

# 谈谈阵处理理论中的某些问题

P.M.Schultheiss

(美国耶鲁大学工程和应用科学系)

## 一、前 言

近廿年来,由于雷达、声纳和地震学中所出现的许多实际问题,大大推动了阵处理领域研究的蓬勃开展。本文不是一篇全面综述,不想对各种流派及有助于了解阵理论的各种高等数学分析不偏不倚地一一予以介绍。笔者感到,阵处理目前已是一个很成熟的领域,许多相当简单的直觉的概念都可以由正式的研究论文中概括出来。我们要提到的这些直觉的概念是这样一类简单的问题:我们学到了什么以及为什么这些结论是可信的?至于那些正统的证明目前文章很多,有兴趣的读者可以参阅之。

一开始,我们或许要简短地交待一下这样一个问题:为什么(或者是什么时候)在信号处理中利用基阵是重要的?在声纳中,我们感兴趣的是确定某个目标的存在(或许还有位置),这个目标辐射声波或者反射声波。这些声波可能具有各种波形,其中大多是已知的(主动声纳回波、机械辐射噪声);或者可能在很大程度上是随机的(辐射宽带噪声)。对于前者,这些知识就可以在相干信号处理的过程中利用。对于后者却只能主要地根据统计信息来处理。

如果信号的特性(确定的或者是随机的)十分不同于噪声,那么就能够实现成功的检测或定位。确切的统计特性包括时间特性(如功率谱)和空间特性(如空间相关)两方面。如果信号为一纯正弦过程或为一带很窄的随机过程,时间特征十分明显,因而处理器结构的核心将是时间(频率)滤波器。反之,舰船辐射的宽带噪声与海洋噪声十分相近,根据时间特征就不能区分。这时,要区分信号与噪声的话,空间特征(事实上,“信号”是由某一局部范围的源辐射出的,而“噪声”则不是)就成了唯一的依据。为了利用空间特性,必须同时观察空间上好几个点的声压,这样就不得不采用基阵。

理想的可能系统必须正确地利用时间和空间特征,而事实上大多数实用处理器都包括了这两类滤波。本文只讨论基阵处理。所以我们集中讨论空间处理的问题,主要是信号是随机的并且具有和噪声相似的时间特性这样的情况。特别要说明,我们将限定信号与噪声二者皆为平稳高斯过程。

简单的阵处理器在声纳中已沿用很长时间了。其经典结构如图1所示。在各传感器的输

\* 原文题目:“Some Lessons From Array Processing Theory.”

出端接有延迟线，以对准信号。信号在相加器中将叠加起来，而噪声一般却不会。如延迟线恰好与信号波形匹配，则相加器后之功率检测器将产生一个比所有其它情况为大的平均输出。对于一远场信号源来讲，信号从一传感器至另一传感器的延迟很容易变换成源方位  $\theta$ 。所以

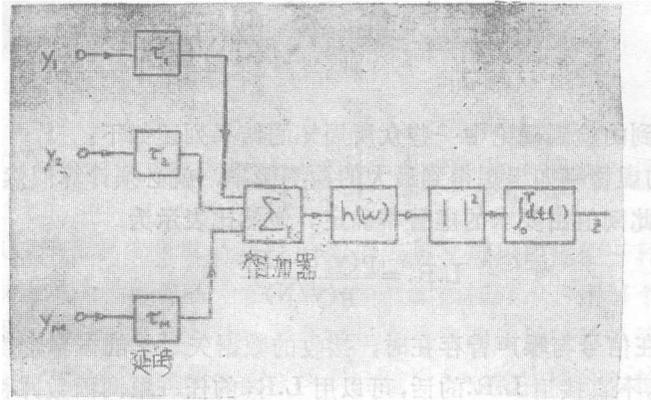


图 1

处理器得出的是一条如图 2 绘出的平均方位响应曲线。

要断定信号确实存在，还必须对周围嘈杂的噪声进行测量，如果图 2 中的峰还确实存在

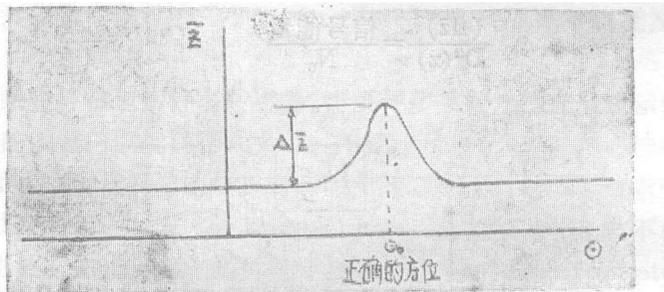


图 2

方可确信无疑。如果图 1 中输出起伏的均方值为  $D(z)$ ，此要求条件是  $\Delta \bar{z}/D(z) \gg 1$ 。这个比值的平方通常称作输出信噪比  $d$ ，并且广泛地把它用作检测器的优质因数：

$$d = \frac{(\Delta \bar{z})^2}{D^2(z)} \tag{1}$$

图 1 中的延迟线在实际中常用数字移位寄存器实现。延迟线的各不同组合可以同时加起来，然后可以运算并显示一组  $\bar{z}$ ，它对应许多  $\theta$  值，而运算时间不超过单个  $\theta$  值进行这种运算所需要的时间 (DIMUS [数字多波束] 系统<sup>[1]</sup>)。

只凭初步直觉就可看出，图 1 并不能确保最佳地利用得到的数据，这样，对阵处理理论才发生了兴趣。人们是否能达到更好的结果，这个问题促使 Bryn 在 1961 年最先研究了最佳检测器<sup>[2]</sup>。他的首批结果曾是很鼓舞人心的。对于相当普通的一些类型的噪声场 (例如，各向同性海洋噪声)，都明显地有大的增益。事实上这种潜在的巨大增益令人怀疑。接着，Vanderkulk 于 1962 年证明，要想对各向同性噪声场实现如 Bryn 所预报的那么大的增益，需要极多的传感器，而其位置精度的要求是完全无法达到的<sup>[3]</sup>。这就给热衷考虑应用最佳方法泼了一瓢冷水。

只是到后来发现 Bryn 和 Vanderkulk 所考察的噪声场是一种不很利于实际改善增益的

情况，并不意味着其它情况也不能取得显著增益时，才重又萌起了研究最佳(或接近最佳)方法的兴趣<sup>[41,151]</sup>。因而，一个重要的理论问题是鉴别什么情况下可能得到比图 1 大的增益。

## 二、基本理论

我们将需要用到的检测理论中一些众所周知的结果列述如下：

a) 对一固定的虚警率如果想得到最大的检测概率，就必须计算似然比 (L.R.) 并将其与一阈值进行比较，此阈值由要求的虚警率确定。似然比表示为

$$\text{L.R.} = \frac{p(\mathbf{y}/S+N)}{p(\mathbf{y}/N)} \quad (2)$$

$p(\mathbf{y}/S+N)$ 是在信号与噪声皆存在时，接收的数据矢量  $\mathbf{y}$  的概率密度。 $p(\mathbf{y}/N)$ 是只有噪声时  $\mathbf{y}$  的概率密度。不直接用 L.R. 的话，可以用 L.R. 的任一单调函数并将其与经过适当调节的阈值进行比较。为便于计算，常取  $z = \log(\text{L.R.})$  作分析。

b) 如果信号是一个已知时间函数  $s(t)$ ，噪声是谱级为  $N_0$  的白色高斯噪声，则最佳检测器就是接收波形与复制信号简单的互相关(见图 3)。此系统的优质因数(方程(1))为

$$\frac{(\Delta z)^2}{D^2(z)} = \frac{\text{信号能量}}{N_0} \quad (3)$$

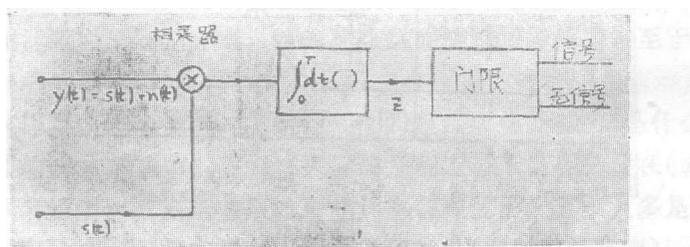


图 3

o) 如果信号是一个已知时间函数，噪声是高斯的但谱是非白的  $N(\omega)$ ，并且观察时间  $T$  大于噪声相关时间，则最佳检测器形式如图 4。除加了一个噪声予白化滤波器并在复制信

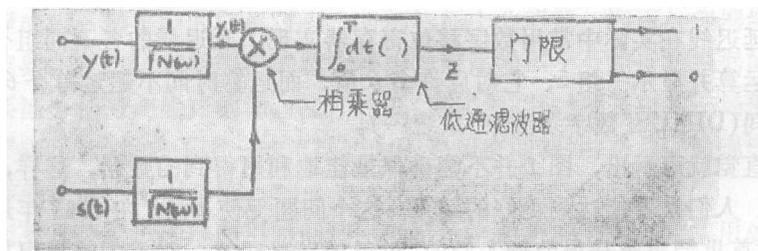


图 4

号通道也加了同样滤波外，其余都与图 3 一样，这样送入乘法器的复制信号与  $y_1(t)$  中信号分量波形就是相同的。特别是，如果信号是一频率为  $\omega_0$  的纯正弦信号，则只有在  $\omega_0$  附近  $2\pi/T$  弧度/秒内的噪声分量，才会产生能通过低通滤波器的互调乘积。因而，只是在  $\omega_0$  附近的  $(2\pi/T)$  频带内予白化滤波器的形式才是重要的。要是噪声谱在这一段内是平坦的，则图

3 就十分接近于最佳。

现在我们就来着手研究，在具有任意空间特性的高斯噪声背景中检测高斯信号的问题，这信号是由空间某一局部的声源产生的。似然比[方程(2)]的分子、分母分别为

$$p(\mathbf{y}/S+N) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sqrt{\text{Det}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^*(\mathbf{P}+\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{y}\right\} \quad (4)$$

$$p(\mathbf{y}/N) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2} \sqrt{\text{Det}\mathbf{Q}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{y}^*\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}\right\} \quad (5)$$

$\mathbf{y}^*$  表示  $\mathbf{y}$  矢量的转置(如果是复变量就是共轭)。数据矢量  $\mathbf{y}$  可以由随便一种表示接收波形的参量组成。譬如，可以用  $M$  个传感器各个输出的  $n$  个时间抽样样本、用  $M$  个传感器各个输出的  $n$  个付里叶系数以及其它许多可能参量。 $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  是在选定的参量表示系统中信号与噪声的协方差矩阵。由于方程(4)和(5)是指数形式，所以一般用  $z = \log L.R.$  作为检测统计量：

$$z = \log L.R. = \frac{1}{2}\mathbf{y}^*[\mathbf{Q}^{-1} - (\mathbf{P}+\mathbf{Q})^{-1}]\mathbf{y} \quad (6)$$

那些与数据矢量  $\mathbf{y}$  无关的项都省略了。方程(4)与(5)假定了  $\mathbf{y}$  是实变量。如果是复变量(例如，用复数付里叶表示)，指数中就没有  $1/2$  因子，方程(6)中的  $1/2$  系数也就没有了。这个差别显然无关大局。

实际声纳问题中，接收阵常包括许多传感器。需要许多系数才能充分表示每个接收波形。因此，方程(6)中矩阵的维数一般就显得太大了，不便于求逆。这样，细心选择表示法就成了急待解决的问题。下面这个早已熟知的结果为解决此问题提供了必要的线索<sup>[6]</sup>：

如果一平稳随机过程的观察时间大于其相关时间，其复数付里叶系数不相关。

这样，如果我们将数据矢量  $\mathbf{y}$  看作是付里叶系数矢量  $\mathbf{y}_k$  的并矢 (concatenation of vectors)，则方程(6)中的矩阵变为分块对角矩阵并可写为：

$$z = \sum_{k=1}^n \mathbf{y}_k^* [(\mathbf{N}_k \mathbf{Q}_k)^{-1} - (\mathbf{S}_k \mathbf{P}_k + \mathbf{N}_k \mathbf{Q}_k)^{-1}] \mathbf{y}_k \quad (7)$$

$\mathbf{y}_k$  为频率  $\omega_k = 2\pi k/T$  的付里叶系数矢量，其维数是  $M$ ，即传感器个数。 $\mathbf{Q}_k$  是在  $\omega_k$  频率上噪声付里叶系数的协方差矩阵，它被归一化，使得此矩阵的迹满足  $\text{Tr}(\mathbf{Q}_k) = M$ 。 $\mathbf{N}_k$  很简单，就是  $\omega_k$  频率上的噪声谱。信号协方差矩阵以同样的方法归一化而  $\mathbf{S}_k$  是  $\omega_k$  频率上的信号谱。因为是用复数形式表示， $z$  定义中的  $1/2$  因子被略掉。

如果传感器数目很大，用方程(7)求逆矩阵依然很难。但在下面两种重要的特殊情况下，可得到比较简单的结果：

a)  $S_k/N_k \ll 1$  (小输入信噪比)

$$\text{这时} \quad (\mathbf{S}_k \mathbf{P}_k + \mathbf{N}_k \mathbf{Q}_k)^{-1} \approx (\mathbf{N}_k \mathbf{Q}_k)^{-1} [\mathbf{I} - \mathbf{S}_k \mathbf{P}_k (\mathbf{N}_k \mathbf{Q}_k)^{-1}]^{-1} \quad (8)$$

于是

$$z = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{N_k} \mathbf{y}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{P}_k \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k \quad (9)$$

由于  $\mathbf{P}_k$  是一协方差矩阵，它是非负定的，因而可以写成

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{B}_k \mathbf{B}_k^* \quad (10)$$

这样

$$z = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{N_k^2} \| \mathbf{B}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k \|^2 \quad (11)$$

符号  $\| \mathbf{A} \|$  表示  $\mathbf{A}$  矩阵的范数。如  $\mathbf{P}_k$  是一  $M$  秩矩阵,  $\mathbf{B}_k$  为  $M \times M$  维矩阵, 则方程(11)要求在每个频率上形成  $M$  个不同的  $(\mathbf{y}_k)_i$  的线性组合。从滤波观点看, 此最佳处理器包含  $M^2$  个频率滤波器。因此, 在  $M$  很大时, 要解决这个问题是很棘手的。

如果信号来自一点源, 就产生了一个完全相干的波形, 于是最佳处理器的实现可大大简化。

b) 相干信号波形

这时  $\mathbf{P}_k$  秩为 1, 因而可把它表示成矢量  $\mathbf{V}_k$  同其本身的外积:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k^* \quad (12)$$

从物理意义上讲,  $\mathbf{V}_k$  简单地就是各不同传感器上相对相移的矢量。

$$(\mathbf{V}_k)_i = \exp\{j\omega_k \tau_i\} \quad (13)$$

式中  $\tau_i$  是第  $i$  个传感器的相对延迟。现在利用方程(7)求逆, 不必非假定小信噪比便可得到,

$$z = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{S_k}{N_k^2}}{1 + \frac{S_k}{N_k} \mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{V}_k} |\mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k|^2 \quad (14)$$

唯一的空间算符是  $|\mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k|^2$ 。它与方程(11)中算符  $\| \mathbf{B}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k \|^2$  的不同在于  $\mathbf{V}_k$  是一个矢量, 因而  $\mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{y}_k$  是一个数, 而不是一个矢量, 计算时只需要计算它的平方。所以, 最佳处理器也大为简化, 只需要  $M$  个(而不是  $M^2$  个)频率滤波器。这样, 实现起来根本不麻烦。利用 Parseval 定理将  $k$  个求和转换成时间积分得到了图 5 的方块图。

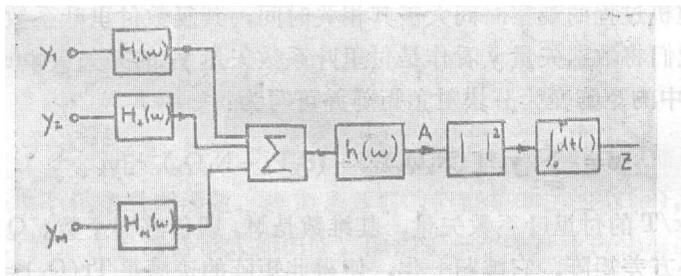


图 5

滤波函数  $H_i(\omega)$  为

$$H_i(\omega_k) = (\mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1})_i \quad (15)$$

$h(\omega)$  是公用频率滤波器:

$$h(\omega_k) = \frac{\frac{S_k}{N_k^2}}{1 + \frac{S_k}{N_k} \mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{V}_k} \quad (16)$$

二次型  $\mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{V}_k$  称为阵增益:

$$\mathbf{G}_k = \mathbf{V}_k^* \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{V}_k \quad (17)$$

它可以解释作 A 点的信噪比除以每个单个传感器上的信噪比。因此, 它直接度量了通过阵处理

所取得的信噪比的改善。

图 5 表示的这种最佳处理器利用了信号与噪声的空间与时间两方面的特征。下面就它的工作原理和性质作几点解释。

1) 由方程(15)所规定的  $H_1(\omega_k)$  滤波器组的作用是初级空间处理。它们首先使接收波形受到算符  $Q_k^{-1}$  的作用, 此作用可看作是空间予白化。算符  $V_k^*$  的意义很简单, 就是对准信号分量。所以, 整个空间运算可以表作为“予白化与信号匹配相结合”。不久我们将会看到, 这种空间处理可以看成是图 4 的一个特殊情况。

2) 一般来讲, 频率滤波器  $h(\omega)$  通过阵增益  $G_k$  与噪声的空间特性有关。可是对于实际中十分重要的小信噪比输入情况,  $h(\omega)$  就与  $G_k$  无关:

$$h(\omega_k) \approx \sqrt{S_k/N_k} \quad (18)$$

这便是著名的 Eckart 滤波器, 它利用信号与噪声在时间谱上的差别来提高信噪比。

3) 对于一给定的虚警率, 似然比处理器可使检测概率为最大。但倘若不侧重于检测, 而是着眼于从信号成分中提取信息, 则宁可用另外的性能准则。例如可选用:

a) 在处理器输出端使信噪比最大; 或

b) 处理器对输入信号分量作出最佳的均方估计 (Wiener 滤波器)。

有意思的是, 按这些准则推导最佳化得到的基本空间运算是相同的。所不同的只是公用频率函数  $h(\omega)$ , 其表达式为<sup>[7]</sup>

$$\text{情况 a):} \quad h(\omega_k) = \sqrt{S_k/N_k} \quad (19)$$

$$\text{情况 b):} \quad h(\omega_k) = \frac{S_k/N_k}{1 + (S_k/N_k)G_k} \quad (20)$$

其实, Wiener 滤波器的运算与图 5 基本一样, 这就强烈地暗示, 对象一传感器对另一传感器的延迟这样的信号参量(也就是方位与距离)进行估计之处理器将会与图 5 完全相同。

4) 图 5 检测器的检测指数(方程(1))不难算出。小信噪比时形式很简单, 为:

$$d = \frac{T}{2\pi} \int_0^\infty \left[ \frac{S(\omega)}{N(\omega)} \right]^2 G^2(\omega) d\omega \quad (22)$$

$S(\omega)$ ,  $N(\omega)$  和  $G(\omega)$  是  $S_k$ ,  $N_k$  和  $G_k$  的连续形式。因此, 阵增益完全代表了检测器的性能。

5) 当噪声空间非相干时,  $Q_k = I$ , 则

$$G_k = M$$

$$\text{而 } H_1(\omega)_k = (V_k^*)_1 = \exp(-j\omega_k\tau_1) \quad (23)$$

图 5 简化为图 1, 普通波束形成器为最佳。所以, 至少有一种十分重要的情况, 在这种情况下采用比普通波束形成更复杂的处理方法毫无好处。因而, 核心的问题是, 最佳方法是否有实用意义还是仅仅有学术价值。

6) 图 5 的处理器要比方程 (11) 所描写的矩阵处理器简单得多。实际的源从来不是一个点, 而总是局限在空间一个小区域内。这个区域要小到多少才能忽略其空间分布并不致引起性能的明显下降呢? 通过严格计算(不限于小信噪比)得到了很合理的结果: 一个源如果其在接收阵上的张角比波束指向性图的主瓣宽度小, 便可看作是一个点源。

### 三、最佳处理与普通处理之比较

上一节我们还留下了一个未解决的问题，就是在现实的重要情况中，有没有最佳处理结果胜过普通处理方法的情况。为剖析清楚这个问题，先考虑单频分量，信号是由远场一高斯点源辐射出的。为在几何上简单起见，我们将研究一直线接收阵，如图6所示。如果在原点处收到的信号分量(复信号)为  $s_0 = A \exp\{j\omega_0 t\}$ ，则在  $x$  点接收的信号分量相应为：

$$s(x) = s_0 \exp\left\{j\omega_0 \frac{x}{c} \sin\theta\right\} \equiv s_0 \exp\{j\nu_s x\} \quad (24)$$

其中， $\nu_s \equiv (\omega_0/c) \sin\theta$  为空间频率(波数)。

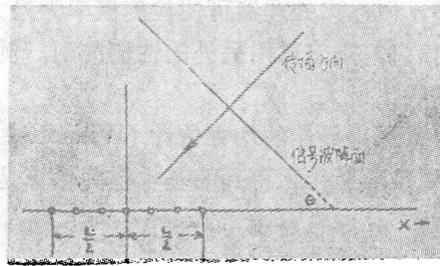


图6

若将信号看作是  $x$  的函数的话，那么它便是一频率为  $\nu_s$  的简单正弦波。在声源方位  $\theta$  已知时， $\nu_s$  是确定的，因而有待我们处理的是，在高斯噪声中检测已知信号。又假如噪声是白色的(这里指空间)，那我们立即可以推断，最佳检测器就是接收数据与复制信号求相关。其数学运算是下式：

$$\begin{aligned} z &= s_0 \int_{-L/2}^{L/2} y(x) \exp\{-j\nu_s x\} dx \xrightarrow{\substack{\text{离散} \\ \text{传感器}}} s_0 \sum_{r=1}^M y(x_r) \exp\{-j\nu_s x_r\} \\ &= s_0 \sum_{r=1}^M y(x_r) \exp\{-j\omega_0 \tau_r\} \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\tau_r = (x_r/c) \sin\theta$  为信号在传感器间的延迟[见方程(13)]。方程(25)精确表达了图1普通波束形成器的空间运算过程。于是，直接从相干检测的基本理论可以推出，对于空间非相干噪声场来讲，普通波束形成器是最佳的。现假定噪声不是空间非相干的，但其相关半径比阵长  $L$  短。我们采用图4的空间等效办法来处理，这办法是：予白化加上与一经适当加工的复制信号之互相关。予白化只对平稳噪声才有意义。空间平稳意味着在点  $x_1$  和  $x_2$  处接收波形的互相关只取决于  $x_1 - x_2$ 。在噪声来自远场时，即噪声源的距离比阵长  $L$  大许多时，这条件是满足的。这种噪声可以看作是许多象方程(24)那样形式的平面波迭加的结果，其处于任一空间频率增量范围内的功率与相应的某一开角内的噪声源的数目和强度有关。图7为典型的空谱  $N(\nu, \omega_0)$ 。图7a表示的是一球面各向同性噪声模型，早期的最佳检测工作多用此模型<sup>[2, 3]</sup>，图7b表示噪声主要是从左侧角度上入射的。图中还绘出了一平面波信号，在谱图上它呈现为一  $\delta$  函数。

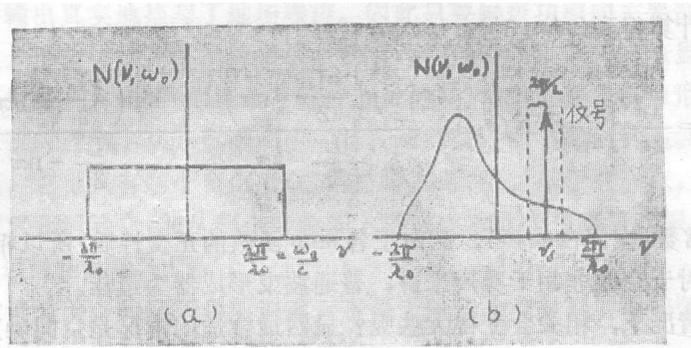


图 7

值得注意的是，所有远场谱都局限于  $|\nu| \leq 2\pi/\lambda_0$  范围内，其两端点相应的是从端射方向入射的平面波。用一组间隔为  $d$  的均匀空间分布的传感器进行观察，就相当于对谱进行通常的抽样：抽样后的谱以周期  $2\pi/d$  周期地重复非抽样谱。因此，为防止谱重迭，传感器间隔必须满足：

$$\begin{aligned} 2\pi/d &> 4\pi/\lambda_0 \\ \text{或} \quad d &< \lambda_0/2 \end{aligned} \quad (26)$$

其中， $\lambda_0$  为频率是  $\omega_0$  的声波波长。

现在我们就可以完成类似图 4（在非白的高斯噪声中检测已知信号）的运算并迅即得出下面结论：

如果噪声相关半径比阵长短并且若空间噪声谱在  $\nu = \nu_0$  附近的宽约  $2\pi/L$  的区间上基本平坦，则普通波束形成器接近最佳。

因此，对于象图例 7b 这样的情况，不管噪声的空间分布宏观上多么不均匀，采用最佳空间处理，收益都不会很显著。

当噪声相关半径并不短或者噪声谱在靠近  $\nu_0$  处不平时，为更深入探讨有没有进一步改进的潜在可能性，我们提出下列看法供考虑。

我们忽略空间抽样问题而假定对声场在  $-L/2 \leq x \leq L/2$  整个间隔内连续观察。普通波束形成器计算出付里叶系数

$$C_n = \int_{-L/2}^{L/2} y(x) \exp(-j\nu_n x) dx \quad (27)$$

接收声场完全可以由以下一组付里叶系数再现：

$$C_n = \int_{-L/2}^{L/2} y(x) \exp \left\{ -j \frac{2\pi n}{L} x \right\} dx \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (28)$$

恰当选择空间频率的原点总可以获得  $\nu_n = 2\pi s/L$ ， $s$  为一整数。那时，信号只对系数  $C_s$  起作用。所有其它  $C_n$  只取决于噪声。需要指出的是，所有  $C_n$  皆为普通波束形成器的输出（如 DIMUS 系统就可给出这些数），但有一条重要约定：当指数  $n$  很大时，没有一个真实的到达角同空间频率  $2\pi n/L$  对应。因此，要完满地表示接收声场，不仅需要 DIMUS 系统的有用波束，而且还要“假波束”，这“假波束”是在阵元之间的延迟比从端射方向入射还要大时得到的。

设整个信号出现于一个波束上，其它波束只能靠提供噪声信息协助检测。若信号波束中的噪声同其它所有波束的噪声都不相关，则普通检测器就是最佳的。其它情况下根据信号波束  $C_s$  中噪声分量与各噪声波束  $C_n$  中的输出之互相关的情况，有可能提高性能。对于空

间平稳噪声稍加计算得到( $s \neq n$ 时),

$$E_N\{C_s C_n^*\} = \frac{L^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu N(\nu; \omega_0) \frac{\sin\left(\frac{\nu L}{2} - s\pi\right)}{\frac{\nu L}{2} - s\pi} \frac{\sin\left(\frac{\nu L}{2} - n\pi\right)}{\frac{\nu L}{2} - n\pi} \quad (29)$$

若  $N(\nu; \omega_0)$  是一常数(空间白噪声), 又由于各 sinc 函数的正交性质, 所以相关很小。这样, 我们又一次证明了对于空间非相干噪声来讲, 普通波束形成器为最佳。

那么在什么情况下, 相关会变得大些呢? 显然最合适的情况是空间噪声谱高度集中, 象

$$N(\nu; \omega_0) = I(\omega_0) \delta(\nu - \nu_I) \quad (30)$$

它表示在  $\nu_I$  方向上有一平面波干扰。这时,

$$E_N\{C_s C_n^*\} = \frac{L^2}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{\nu_I L}{2} - s\pi\right)}{\frac{\nu_I L}{2} - s\pi} \frac{\sin\left(\frac{\nu_I L}{2} - n\pi\right)}{\frac{\nu_I L}{2} - n\pi} \quad (31)$$

因此, 除非  $\nu_I L/2$  是  $\pi$  的整倍数, 即除非干扰产生于普通波束指向性图的零点, 否则, 就有相关。对于宽带干扰来讲, 这种情况决不会在所有频率上同时发生。

再比(31)式进一步的是归一了的相关系数, 不难算出它为

$$\frac{E_n\{C_s C_n^*\}}{[E_n\{|C_s|^2\} E_n\{|C_n|^2\}]^{1/2}} = 1, \quad \frac{\nu_I L}{2\pi} \text{ 非整数} \quad (32)$$

因此, 任何非信号波束的输出就可充分地描写干扰并可用来消除干扰。如果总噪声场不单纯有纯干扰还包括其它成分, 消掉干扰的最好办法是搞一个干扰的复制, 而这只要在对准干扰方向上形成一个波束就可以了。这样就引进了 Anderson 和 Rudnik 曾论述过的所谓零点控制检测器的概念<sup>[4,5]</sup>, 图 8 就是它的简单示意图。首先是一个干扰波束形成器, 再调整 A 点的干扰分量之幅度使之与每个传感器匹配, 然后相减以抵消全部干扰, 最后波束形成器以常规方式对准信号。对于干扰方位与信号不很接近的情况, 这种比较简单的方法非常接近于最佳而且在干扰很强时能大大胜过普通检测器。

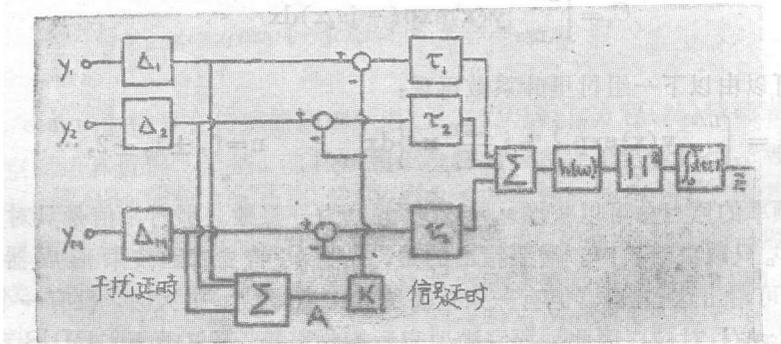


图 8

下面, 我们把抑制干扰这个题目暂时放在一边而把注意力转到本文的主要论题上来, 即: 究竟在什么时候用不是常规波束形成的处理方法能显著提高性能? 要使抑制干扰成为可能的话, 干扰就只可有一个空间自由度, 而这是可以由一简单的波束形成器的输出来描写

的。波束形成器的输出真实地描写了远场噪声。因此只要噪声功率的主要部分都集中在方程(28)所代表的少数几个波束内而不横跨很多,就有可能用不很复杂的方法显著提高性能。

当主要噪声分量是来自近场(如接收器附近产生的噪声)时,普通波束形成器就不再能提供最基本的特征。这时近场中某一点源产生的是一球面波,而不是同普通波束形成器匹配的平面波。虽然如此,它也只有两个自由度(源的方位和距离)。基于这一点,就可以采用相当简单的方法来描写它和消除它(如从整个接收阵上稀疏地取几个传感器)。根据这个基本想法,Cox提出了几个接近最佳的方案<sup>[9]</sup>。

在总结这一讨论之前,我们还必须追述一下关于最佳检测早期曾引起争论的一个问题。我们讨论一个各向同性噪声场,方程(29)就成为

$$E_N\{C_s C_n^*\} = \frac{L^2}{2\sigma} \int_{-\frac{2\pi}{\lambda_0}}^{\frac{2\pi}{\lambda_0}} d\nu \frac{\sin\left(\frac{\nu L}{2} - s\pi\right)}{\frac{\nu L}{2} - s\pi} \frac{\sin\left(\frac{\nu L}{2} - n\pi\right)}{\frac{\nu L}{2} - n\pi} \quad (33)$$

若阵长  $L$  远大于声波波长  $\lambda_0$ , 则积分延及许多 sinc 函数的波瓣。此积分所以不为零只是由于积分限大但是有限而产生了端效应。因此,相关系数很小,每一个噪声波束(或假波束)对降低噪声起不了多大作用。但这并不是说采用足够多的波束也得不到增益。事实上,严格的计算证明,只要附加波束的数目足够多,就可以把信号波束中的噪声级降到任意预定限以下。这个结论初看起来也许是不可思议的,其实不然。我们来看一个严格限定带宽的噪声谱。按照 Wiener 的外推法理论<sup>[10]</sup>, 一个具有这种谱的随机过程完全可以从任意有限长段的观察来预估的。用我们的术语来说,根据对  $-L/2 \leq x \leq L/2$  整个声场的观察,我们就可以算出包括整个  $x$  轴的声场值。因而,我们要是等效有一无限长的阵,那我们肯定有希望得到理想的检测能力。所谓“指向性”和“超增益”是与这样一种系统相联系的,这种系统尽量利用从远场接收的波形所具有的空间带有限的特点。

实际利用这一特点显然障碍重重,难以克服。每个噪声波束只起很小作用,所以我们不得不采用许多这样的波束。而一旦相应的空间频率超过了  $(2\pi/\lambda_0)$  (即我们刚要采用假波束),我们就必须增加抽样率以免谱重迭。这样,传感器间隔就非得减至小于半波长而所需传感器的数目随之也就迅速增加。对每个传感器还有一个不变的本地(空间非相干)噪声,使这个问题更为突出。这种空间白噪声很快就压制了由于空间频率超过  $2\pi/\lambda_0$  带来的裨益。所以性能改进受到实际传感器数目的严重限制,而且要求能取得改进的设备相当复杂<sup>[3]</sup>,一般根本无法采纳。一个可能的例外是检测端射信号的情况。这时,信号  $\delta$  函数位于噪声谱的尽头,在  $\nu = \pm 2\pi/\lambda_0$  处,故而方程(33)中的端效应最大。在这种情况下,当传感器间隔减小到半波长以下时,性能会迅速改善。然而,即使这种改进表明必要的复杂设备是值得的,这依旧是个问题。

不过在实际感兴趣的情况中,至少有一种情况超指向性方法值得重视。某些时候基阵不得不比声波波长小(Bryn 最早的分析就部分地受此问题的启发)。这时,普通波束形成器几乎是无指向性的而且其阵增益近乎等于 1。另一方面,传感器间的间隔本来就小于半波长,所以假波束就自然出现。于是在中等传感器数目的情况下,采用超指向性形式就可能得到某些好处。比如举个例子,研究把基阵置入一个尺寸小于声波波长的声纳浮标的问题。如果只有两个传感器,则最佳(超指向性)基阵的增益是

$$G_0 = 1 + 3\cos^2\theta \quad (34)$$

其中， $\theta$  是相对端射方向的角度。因此，对于从接近端射方向入射的信号，可获得约 6 分贝左右的改善。最佳检测器使用两个波束：一个是侧射波束，得到传感器输出之和；另一个是假波束，得到传感器输出之差。而在不十分靠近旁侧的观察方向上，后者是主要的。所以，只需要计算二传感器输出之差就行了（即测量声压梯度），而这是不困难的。

## 四、限幅与量化

上一节介绍的处理方法都相当复杂，以致用模拟方法是无法实现的，所以就只得用数字技术。最简单的数字方法就是，每个传感器的输出在进一步处理前实行强限幅。由于它极其简单同时又具有下面所要讨论的其它特性，所以有极大的优越性。图 9 就是一种强限幅数字型的普通波束形成器。抽样输出是二进制数，不管接收波形的形状如何，它只标示在抽

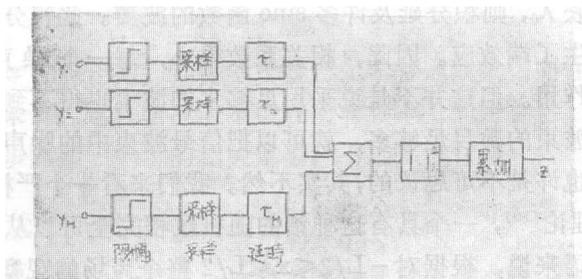


图 9

样瞬间是正极性或负极性。限幅与抽样显然要损失信息，所以可以预料必然要降低检测器性能。

在信号与噪声的谱是一带宽为  $W$  的白色（或予白化了的）谱时，对于空间非相干噪声情况，不难算出其性能降低的大小。计算求出，用 Nyquist 速率抽样的数字系统同图 1 所示的对应模拟系统相比较，折合成输入信噪比性能差约 2 分贝<sup>[11]</sup>。即使这不显著的损失也不全是限幅的结果。限幅造成了谱的扩展，所以再用每秒  $1/2W$  的速率抽样来表示数据就不行了。实际结果是，随着进一步提高抽样率，大约有一半损失可以弥补，因此纯粹是不可挽回的、必须注销的限幅损失只有大约 1 分贝<sup>[12]</sup>。限幅用很小的代价就把复杂的波形简化成一组相当简单的二进制数，乍看起来仿佛是难以想象的。要弄清楚其中的缘由，我们必须掌握模拟检测器是如何辨别信号的存在。模拟检测器所要接收的波形在各传感器间是同样的，只是延迟不同。而延迟大小很容易根据相邻传感器间过零点的相对位置来分辨，而这一信息在限幅过程中被保留下来了。这样，为什么提高抽样率有好处也就清楚了：抽样频率越高，分辨过零点位置也就越精确。

不过并不能根据上面所述就推断限幅不管什么时候都是划算的。事实上我们有很多理由有力地表明，在有些情况下限幅的代价是不容忽视的。比如，考虑一个强平面波干扰占优势的噪声场。这时，除了在干扰信号幅度接近于零的那一短暂时刻以外，波形的极性符号几乎完全取决于干扰。图 10 给出的是它的工作机理。只是极性不由干扰确定的那些样本才对检测过程有贡献。对于任一给定的干扰噪声比，计算总样本中的这样一小部分的样本是很简单的。

因而就对任意处理系统固有的性能下降有一估计，也就是为严格计算所证实了的对似然比处理器的估计<sup>[12]</sup>，即：如果以 Nyquist 速率抽样，一旦干扰噪声比超过 1，则干扰噪声比每增加 1 分贝就损失约 1/2 分贝。尽管加速抽样能弥补大约一半损失，但如果干扰噪声比甚大时，抽样速率会相当高<sup>[12]</sup>。

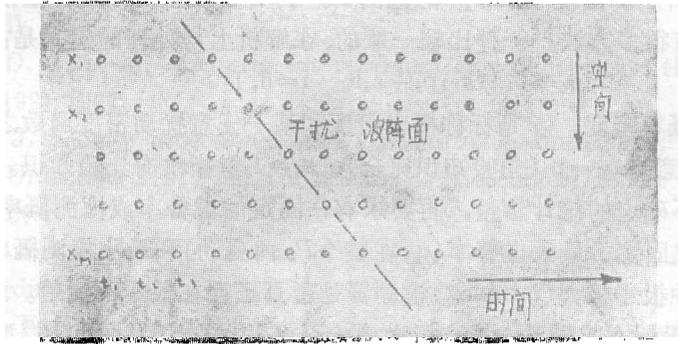


图10

如果限幅损失甚为严重，就得转而采用多层量化来改进性能。然而，除了大大增加了计算量外，多分层量化失去了强限幅的一个最引人注目的特征。限幅输出与输入幅度大小无关，它只保留极性信息。因此在输入功率级变化时系统不受影响。如果在一大型基阵中，有一个或几个传感器输出特别大，对阵性能的影响并不显著<sup>[13]</sup>。即使信号和噪声概率分布变了，只要相关特性(空间和时间)保持不变，也决不会影响系统的性能。所以，限幅系统正是在信号和噪声的那样一些统计参数变化的情况下具有相当程度的宽容性，即对这样一些统计参数可能只具有起码可靠的先验知识。

## 五、Robust检测器(宽容性检测器)

上一节我们已经提到了一个重要问题，这个问题是同最佳处理有关的。最佳检测器是利用特定信号与噪声的全部统计特征的，然而也正是由于这个原因，它对这些预定统计量出现的偏差往往是极其敏感的。要解决这个困难，可以从下面几个方面努力：

a) 设计检测器可以按标定统计量，然后当真实统计量偏离预定形式时检验它的性能如何变化。Cox 曾经对这种形式的偏离给出了性能灵敏度的表示式<sup>[14]</sup>。尤其是，他发现，在最佳检测器是一种超指向性型时，灵敏度似乎特别高。

b) 如果信号和噪声的统计参量之不确定性能用单个参量描写时(如：噪声功率或信号方位)，那么实际上可以一一检验这参量所有的可能值。与一工作在完全已知统计量的系统相比，性能损失一般是很小的。这个方法可以推广到一个以上未知参数的情况，不过将变得相当复杂以致无法采用。

c) 如果统计参量有显著的不确定性，那么就只得另寻非参量的方法，它所需要的只是一般的信息。毫无疑问，这样做代价往往很高。

d) 可以一方面测量真正的统计参量，同时设计一个检测器自适应此测量值。这里，其代价主要是变复杂了。不过在有关统计参量的先验知识难以掌握时，这种方法可能是最佳的、

唯一灵活的方法。

由于自适应处理另有专题讨论，我们这里就不再细述了。我们只就一种非自适应方法谈谈看法，这种非自适应方法适用于可用的先验知识比 b) 少但比 c) 多许多的情况。具体地讲，我们假定纯噪声的统计量  $q_0$  位于标称型  $p_0$  之“附近”，信号加噪声的统计量  $q_1$  位于标称型  $p_1$  之“附近”，如图 11 所示。围绕  $p_0$  和  $p_1$  的范围  $P_0$  与  $P_1$  是期望实际统计量落于其内的邻域。确定这种邻域可以有多种方法。一种比较一般的、在解析上易处理的定义是：

$$q_i = (1 - \varepsilon_i)p_i + \varepsilon_i h_i \quad i=0, 1 \quad (35)$$

$h_i$  是一完全任意的概率密度； $q_i$  是标称概率密度和某一任意扰动密度函数之线性合成； $\varepsilon_i$  是测度扰动量： $\varepsilon_i=0$  意指  $q_i=p_i$  (先验知识完全)， $\varepsilon_i=1$  意指没有先验知识。

如果面临的是不确定的统计参量，再要求有一固定的虚警率或检测概率就不可能了。这时恰当的办法是换成固定的最大虚警率( $q_0$  在整个  $P_0$  内变动)和最小检测概率最大化( $q_1$  在整个  $P_1$  内变动)。这种极小极大(minmax)检测器是否真正存在根本不清楚。近几年来，一个重大的理论成果就是 Huber 证明了，极小极大检验不仅对类别广泛的扰动模型存在(包括方程(35)的情况在内)，而且极小极大检验只不过是概率密度  $q_0^* \in P_0$  和  $q_1^* \in P_1$  的一种“最坏配对”(worst pair)间进行的普通似然比检验<sup>[15]</sup>。这个要求的似然比同标称似然比也有一个令人高兴的简单关系，如图 12 所绘出的那样。此宽容性检验简单地就是一种限幅型的标称检

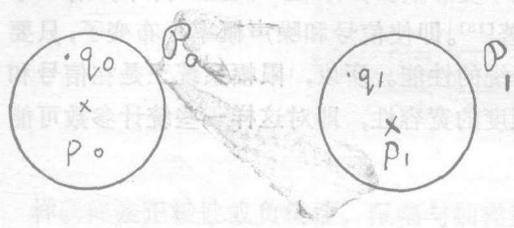


图11

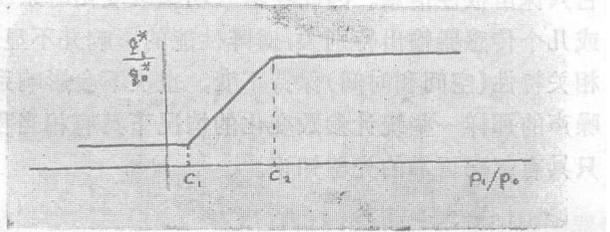


图12

验。当  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ,  $c_1 \rightarrow 0$ ,  $c_2 \rightarrow \infty$ ，以致宽容性检验蜕变为标称检验。图 12 的物理意义很清楚，即此宽容性检验中基本起作用的是标称似然比。然而，如果在任一数据样本下  $p_1/p_0$  值十分大或十分小，那么由于这种极端的个别事件可能是由未预料到的统计特性产生的，此宽容性检验就不计这种情况。在取许多样本(小信噪比)时，这种限幅保护措施更显得特别重要，因为在观察期间内，这些有不正常的大  $p_1/p_0$  或小  $p_1/p_0$  之个别事件极有可能在某一时刻出现。如失去这种保护，那么即使在对标称分布偏离显然不大的情况下，也很可能作出错误判决<sup>[16]</sup>。另一方面，保护限幅器实现起来很简单，在  $\varepsilon_i$  很小(充分的先验知识)时，其代价相对系统性能来讲也是小的，即使  $q_i$  等于  $p_i$ 。因此，只要具备充足的(虽然不完全的)统计知识，我们就有一个简单有效的方法来防止潜在的灾难。

(宋健宁译 孙允恭校)

### 参 考 文 献

- [1] Anderson, V. C. "Digital array phasing," JASA 32, 867, 1960.
- [2] Bryn, F. "Optimal signal processing of three-dimensional arrays operating on gaussian signals and noise," JASA 34, 289, 1962.
- [3] Vanderkulk, W. "Optimum processing for acoustic arrays." J. Brit. IRE Vol.26,

1963.

- [ 4 ] Anderson, V. C. "DICANNE, a realizable adaptive process." JASA 45, 398, 1969.
- [ 5 ] Anderson, V. C. and Rudnick, P. "Rejection of coherent arrival at an array," JASA 45, 406, 1969.
- [ 6 ] Papoulis, A. Probability, random variabes and stochastic processes, section 13. 1 McGraw-Hill 1965.
- [ 7 ] Edelblute, D. J. et al, "Criteria for optimum signal detection theory for arrays," JASA 41, 199, 1967.
- [ 8 ] Bangs, W. J. "Array processing with generalized beamformers," Ph. D. Dissertation, Yale University, 1971 (also available as a technical report Naval Underwater Systems Center, 1971).
- [ 9 ] Cox, H. "Array processing against interference." Symposium on information processing, Purdue University, 1969. p.453.
- [10] Wiener, N. Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series, Wiley, 1949.
- [11] Kanefsky, M. "Detection of weak signals with polarity coincidence arrays." IEEE IT-12, 260; 1966.
- [12] Kanefsky, M. Progress reports No. 26, "Suboptimal techniques employing hard limiting for detecting passive sonar targets in the presence of interference," and No.28, "Optimal techniques employing quantized inputs for detecting passive sonar targets in the presence of interference", Yale University, Department of Engineering and Applied Science, 1966 (SUBIC program).
- [13] Schultheiss, P. M. "Likelihood ratio detection of gaussian signals with noise varying from element to element of the receiving array." progresss report No. 11, Yale Univ, department of engineering and applied science, 1964 (SUBIC program).
- [14] Cox, H. "Sensitivity considerations in adaptive beamforming." NATO advanced study institute on signal processing. 1972, p.619.
- [15] Huber, P. J. "A robust version of the probability ratio test," Ann. Math. Stat. 36, 1753, 1965.
- [16] Schultheiss, P. M. and Woloin, J. J. "Robust sequential probability ratio detectors." EASCON 1975 Convention record, p.36.