{码}^2$ 相比较。

在求简正波函数之值时, 对第二个简正波碰到了一个困难: Q_- Riccati 方程的迭代因为接近转折点而不能收敛。但是这个毛病并不否定(77)式的解的形式之存在。为了保持这个形式, 我们不去使禁区中的解与容许区解连续和匹配, 而是利用(80)式中的本征值条件来确定 θ_L^- 和 $Q_-(z_L)$, 不再求助于迭代。已经证实在 Pedersen 和 Gordon¹³ 所考虑的 1030 赫情况的研究中, 这种方法的精度可达 10 位。

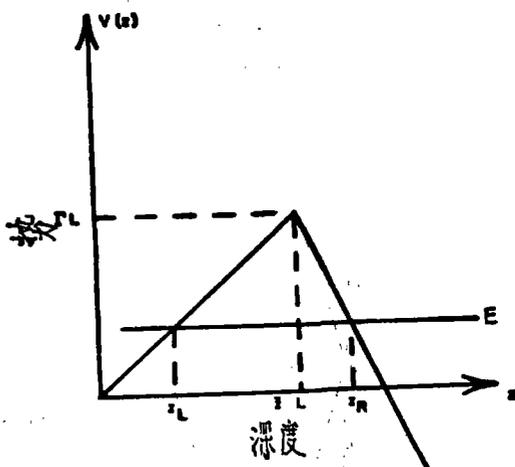


图 5. 表面波导的双线性势

对深度为 230 码的情况用这种方法得到的未归一化的简正波函数示于图 6。对于第一号简正波在 z_B 以下的解没有画出，因为由于 (78) 式的指数因子而使其在幅度上受到严重的抑制。图 7 表示传播损失作为距离的函数与 NUC-1 模型 (参考文献 4) 比较。传播损失是用著

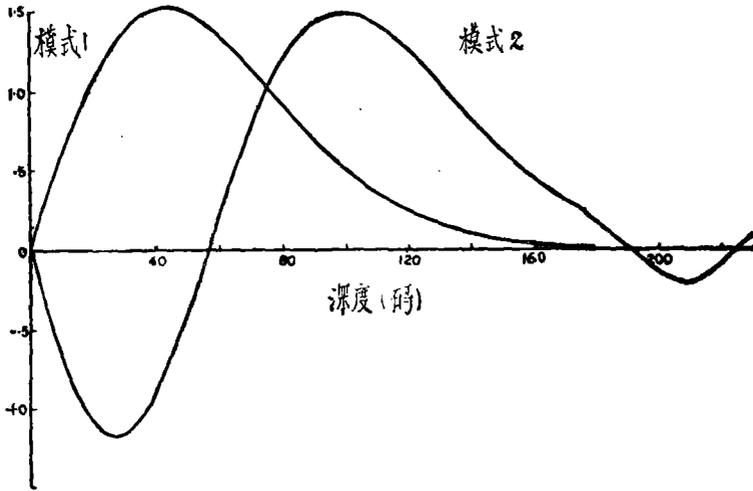


图 6. AESD 表面波导例子中的波导简正波(注: 图中模 1 和模 2 即第 1, 2 号简正波)

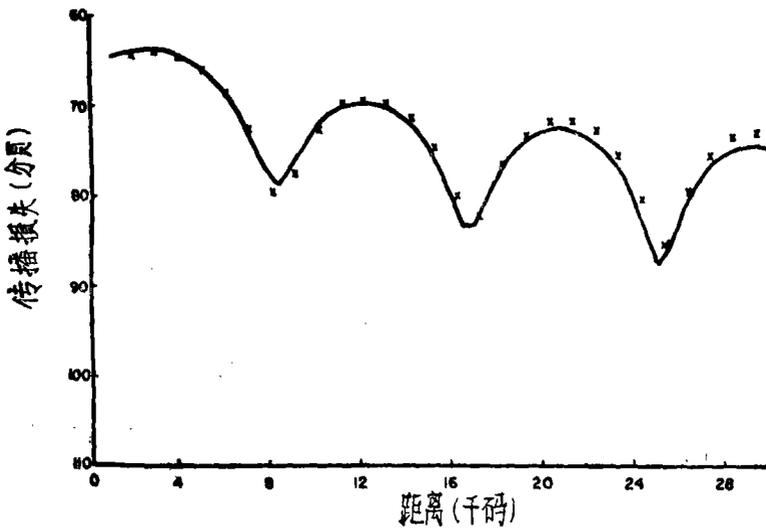


图 7. AESD 表面波导例子中的传播损失作为距离的函数
实曲线-NUC-1 模型; × 由(81)式得

名的表达式

$$PL = -10 \log_{10} |\psi|^2 \quad (81)$$

计算的, 用 Hankel 函数的渐近形式来表示(6)式的速度势。所给出的曲线是由一个预测对于 30 个等距 1/2 海里间隔点在 100 个深度点上的传播损失的程序得到的。总的执行时间为 17.1 秒。

在整个距离上两种模型的预测之间符合得非常之好。但是, 超出了 16 千码的距离, 由 (81) 式得的预测稍微高一些。因为由多项式外推法确定的波数与 NUC-1 模型的波数的实部

至少符合到六位，差异的原因是没有 NUC 模型所包含的简正波衰减。在这个情况下吸收显然不是一个因素。

在本节结束的时候我们谈一下用以确定本征值的内插法中的一个明显的权重影响。 α 级数在输入谱的最低能量上收敛，它最好也不过是对于下两个较高能量的渐近表式。用把输入能量范围提高到 2.6×10^{-3} 至 $3.2 \times 10^{-3} \text{ rad}^2/\text{码}^2$ 的办法得到从二位到三位的收敛。所得的本征值为 $E_1 = 2.2365 \times 10^{-3}$ 及 $E_2 = 3.9118 \times 10^{-3} \text{ rad}^2/\text{码}^2$ ，与上面给出的结果略有改变。

IV. 对结果的讨论

我们已经直接用 NT 方法解由抛物线和双线性声速剖面确定的 Stoke 方程和边值问题。对于简单情况明白地得到的那些结果显示了这种方法的一些重要特点。特别是这种方法可应用的范围很宽，计算起来精确且有效，很容易把解析剖面 and 用剖面上的一些点以直线段连结起来而得到的分层剖面结合起来。

在整个介绍中我们一直集中注意这个方法的精度及其计算速度。对于后者，我们强调没有为使计算时间最小而作任何明显的努力。诚然，在明确地给出的那些例子中，为简单起见，即便在可望收敛（迭代）要快一个数量级的那些区域中我们也一直是用只是把 Riccati 方程进行积分的普通方法。因此，所引用的 CPU 时间应该认为只是这种方法的基本速度的一种标志。另外，这个方法的各种应用都是用于简正波模型较为合适的比较低频的情况的。自然，NT 方法有其最大希望的是在高频。在这方面，我们注意到，对于有限抛物线波导的例子，用只比在 100 赫计算 37 个简正波所需要的 CPU 时间多 1/2 秒的时间就可以确定在 1 千赫出现的 369 个本征值。

最近工作在这种方法的进一步应用方面取得了进展，将它推广到包含确定诸简正波的虚部，关于这点我们准备晚些时候再报导。

(陶笃纯译 尚尔昌校)

参 考 文 献

- [1] 可参见(例如) H. P. Buckner, "Sound propagation in a channel with lossy boundaries," JASA 48, 1187 (1970); and J. E. Freehafer, "Physical Optics," Propagation of short radio waves, edited by D. E. Kerr (McGraw-Hill, 1951), vol. 13, MIT. Rad. Lab. Ser.
- [2] F. R. DiNapoli, "Fast field program for multi-layered media," NUSC Rep. No. 4103 (1971. 8.)
- [3] D. C. Stickler, "Normal-mode program with both the discrete and branch line contributions," JASA 57, 856 (1975).
- [4] C. W. Spofford, "A Synopsis of the AESD Workshop on Acoustic-Propagation modeling by non-ray tracing techniques," AESD TN73-05, 1973. 11.

- [5] W. I. Newman & W. R. Thorson, "New method for rapid numerical solution of the one-dimensional Schrödinger equation," *Phys. Rev. Lett.* 29, 1350 (1972); and "Rapid numerical solution of the one-dimensional Schrödinger equation," *Can. J. Phys.* 50, 2997 (1972).
- [6] E. T. Whittaker & G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis* (Cambridge Univ, Cambridge, England, 1963)
- [7] N. Froman & P. O. Froman, *JWKB Approximation Contributions to the Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1965); and L. C. Baird, "New integral formulation of the Schrödinger equation," *J. Math. Phys.* 11 2235 (1970).
- [8] 关于这些函数的性质及其数值可查阅 "Tables of modified Hankel functions of order one-third and their derivatives," *Ann. Harvard Univ. comp. Lab.* 2, 2-3 (1945).
- [9] 精确值可由文献 8 得到。
- [10] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1966).
- [11] I. Tolstoy & C. S. Clay, *Ocean Acoustics* (McGraw-Hill, 1966).
- [12] W. E. Milne, "The numerical determination of characteristic numbers," *Phys. Rev.* 35, 863 (1930).
- [13] M. A. Pedersen & D. F. Gordon, "Normal-mode theory applied to short range propagation in an underwater acoustic surface duct," *JASA* 37, 105 (1965).
- [14] F. M. Labianca, "Normal-modes, virtual modes, and alternative representations in the theory of surface-duct sound propagation," *JASA* 53, 1137 (1973).
- [15] 关于这个问题的 WKB 方法可参考文献 1 和 A. C. Kibblewhite & R. N. Denham, "Experiment on propagation in surface sound channels," *JASA* 38, 63 (1965).