# 声 参 量 阵

L.Bjφrnφ

（丹麦技术大学流体力学系）

## 引 言

两列有限振幅声波相互作用所产生的和、差频是二百余年来所讨论的命题。Helmholtz[1]和 Lamb[2]认为，最早做差频声实验的是 Sorge(1745)和 Tartini(1754)。自此以后，产生差频波的问题受到一些作者们的注意，但只是在近十五年来，在有限振幅波相互作用产物（特别是和、差频波）的实用方面才取得了巨大进展，而早期的工作似乎是将这些波视为偶而出现的、不需要的干扰，或者视为纯学术讨论的课题。特别是水声中非线性和、差频波的利用，在最近 5—10 年取得了格外快速的发展。水下应用范围目前包括回声测距、海底和海底剖面图的绘制、水下埋藏物的考古检测、浅海声传播特定模式的激励和医学诊断的超声成像等方面使用的参量发射阵和参量接收阵。根据声参量阵领域迄今取得的进展来看，总的说来，在寻求和开拓它的新的应用前景、改善它的性能使之更适合于实用以及改进其已应用场合的信号处理等方面的探索工作，希望今后还要加强研究。

## 一、历史背景和基本理论

参量阵问题的公式来源于 Lighthill 的工作[3,4]，他将流体力学基本方程组变换成特别适合于研究气动发声的形式。Lighthill 关于任意流体运动的严格方程可以写为：

$$\partial\rho^2/\partial t^2 - c_0^2\nabla^2\rho = -c_0^2\Box^2\rho = \partial^2 T_{ij}/(\partial x_i \partial x_j) \qquad (1)$$

式中，$T_{ij}=\rho u_i u_j + p_{ij} - c_0^2\rho\delta_{ij} + D_{ij}$，$D_{ij}$ 是粘滞应力。方程(1)是“声散射声”理论中的 Westervelt 公式的出发点[5,6]，它是Lighthill普遍理论的一个方面。Lighthill 曾提议，声散射声的方法可以用之于有限束，因而导致 Westervelt 推出了目前的声参量阵经典理论[7]。下述简化假定和近似是 Westervelt 理论的依据：

(a) 采用了理想流体的运动方程，而衰减影响是以特定方式引入的。

(b) 假定叠加的两高频平面原波的波束充分狭窄，准直性充分理想，足以使得将波源的体积分布看成是沿原波轴分布的，而原波相互作用区横截面尺寸，假定比差频波长小很多。

*原文题目：“Parametric Acoustic Arrays.”

(c) 假定差频波没有衰减。

(d) 两原波的振幅衰减系数相等，并假定它比差频波数小一到几个量级。

(e) 忽略非线性衰减。

根据假定(a)－(e)，改写方程(5)，并应用微扰方法，只保留到场变量的二阶项，Westervelt 的准线性近似导出了下述差频波压力振幅 $p_s$ 的非齐次波动方程：

$$\nabla^2 p_s - c_0^{-2}\partial^2 p_s/\partial t^2 = -\rho_0(\partial q/\partial t) \tag{2}$$

式中

$$q = \beta(\rho_0^2 c_0^4)^{-1}\partial p_i^2/\partial t^2 \tag{3}$$

q 是两原波(其在原点的瞬时压力为 $p_i$)非线性相互作用所产生的声能所相应的源强密度，$\beta$ 与流体的二阶非线性比值 B/A[8]的关系是 $\beta = 1 + B/2A$，

式中

$$A = \rho_0[(\partial p/\partial \rho)_s]_{\rho=\rho_0} = \rho_0 c_0^2 \tag{4}$$

$$B = \rho_0^2[(\partial^2 p/\partial \rho^2)_s]_{\rho=\rho_0} \tag{5}$$

(3)式只在两平面波沿相同方向传播时有效，而对任意方向传播的两原波场，其源强密度的一般表示式可查阅文献〔9〕。(2)式的通解可写成体积积分

$$p_s(\mathbf{R}, t) = -\frac{\rho_0}{4\pi}\int_V \left[\frac{\partial q}{\partial t}\exp(ik_s|\mathbf{R}-\mathbf{r}|)/|\mathbf{R}-\mathbf{r}|\right]dV \tag{6}$$

**R** 和 **r** 分别为从原点到观测点(即场点)和到体积积分区域中的圆体积 dV 的位置向量。体积积分(6)被 Westervelt 用来导出二平面单频理想准直原波束相互作用产生的差频声场，二原波振幅皆为 $p_0$。在其压力振幅 $p_s$ 的表示式中，$p_s$ 是发射二原波的发射器到观测点距离 R 的函数，也是观测点向量与发射器轴之间夹角 $\theta$ 的函数。这个式子可写为

$$p_s(R,\theta) = \omega_s^2 p_0^2\, S\beta(8\pi\rho_0 C_0^4 R\alpha_0)^{-1}\left[1 + \frac{k_s^2}{\alpha_0^2}\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{7}$$

这里省去了时间、相位关系。$\omega_s$ 是差频波的角频率，S 是准直波区域的截面积，$k_s$ 是差频波波数，$\alpha_0$ 是两个原波的小振幅平均吸收系数。Westervelt 的解(7)式限于散射波的远场，其条件为：$k_s R > (k_s/\alpha_0)^2$。从(7)式方括号中得到，差频波的半功率束宽 $\theta_h$ 为

$$\theta_h \approx 2(\alpha_0/k_s)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

结果表明，降低原波频率，波束变窄，这一点与通常线性发射器的情况相反。此外，差频增高，波束也变窄。应当注意，原波频率对(7)和(8)式的影响仅通过吸收系数 $\alpha_0$ 表现出来。

差频信号的振幅 $p_s$ 可以看成是沿整个相互作用区连续分布阵源所产生的辐射，这个作用区以准直波束为边界，它在声轴方向所延伸的距离取决于原波的小振幅吸收系数。Westervelt 将这种虚源阵比喻为端射参量阵[7]。随着离信号源距离的增大，原波向差频波的转换自然地平滑衰减，故参量阵是束控的。原波吸收和相互作用区内的绕射使阵受到束控，在 $\theta$ 增大时，差频波角度响应单调减小，因而避免了通用活塞型换能器所共有的不需要的旁瓣。由于相互作用区的宽度很小(与参量阵长比较)，所以产生的辐射场比起以线性方式工作在差频的通常水下声源所产生的场要窄得多。此外，由于参量转换过程的宽带特性，如果采用宽带信号处理技术，我们就能够补偿非线性转换过程效率太低的缺点。尽管源级效率低(为 10%到 $10^{-5}$%)，如果着眼点是减小束宽、换能器的尺寸或是吸收损失(因为差频频率很低)，则采用参量阵系统要比通常的线性系统优越。

自 Westervelt发表其取得渐近解的准线性近似方法(在远离相互作用区的距离上有效)之后，为了深入了解声参量阵的特性，不少人做了大量的理论和实验工作。Bellin 和 Beyer[10]对(7)式进行了实验证实。他们应用一个直径一吋的石英发射器，发射了 13 和 14 兆赫的原波。两个这样高频率的原波，其相互作用区实际上限于发射器的近场。

当由于原波的吸收使它们的相互作用区基本上限制于发射区的近场区时，应该考虑发射器的有限尺寸所引起的孔径效应。这一点 Naze 和 Tjφtta[11] 以及 Berktay[12] 都曾讨论过。Berktay 假定边长为 $2b\times 2d$ 的矩形发射器，位于 y—z 平面上，求得了初始压力振幅为 $p_1$ 和 $p_2$ 的二准直平面波通过非线性相互作用产生差频压力的振幅的下述表示式：

$$p_s=p_1p_2S\omega_s^2\beta\{\exp(-\alpha_sR)\psi(b,d,k_s,\gamma,\theta)/4\pi\rho_0c_0^4R)\}\cdot$$
$$\cdot[\alpha_T^2+4k_s^2\sin^4(\theta/2)]^{-\frac{1}{2}} \tag{9}$$

式中，孔径效应是通过表示式：

$$\psi(b,d,k_s,\gamma,\theta)=\{\sin(dk_s\cos\gamma)/(dk_s\cos\gamma)\}[\sin(bk_s\sin\gamma\sin\theta)/$$
$$(bk_s\sin\gamma\sin\theta)] \tag{10}$$

来表达的，而 $S=2b\times 2d$。$\alpha_T$ 是吸收系数，它取决于 $\alpha_T=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_s\cos\theta\simeq\alpha_1+\alpha_2-\alpha_s$（当 $\theta\ll 1$ 时）。$\alpha_1$，$\alpha_2$ 和 $\alpha_s$ 分别为两个原波和差频波的吸收系数，$\gamma$ 是从发射器中心 (x,y, z=0,0,0)到观测点的径向距离 R 与 z 轴之间的夹角。对于圆形发射器而言，(10)式中的(sin(N)/(N))要用($2J_1(N)/(N)$)代替。

对于球面扩展的二个原波（它们限于角宽为 $2\psi_1$ 的锥体中，并假定锥截面上声强均匀分布)，Berktay 求出对称轴上的差频压力振幅为：

$$p_s(R,0)=\beta p_1p_2\omega_s^2\{\exp(-\alpha_sR)\}(2\rho_0c_0^4Rk_s)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left\{\left[\frac{1}{2}\ln(1+\psi_h^4)\right]^2+[\tan^{-1}(\psi_h^2)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

式中 $$\psi_h^4=(\psi_1/\theta_h)^4\simeq(k_s/\alpha_T)(1-\cos\psi_1)^2$$

这里的半功率束宽 $\theta_h$(对式(9)和(11)而言)是：

$$\theta_h\simeq 2(\alpha_T/2k_s)^{\frac{1}{2}}\qquad 当\ \alpha_T/k_s\ll 1 \tag{12}$$

对于球面波，$\alpha_T$ 为：

$$\alpha_T=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_s\cos\theta\cos\psi\simeq\alpha_1+\alpha_2-\alpha_s$$

Berktay 的近似解(9)和(11)在远离相互作用区的场点是正确的。

Hobæk[13]对平面波的孔径影响作了实验证实，而后来 Muir 和 Blue[14]发表了包括球面波(两原波在 Fraunhofer 区的相互作用)的实验结果。关于六十年代理论与实验结果的更详细的说明可参考文献〔9〕。

上述各项工作仅讨论了有限振幅原波的相互作用，但没有讨论大振幅吸收。某些定义对了解与大振幅吸收有关的问题是很重要的，例如声饱和的概念。这里，我们将通过角频率为 $\omega(=c_0k)$ 的单频平面或球面波在不同距离（距离源）的有限振幅畸变过程来扼要地阐述这些定义。

有限振幅波在传播过程中的积累畸变有两个非线性来源，一个叫运动学来源(对流)；另一个叫热力学来源(由于流体物态方程的非线性[8])。这些非线性因素所产生的有限振幅波的相速是：

$$\frac{dx}{dt}=c_0+\beta u \tag{13}$$

式中，u 和 x 分别为局部质点速度和相对于信号源的轴向座标。(13)式表明，凝缩相比稀疏相走得快，致使波形愈益陡峭从而形成冲击波。对于在无损耗流体中传播的有限振幅波而言，冲击波的形成距离(距离声源)为

平面波 $$l=c_0^2/(\beta\omega u_0)=(\beta k\varepsilon)^{-1} \tag{14}$$

球面波 $$r'=r_0\exp(\beta k\varepsilon r_0)^{-1} \tag{15}$$

式中，$\varepsilon=u_0/c_0$ 是声马赫数，$u_0$ 是声源所在处之质点的峰值速度，$r_0$ 是球面波源的半径（或者是开始作球面发散的距离）。通常用一个无量纲参数 $\sigma$ 来描述冲击波的形成过程。对于平面波，

$$\sigma=x/l=\beta k\varepsilon x \tag{16}$$

对于球面波，

$$\sigma=\beta k\varepsilon r_0\ln(r/r_0) \tag{17}$$

非线性声学中的一个重要参数是 Gol'dberg 数 $\Gamma$，它描写了非线性效应与耗散效应之间的关系，而被喻为声雷诺数：

$$\Gamma=\beta p_0/(b\omega) \tag{18}$$

式中 $$b=\frac{4}{3}\eta+\zeta+\kappa[1/(c_v)-1/(c_p)] \tag{19}$$

$p_0$ 是声源所在处之声压振幅。$\Gamma>1$，冲击波可形成[15]，它在 $\sigma=1$ 时出现[8]。如果 $\Gamma$ 足够大，由于有限振幅波进一步畸变，便得到锯齿波形。在 $\sigma\sim3$ 时，锯齿波生成。对于平面波和球面波它可分别表示为：

$$x_{齿}=3l=3(\beta k\varepsilon)^{-1} \tag{20}$$

和 $$r_{齿}=r_0\exp[3(\beta k\varepsilon r_0)^{-1}] \tag{21}$$

在 $\sigma=3$ 的地方，由于吸收，基波振幅将减少几个分贝。在锯齿波区，由于非线性畸变与耗散效应相抵消，故稳定波形(指锯齿波形——译注)将维持一段传播距离。在这个区域，基波振幅 $p_1$ 将按下述关系减小，即

$$p_1=2\alpha\rho_0c_0^2/[\beta k\sinh(\pi\Delta/2)] \tag{22}$$

对于平面波，$\pi\Delta/2=\alpha/(\beta k\varepsilon)+\alpha x$；对于球面波，在 $kr_0\gg1$ 时，$\pi\Delta/2=\alpha r/(\beta k\varepsilon r_0)+\alpha r\ln(r/r_0)$。$\Delta$ 是量度冲击波厚度的量，它决定于

$$\Delta=2(\pi\Gamma)^{-1}(1+\sigma)(r/r_0)^n \tag{23}$$

当 $n=0$ 时，是平面波的情况；而对于球面波，则 $n=1$[8]。

由于初始振幅增大，(23)和(22)式愈益与 $p_0$ 无关，因而发生了声饱和现象。由于耗散影响相对增大，冲击厚度随之变厚，在离开源点的某个距离，开始了从锯齿区向“老年区”过渡。对于平面波而言，这个距离近似表示为

$$x_{max}=1/\alpha \tag{24}$$

对于球面波而言，可表示为[16]

$$r_{max}=\beta k\varepsilon r_0[\alpha(1+\beta k\varepsilon r_0\ln\{r_{max}/r_0\})]^{-1} \tag{25}$$

(24)式对应于 $\pi\Delta/2=1$(对于大的 $\Gamma$ 值)。从(24)和(22)式可以得到在 $x_{max}$ 处的基波振幅 $p_1=1.7\alpha\rho_0c_0^2/\beta k$，这个结果可以用来计算 $x=x_{max}$ 处之等效源级。如果声源振幅无限增大，可以看出，基波振幅将趋近于某个有限的极限值。对于球面波来说，它可表为 r 的函数[17]：

$$p_{饱}=2\rho_0c_0^3\{\exp[-\alpha(r-R_{max})]\}[\beta krln(R_{max}/r_0)]^{-1} \tag{26}$$

式中 $R_{max}=r_{max}|_{p_0\to\infty}=[\alpha ln(R_{max}/r_0)]^{-1}$，$r_{max}$ 由(25)给定。注意，(26)式与声源的初始振幅 $p_0$ 无关。

到此为止，我们讨论的平面波和球面波是由镶在无限大的硬障板上活塞型声源所产生的一类声场。由于在大多数情况中都是采用活塞型声源作为声参量阵的原波发射器，我们将声源的几个特征距离扼要地定义如下。对于一个安装在无限大的硬障板上面积为 S 的活塞声源，当它同时在角频率 $\omega_1$ 和 $\omega_2$(波数为 $k_1$ 和 $k_2$)下工作时，在某个距离以内，波场可以当作准直平面波，这个距离称为瑞利距离，或者称为形成原波声源近场的准直距离，它可表示为：

$$R_r=k_0S/2\pi=S/\lambda_0 \tag{27}$$

式中，$k_0=(k_1+k_2)/2$。当距离超过 $R_r$，原波波场可以看成是球面扩展波。Fresnel 距离类似地可表为：

$$R_f=S/4\lambda_0 \tag{28}$$

根据经验得出，取 $R_0=S/2\lambda_0$ 为源半径，得到与实验符合得比较好的结果，这就形成了球面波源的一个有效半径。采用下移比(down-shift-ratio) $H_s=k_0/k_s=\omega_0/\omega_s$，可用

$$R_s=R_r/H_s \tag{29}$$

来定义差频波的准直距离。在某些情况(下面将讨论)下，在离开声源的某个距离：

$$R_\theta=R_rH_s \tag{30}$$

差频波的半功率束宽可以近似等于原波的半功率束宽。为了表示二原波中形成冲击波的可能性，定义一个利用(14)式来表示的无量纲饱和数 $\chi$[18]：

$$\chi=R_r/l \tag{31}$$

## 二、参量发射阵的小振幅波相互作用，受吸收和扩展损失限制的阵

本节讨论小振幅原波，即波的峰值振幅比它们各自的冲击波形成阈值低，据此，忽略非线性吸收。

第一节讨论的 Westervelt 远场近似，差频信号是由两列有限振幅不饱和的无限平面原波非线性相互作用产生的，两原波仅受到粘滞吸收。Muir[19]以及 Muir 和 Willette[20]将 Westervelt 理论近似推广到由圆活塞型发射器发射未饱和的两列单频球面波之间相互作用产生的差频信号的情况，这些都是小振幅波相互作用参量发射阵的实例。

如果近场原波吸收损失($\alpha_TR_r\gg1$ 奈培)足够大，使得两原波在 $R_r$ 以内被充分吸收，以保证距离大于 $R_r$ 时，其非线性相互作用不再进一步发生，这种参量阵命名为受吸收限制的，因而可以用 Westervelt 解式来决定差频信号。如果 $\alpha_TR_r$ 非常小，在距离大于 $R_r$ 时，非线性相互作用起主要作用，这种阵基本上是受扩展损失限制的，在计算差频信号时，要求应用球面

波解。在吸收限制阵用(12)式表示的差频信号半功率束宽来描述时，扩展损失限制阵（也包括粘滞吸收效应)的半宽角却将随着离源的距离 r 的增加而增大，因而渐近地接近于原波指向性图乘积的半功率束宽，在离开源一段距离 $R_\theta$ 处，两个半功率束宽相等。

应用 Rutherford 散射公式推导的参量阵近似解的有效性要求场点（观察点）处在离相互作用区之外很远的地方，但体积积分的解却是对于在相互作用区内的场点推出的。究竟是用连续原波还是用脉冲原波，这对参量波的产生过程将是有影响的。此外，当两个原波的频率、它们的源级以及发射器的尺寸已知时，就可以解答下述问题，即大部分差频信号是产生在原波发射器的近场呢？远场呢？还是远、近场都有？下面适当地将问题分成几个程序和结果来讨论：(a)场点在原波相互作用区之内或之外；(b)连续原波或脉冲原波；(c)起主要作用的是近场或者是远场。

**1. 场点在相互作用区之外**

a. 连续原波　受吸收限制、近场相互作用起主要作用的阵是用第一节讨论过的 Westervelt 近似[7]和 Berktay[12]近似来表示的。Mellen 和 Moffett[18,21]发表的预报参量阵性能的另一种方法，是采用 $\alpha_T R_\theta$ 作为基本参数，用它来判断参量阵是受吸收限制的，还是受扩展损失限制的，或者兼而有之。他们的模型是将简单的平面波解和球面波解组合起来，即完全准直端射阵源($r<R_\theta$)对差频波的贡献加上球面波区源($r>R_\theta$，其指向性为原波函数的乘积)的贡献。对于在相同距离绕射是重要的相互作用区内各点而言，当场点离源非常远时，已证明这一模型在计算参量效率时颇为有用。他们的参量声纳源级效率公式（即差频波源级比原波源级)可以写成

$$|R p_s/(R_r p_0)| = \frac{\chi k_s^2}{2k_0^2}\int_0^\infty\left(1+\frac{k_s^2}{k_0^2}\ \frac{r^2}{R_r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-2\alpha_s r}\left[1+\left(\frac{\chi}{2}\ \sinh^{-1}\frac{r}{R_r}\right)^2\right]^{-1}\frac{dr}{R_r} \quad (32)$$

这里假设两原波的初始振幅都是 $p_0$。忽略有限振幅吸收($\chi<1$)，在 $r<R_\theta$ 时，假定参量阵是受吸收限制的，则(32)式简化为渐近形式：

$$|R p_s/(R_r p_0)| \simeq \frac{\chi}{2}\ \frac{k_s^2}{k_0^2}\int_0^\infty e^{-2\alpha_s r}\frac{dr}{R_r} = \frac{\chi}{4\alpha_0 R_r}\ \frac{k_s^2}{k_0^2} \quad (33)$$

应用(27)式，代入 $\chi=\beta p_0 k_0 R_r(\rho_0 c_0^2)^{-1}$，很易证明上式即为 Westervelt 公式。由 (33) 式可见，在准直区发生相互作用时，$p_s$ 与下移比（应是下移比的倒数——译注）以及原波振幅 $p_0$ 皆是平方关系($p_s\sim\omega_s^2$)。

许多作者向我们提供了关于受扩展损失限制阵($\alpha_T R_r\ll 1$ 奈培)（这里远场相互作用占优势)的学问，其中有两种方法处理参量阵几何结构是成功的。第一种方法是将相互作用信号近似地当作一维行波[22,23,24]，第二种方法是用三维积分来进行计算[19,20]。

Berktay 和 Leahy[24]讨论了相互作用发生在活塞发射器远场的情况，他们将发射器表面与 y—z 平面重合，其几何结构如图 1 所示。角频为 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 的两原波，其远场波束图形表为

$$p_{1,2}=\frac{\bar{p}_{1,2}}{r}D_{1,2}(\gamma,\phi)\exp[-(\alpha_{1,2}+ik_{1,2})r] \quad (34)$$

式中，$D_{1,2}(\gamma,\phi)$是两原波的归一化指向性函数，$p_{1,2}$表示它们的振幅。在图1中场点$(R,\theta,\eta)$的差频声压可以写成

$$p_s(R,\theta,\eta)\simeq\omega_s^2\,\bar{p}_1\bar{p}_2\,\beta(4\pi\rho_0c_0^4R)^{-1}\exp\{-(\alpha_s+ik_s)R\}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int D_1(\gamma,\phi)D_2(\gamma,\phi)[\alpha_T+ik_s(1-\nu)]^{-1}\cos\gamma\,d\gamma d\phi \quad (35)$$

式中 $\nu\simeq1-\frac{1}{2}(\gamma-\theta)^2-\frac{1}{2}(\phi-\eta)^2$。(35)式中的二重积分是原波指向性函数与指向性函数

$$D(\theta,\eta)=[1+i\frac{k_s}{\alpha_T}(1-\cos\theta\cos\eta)]^{-1}$$

以$\cos\gamma$加权时的卷积，$D(\theta,\eta)$是将Westervelt指向性函数(7)式作了图1中所示的座标系变换。如两原波波束很窄，并且$D_1(\ )=D_2(\ )$，则(35)退化为Westervelt结果。当(12)式中的$\theta_h$比乘积束宽$D_1(\ )D_2(\ )$小非常多时，差频的指向性图成为两个原波指向性函数的乘积。对于镶在无限大刚性障板上的矩形和圆形发射器的数值计算可参阅文献〔24〕。就矩形活塞发射器而言，其无量纲边长为L和M（以$\lambda_0$归一化），它们分别平行于y轴和z轴，(35)式可写成

$$p_s(R,\theta,\eta)\simeq P_w(R,0)V(\psi_y,\psi_z,\theta',\eta') \quad (36)$$

式中

$$P_w(R,0)=-\omega_s^2(W_1W_2)^{\frac{1}{2}}\beta(2\pi c_0^3R\alpha_T)^{-1}\exp[-(\alpha_s+ik_s)R]$$

$W_1$和$W_2$是原频发射声功率，而

$$V(\ )\simeq LM\theta_h^2\int_{-\pi/2\theta_h}^{\pi/2\theta_h}\int\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\gamma'}{\psi_y}\right)}{(\sqrt{2}\gamma'/\psi_y)^2}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{2}\phi'}{\psi_z}\right)}{(\sqrt{2}\phi'/\psi_z)^2}\cdot$$

$$\cdot\{1+i[(\theta'-\gamma')^2+(\eta'-\phi')^2]\}^{-1}d\gamma'd\phi' \quad (37)$$

全部角度是用$\theta_h$归一化的，因而在两个对称平面内，原波束的半功率束宽$2r_1$和$2\phi_1$有下述关系：$\pi L\gamma_1=\pi M\phi_1\approx\sqrt{2}$，$\gamma'=\gamma/\theta_h$，$\phi'=\phi/\theta_h$，$\psi_y=\gamma_1/\theta_h$，以及$\psi_z=\phi_1/\theta_h$。在声轴上$(\theta'=\eta'=0)$，对(37)式作了数值计算[24]，并表示于图2，取$\frac{B}{A}=5$(对于水)。根据(36)式，可以用下式

$$SL_-\simeq137+20\log f_s-40\log\theta_h^0+10\log W_1+10\log W_2+20\log|V|$$

分贝(以1微泊为参考值) (38)

来计算差频均方根源级。(38)式可以计算出参量发射器的远场响应。式中，$f_s$是差频频率，表以千赫；$\theta_h$以度表示；$W_1$和$W_2$的单位是瓦；$20\log|V|$取自图2；对于半径为a的圆形发射器，$\psi_d=92.5/(k_0a\theta_h^0)$；而边长为l和m的矩形活塞，$\psi_y=163/(k_0l\theta_h^0)$以及$\psi_z=163/(k_0m\theta_h^0)$。对于圆形发射器和矩形发射器，分别采用下述参数计算差频远场振幅$\alpha_TR_\theta=0.650/\psi_d$和$\alpha_TR_\theta=0.635/(\psi_y\psi_z)$。将(32)式算得结果与(37)式结果进行了比较。

对于 $\chi<1$ 和 $2\alpha_0 R_r<1/H_s$，也就是说，阵受扩展损失限制，绝大部分差频产生在原波远场区，于是表示式(32)简化为

$$|R\Gamma_s/(R_r p_0)| \simeq \frac{\chi k_s}{2k_0} E(2\alpha_0 R_\theta) \tag{39}$$

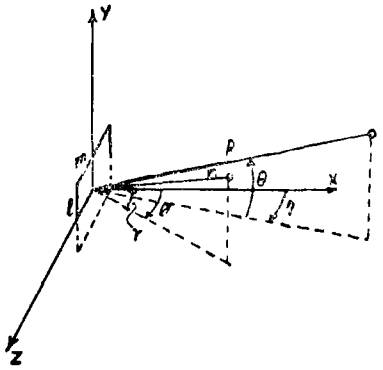


图 1 文献[24]的图示

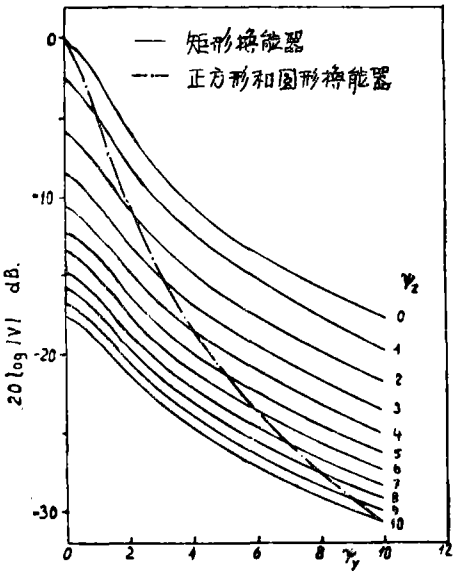


图 2 矩形、正方形和圆形换能器在 $\theta'=\eta'=0$ 时的压力缩减因子

其中 E( )是众所周知的积分指数函数。可以看出，对于远场相互作用区，(39)式线性依赖于下移比(应是下移比的倒数——译注)，即 $p_s \sim \omega_s$。但在通常情况下，远场和近场相互作用区对 $p_s$ 都有贡献时，下移比（倒数——译注）指数是在 1 和 2 之间，这一点也已为实验所证实[14,25]。如果使 $\chi$ 等于 1 ($l=R_r$)，原波出现大振幅（但对继续忽略有限振幅畸变和大振幅吸收来说，振幅又不算太大)。取 $B/A=5$，$\rho_0=10^3$ 千克/米$^3$，$c_0=1500$ 米/秒，于是可得到的最大差频源级为

$$SL_{-m} \simeq 20\log f_s - 40\log f_0 + 20\log[|V|/\alpha_T R_\theta] + 274 \tag{40}$$

分贝(参考 1 微泊)

b. 脉冲原波　上面讨论的参量阵仅是由二列连续(单频)原波的非线性相互作用形成的，但脉冲原波也曾用到过。Berktay[12]讨论的原波，在声源所在处其形式为

$$p_1(t) = p_0 F(t)\cos(\omega t) \tag{41}$$

式中F(t)是包迹函数，假定它与 $\cos\omega t$ 项比较是缓变的，因而覆盖相当窄的频带(即超过$\omega/3$时没有谱分量)，藉以避免散射波谱与原波谱的重叠。对于平面波，沿着阵轴，散射波的时域解可表为

$$p_s(R,t) \simeq p_0^2 \beta S(16\pi\rho_0 c_0^4 R\alpha)^{-1} \frac{\partial^2 F^2(t')}{\partial t^2} \tag{42}$$

这里引入了原波的粘滞吸收；$t'=t-R/c_0$ 是推迟时间。实验证明，采用脉冲原波所产生的

散射分量要比采用双频的参量阵约高 2 分贝[25-27]。关于瞬态(脉冲)原波的详细讨论可参考文献[19]。采用脉冲原波时要求发射器频带比散射波宽得多，以免脉冲之间的畸变。(42)式着重表明，参量阵有宽带特性(在散射波频率附近)。

**2. 场点在相互作用区内**

以上参量阵渐近理论的全部结果还不能用于场点处在相互作用区以内的情况，但后者是实验室水槽实验中的普遍情况。为了计算这种情况下的差频信号源级，使用了两种不同的理论近似。第一种近似是将体积积分进行数值计算[19,20]，而第二种近似是在渐近理论的基础上引入校正因子[28]。

Muir 和 Willette[20]研究了淡水中两高频原波(418 千赫和 482 千赫)和差频信号的产生，高频信号是用 3 吋圆形活塞发射器发射的。在他们的理论近似中，仅考虑了远场相互作用的贡献。他们导出了下述和、差频压力振幅的体积积分表示式，它在 R≫r时成立，但在场点在相互作用区内时近似成立：

$$p_s(R,\theta)=2p_1p_2\omega_s^2\beta R_r^2(\pi\rho_0c_0^4k_1k_2a^2)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\int_{R_r'}^{R}\int_0^{\phi_e+\theta}\int_0^{\pi}J_1(k_1a\sin\sigma)J_1(k_2a\sin\sigma)\cdot$$

$$\frac{\exp\{-[(\alpha_1+\alpha_2)-ik_s]r-[ik_s-\alpha_s]r'\}}{\sin^2\sigma\cdot r'}\sin\phi d\psi d\phi dr \quad (43)$$

式中，$\sin\sigma=\{\sin(\theta-\phi)+\sin\phi\cos\theta(1-\cos\psi)+\sin^2\phi\sin^2\psi\}^{1/2}$，$r'=(R^2+r^2-2rR\cos\phi)^{1/2}$，$\phi$ 是有效阵角，$R_r'=3a^2/4\lambda_0$，a 是发射器半径。图 3 画出了(43)式的几何结构，将(43)的数值解与实验结果比较表明，即使场点在相互作用区内，二者也符合得很好。Bjφrnφ 及其同事[25]曾用形如(43)的表示式计算相互作用区内的 $p_s$，图 4 中给出其理论和实验结果[25]。可以看出，用体积积分方法计算相互作用区内的 $p_s$ 是行得通的。

图 5 表示了和、差频波的半功率束宽与距离(从发射器算起)的关系[20]，结果表明，参量阵是以指数方式显出它的窄波束特性的，并且在相互作用过程中出现得很早，甚至在其近场区也很好地适合这种关系。

近年来，用参量阵进行海上实际试验的次数大大增加。第一个海上实验是 Walsh 报导的[28]，他用的是平均原波频率 200 千赫，差频 3.5 到 12 千赫、带宽 2 千赫、脉宽 65 毫秒的调频脉冲，两原波的源级是 225

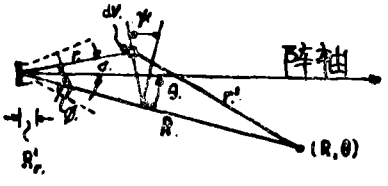


图 3　文献[20]中的几何图形

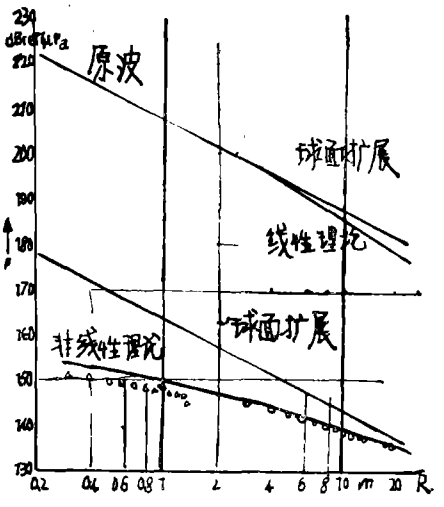


图 4　△，●和○代表实验结果

(曲线上方所标的"非线性理论"是根据 (43) 修改式作的数值积分计算[25])

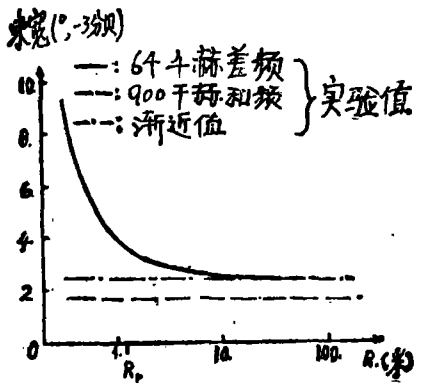

图 5　束宽与距离的关系[20]

分贝（参考1微泊），产生的波束为3°，差频源级是188分贝(参考1微泊)。

最近 Konrad[30] 描绘了一个当代最大的参量系统，即所谓 TOPS (TOwed Parametric Sonar）拖曳式参量声纳，其发射器尺寸为 $0.5\times2$ 米，$f_0$ 为24千赫，原波源级为259分贝(1微泊)，其半功率束宽为 $2\times8°$。所论差频变化范围是从5千赫下降到250赫，其源级 $SL_-$ 从230分贝(1微泊)(在5千赫)到186分贝(1微泊)(250赫)。

## 三、大振幅波相互作用参量发射阵：饱和效应

对于参量阵中的有限振幅效应(即波的畸变和有限振幅吸收)方面的工作进行过讨论的人有 Muir[19]、Mellen 和 Moffett[18,21]、Merklinger[31]、Bartram[34]以及 Fenlon[32,33]。就总的情况说来，都采用了准一维模型，特别是由于迄今对参量阵有限振幅效应的处理，一般是以一维模型以及原有的单频波源理论为基础的。参量阵中有限振幅畸变和吸收的总效应是使阵长缩短，导致差频波束展宽并且降低差频源级(相对于从第二节的公式算出的源级值)。

如果参量源受到饱和限制时，饱和效应几乎一定是出现在原波的近场，而不是远场。在(32)式中使 $\chi>1$，参量阵将在近场饱和，因而(32)式简化为

$$|Rp_s/(R_rp_0)| \simeq \frac{\chi}{2}\left(\frac{k_s}{k_0}\right)^2\int_0^\infty\left(1+\frac{k_s^2r^2}{k_0^2R_r^2}\right)^{-1}\frac{dr}{R_r}=\frac{\pi}{2}\frac{k_s^2}{k_0^2} \tag{44}$$

上式表明，在相互作用区之外的观察点，$p_s$ 和 $p_0$ 是线性关系。

Mellen 和 Moffett 计算参量源级效率(32)式的原始方程包括有限振幅效应渐变(taper)函数

$$T_f=[1+(\sigma/2)^2]^{-1/2}$$

这里 $\sigma=\chi\sinh^{-1}(r/R_r)$，它与小振幅渐变函数 $T_s=e^{-\alpha_s r}$ 一起，对于特定的下移比值 $k_0/k_s$ 和特定的 $\alpha_0R_r$ 值，能以数值积分算出。图6给出差频源级效率对于设计比例的平均源级 $SL_0{}^*$ 的函数关系曲线，图中下移比 $k_0/k_s=10$，以 $\alpha_0R_r$ 为参数。原波源级 $SL_0$ 定义为两个分量的平均源级，即 $SL_0=\frac{1}{2}(SL_1+SL_2)$。通过下式得到1千赫的比例源级：

$$SL_0{}^*=SL_0+20\log f_0 \qquad \text{分贝(参考1微泊)} \tag{45}$$

式中 $f_0=1/2(f_1+f_2)$ 千赫。取适当的 $\alpha_0R_r$ 值(取 $k_0/k_s=10$)，利用从(45)式算出的 $SL_0{}^*$，在图6中可得到参量源级效率(转换效率)，将它与 $SL_0$ 相加，便得到差频源级 $SL_-$ 为：

$$SL_{-}=SL_0+20\log|Rp_s/(R_rp_0)|$$

分贝（1 微泊）　　(46)

文献〔18〕中作出了类似于图 6 的一些曲线，其中下移比为 5、20 和 50，因而便于计算象(32) 式所表示的很大一类参量阵源级的效率。图 6 中曲线的形状反映了渐近式(39)和(44)的结果，吸收的影响使差频波振幅停止增长，当输入级低于某个确定的值时，(39)式中的 $p_s$ 与 $p_0$ 成平方关系。

在推导(32)式时，未考虑高阶谐波的相互作用，但在文献〔33〕中导出表示式（对于原波源级很高的情况）时已讨论过。高阶谐波的相互作用通常是增大了有限振幅效应，因而使得参量转换效率更快地减小，这可以从图 6 的虚线看出。

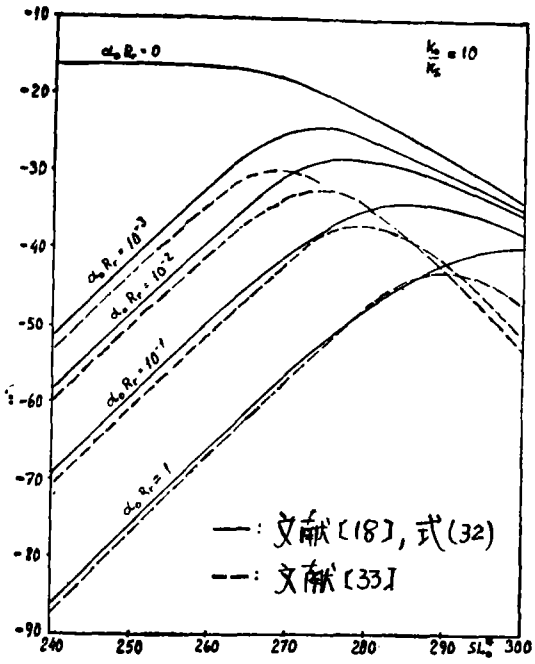


图 6　横座标：设计比例平均原波声源级$SL_0^*$（分贝/1微泊/千赫，均方根值）
纵座标：参量转换效率 $20\log|Rp_s/(R_rp_0)|$（分贝）

关于参量阵有限振幅效应的渐变函数，许多作者曾做过工作[18, 21, 31, 33, 35]。Lockwood[35] 根据文献〔31〕关于差频波产生的时域理论，应用修改了的弱冲击理论模型，导出了强度渐变函数。然后将这种强度渐变函数代入修改了的 Muir 和 Willette 体积分表示式 (43)，进行数值积分，这就开拓了在 $\chi>1$ 和场点处在相互作用区(近场处)内确定 $p_s$ 的可能性。而这种情况应用(32)式来计算是不行的，因为(32)式的推导是假设场点处在相互作用区之外很远处。应用 Lockwood 体积积分方法[35]计算参量阵转换效率，与根据(32)式算出的效率，在它们两者都有效的公共区内，一致性很好。

由于原波高声源级的有限振幅效应，参量阵长缩短，致使阵轴附近差频波束图样变坏，旁瓣级相对于主瓣级增大了。这些现象是由于有限振幅吸收依赖于原波的振幅，而在指向声源的远场中，声轴上的原波振幅最大。

# 四、参量接收阵

研制参量接收阵的可能性首先是由 Westervelt 提出的[7]。在研制参量阵时，尽管大量的工作是研究发射阵，企图用小尺寸换能器得到高指向性低频声源，但参量接收阵近来也受到广泛的注意。在参量接收阵中，非线性相互作用过程是在一列小声强的低频平面波和一列当地发射的高频高声强泵波之间发生的，因而在泵波声轴上用一个换能器来接收和、差频信号。

关于参量接收阵的讨论可以适当地分成：(a)小振幅参量接收阵以及(b)大振幅参量接收阵，两种近似的差别在于是否包含泵波的有限振幅效应。Barnard 等[36]讨论了远场接收，他们研究的一阶声场是频率为 $f_1$ 的小振幅球面简谐泵波和频率为$f_2$的简谐平面信号波($f_1>f_2$)。

假设泵波没有近场效应，并假定只有泵波受到粘滞吸收。选用极座标$(r, \psi, \phi)$，$\phi$是极角，$\psi$是方位角，其一阶声场可写成

$$p_f = p_1(r_0/r)[2J_1(k_1 a\sin\phi)](k_1 a\sin\phi)^{-1}e^{-\alpha_1 r}\cos(\omega_1 t - k_1 r) + p_2\cos(\omega_2 t - k_2 z) \tag{47}$$

式中，$p_1$是泵波在$r_0$处的峰值声压级，$p_2$是信号波输入到参量接收阵的声压级，a是泵波活塞的半径，$k_2 z$定义为平面波在r处之相位，这里

$$z = r(\sin\nu\cos\phi - \sin\phi\cos\nu\cos\psi)$$

水平面上的角度$\nu$是阵的声轴与平面波波阵面之间所夹的锐角。将(47)式代入(6)，并以"特定"的方式引入粘滞吸收，便得到下述和、差频信号的压力振幅体积分表示式：

$$p_s(R_0, \nu) = \beta\omega_s^2 p_1 p_2 r_0 (2\pi\rho_0 C_0^4 k_1 a)^{-1} \cdot \int_0^R\int_0^{\phi_{eff}}\int_0^{\pi}\left\{J_1(k_1 a\sin\phi)\right\}\exp\left\{i[k_1 r \pm k_2 z + i\alpha_1 r]\right\} \cdot \left\{\exp[i(k_s + i\alpha_s)r']/r'\right\} r d\psi d\phi dr \tag{48}$$

式中，$\omega_s = \omega_1 \pm \omega_2$，$r' = (r^2 + R_0^2 - 2rR_0\cos\phi)^{1/2}$，而$\phi_{eff}$是声轴与泵波远场辐射图样第一零点之间的角度，$R_0$是泵换能器与接收换能器之间沿声轴方向的距离。对(48)式作了数值积分，并将结果用实验（和频情况）来检验[36]，结果表明，对于不同的信号频率，关于波束图样及距离$R_0$都符合得很好。后来的工作(按照(48)式的途径)发表于[37]，而近场接收由Roger等人[38]从理论上进行了计算。

参量接收器的半功率角完全由下式决定：

$$\theta_h = 1.9(\lambda_2/R_0)^{1/2} \tag{49}$$

在分析参量接收阵的有限振幅效应方面，仅有少量的工作。Berktay 和 Al Temimi[39] 以及 Konrad[40] 等进行了参量接收阵的饱和试验。包含平面泵波和平面信号波的理论模型是由 Bartram[41]提出的。近来，Lockwood 发表了一种理论近似，其参量阵的轴向响应是用下述两种方法计算的：(a)应用一维模型，根据对近场图象进行简单修正的弱冲击波理论来计算二阶信号级；(b)对散射积分解作数值计算，即是将用于发射阵的(43)式进行变更，使之能用于参量接收阵，其中有限振幅效应是通过从一维解导出的远场和近场渐变函数引入的。可以发现，散射积分解与文献〔40〕的实验结果符合得非常好；而采用近场渐变函数得到的结果与文献〔39〕的实验数据极端不符，所以文献〔35〕所提出的参量接收阵模型仅能应用于远场接收。

一般说来，在实现实际系统之前，需要克服某些麻烦的问题，例如泵换能器和接收换能器在接收过程中的运动，在信号频率或者和、差频频率范围内的水噪声干扰设备中的电子噪声等等，都会对实际接收带来很多麻烦问题，但迄今取得的一些有希望的成果表明，在不太远的将来，这些问题将会得到解决。

## 五、声参量阵转换效率的改善

上面说过，声参量阵的主要弱点是转换效率低，因为它的理论基础是二阶效应，故限制

了能量从原波向和、差频波的转移。Merklinger[26]曾指出，如果发射器发射必要的带宽，在发射载波脉冲时，在不同的系统约束的情况下，可以使转换效率改善2—6分贝，关于这个想法的实验证明后来见诸于文献〔25〕。文献〔25〕与〔27〕表明，在总功率相同的情况下，100%的幅度调制原波比双频成分的原波，效率可提高2.5分贝。

从参量发射阵小振幅相互作用表达式(7)、(9)、(33)和(35)所包含的参数可以得到结论，下列方法可使虚源增强因而 $p_s$ 显著增大：a) 增加原波峰值振幅；b) 增大流体的 $\beta$，减小其 $\rho_0$，特别是减小 $c_0$。关于这些参数对参量发射阵转换效率的影响，文献〔25〕在理论上和实验上进行了研究。对发射器的近场区加上静压力，可防止空化效应，并将近场的液体换成具有更相宜的 $\beta$、$\rho_0$ 和 $c_0$ 值的一些液体(例如甲基乙醇和乙基乙醇)，结果使差频声压级增大约15分贝。此外，文献〔25〕还表明，利用声透镜效应以及在近场液柱内利用慢波导天线效应可以得到一些分贝数的增益。最近 Ryder[42]等人曾用一个硅橡胶柱体与发射器粘在一起对慢波导效应进行了研究。Lockwood[43]等人试图在原波的相互作用区利用空气泡来增大 $\beta$，但没有取得明显的成功。在大振幅波相互作用时，$p_s$ 的表示式(44)中不出现 $\beta$，要想提高近场饱和限制阵转换效率，则要减小与发射器接触的液体的声速、减小原波平均频率 $\omega_0$ 或者增大发射器的尺寸(通常是要小尺寸)。应用(27)将(44)变换成下述式子即可看出这些：

$$|p_s| \approx \frac{\pi}{2}\,\frac{\omega_s^2 R_r}{\omega_0^2 R}\,p_0 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{k_0 S}{2\pi}\right)\frac{p_0}{R} = \frac{\omega_s^2\,S p_0}{4Rc_0\omega_0} \tag{50}$$

Bartram[34]在讨论重复性冲击波吸收时也得出了(50)式的最后一个式子。

声参量阵转换效率的提高属于一个探索性课题，在参量阵达到最佳利用之前，还必须对它进行更多的理论和实验工作。

## 结　　语

由于对声参量阵进行了深入细致的研究，它得到了快速发展，并已进入实际应用阶段，虽然它仅在13年前才被提出来。某些问题，如某些近场效应、饱和效应、转换效率的提高等，仍有待于寻求解决的方法，而迄今在理论上、在实验室以及现场测试所得到的成功的结果表明，当前仍要在声参量阵领域加强研究。

通用符号表

$\rho$：流体密度

$c_0$：静止流体中的声速

$t$：时间

$p$：压力

$u_i$：质点速度向量

$q$：源强密度函数

$\beta$：$1+B/2A$

$\alpha$：小振幅吸收系数

$k$：波数

$\delta_{ij}$：Kronecker $\delta$ 符号

$x$：笛卡尔座标

$\eta$：流体切变粘滞

$\zeta$：流体体积粘滞

$\kappa$：流体热传导系数

$\varepsilon$：声马赫数($u_0/c_0$)

$\chi$：声饱和数

$\Gamma$：Gol'dberg 数

**(钱祖文译　王晓震校)**

## 参 考 文 献


[1] Helmholtz, H., Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Brunswick, 1862.

[2] Lamb, H., The dynamical theory of sound. Dover New York, 1960.

[3] Lighthill, M. J., Proc. Roy. Soc. (London), 211A, 564, 1952.

[4] Lighthill, M. J., Proc. Roy. Soc. (London), 222A, 1, 1954.

[5] Westervelt, P. J., J. Acoust. Soc. Amer., 29, 199, 1957.

[6] Westervelt, P. J., J. Acoust. Soc. Amer., 29, 934, 1957.

[7] Westervelt, P. J., J. Acoust. Soc. Amer., 35, 535, 1963.

[8] Bjφrnφ, L., Nonlinear Acoustics, in Acoustics and Vibration Progress, Vol. II, (Eds.) R. W. B. Stephens & H. G. Leventhall, Chapman & Hall, London 1976.

[9] Bjφrnφ, L., Ultrasonics International 1975, Conference Proceedings, IPC Science and Technology Press Ltd., London 1975.

[10] Bellin J. L. S. and Beyer, R. T., J. Acoust. Soc. Amer., 34, 1051, 1962.

[11] Naze, J. and Tjφtta, S., J. Acoust. Soc. Amer., 37, 174, 1965.

[12] Berktay, H. O., J. Sound Vib., 2, 435, 1965.

[13] Hobæk, H., J. Sound Vib. 6, 460, 1967.

[14] Muir, T. G. and Blue, J. E., J. Acoust. Soc. Amer., 46, 227, 1969.

[15] Gol'dberg, Z. A., Soviet Phys.-Acoust., 2, 146, 1956.

[16] Blackstock, D. T., J. Acoust. Soc. Amer., 39, 1019 1966.

[17] Shooter, J. A., Muir, T. G. and Blackstock, D. T., J. Acoust. Soc. Amer., 55, 54, 1974.

[18] Mellen, R. H. and Moffett, M. B., Naval Underwater Systems Center, Technical Memo. 1971. PA4-229-71.

[19] Muir, T. G., Ph. D. thesis, University of Texas at Austin, ARL-TR-71-1.

[20] Muir, T. G. and Willette, J. G., J. Acoust. Soc. Amer., 52, 1481, 1972.

[21] Moffett, M. B., Naval Underwater Systems Center, Technical Memo. 1971. PA4-234-71.

[22] Fenlon, F. H., J. Acoust. Soc. Amer., 50, 1299, 1971.

[23] Fenlon, F. H., J. Acoust. Soc. Amer., 55, 35, 1974.

[24] Berktay, H. O and Leahy, D. J., J. Acoust. Soc. Amer., 55, 539, 1974.

[25] Bjφrnφ, L., Christoffersen, B. and Schreiber, M. P., ACUSTICA, 35, 99, 1976.

[26] Merklinger, H. M., Proceedings of Symposium on Nonlinear Acoustics, University of Birmingham, Apr. 1971.

[27] Eller, I. A., J. Acoust. Soc. Amer., 56, 1735, 1974.

[28] Lockwood, J. C. and Fransdal, L. A., AMETEK/STRAZA R&D Rept. 11-730004-00000E-11, 1973.

[29] Walsh, G., Proceedings of Symposium on Nonlinear Acoustics, University of Bir-

mingham, April 1971.

[30] Konrad, W. L., Finite-Amplitude Wave Effects in Fluids, (Ed.) L. Bjφrnφ, IPC Science and Technology Press Ltd. London 1974.

[31] Merklinger, H. M., Ph. D. thesis, University of Birmingham, 1971.

[32] Fenlon, F. H., ibid Ref. 30.

[33] Fenlon, F. H., Parametric scaling laws, Westinghouse Res. Labs. Nooo14-74-c-0214, 1974.

[34] Bartram, J. F., J. Acoust. Soc. Amer., 52, 1042, 1972.

[35] Lockwood, J. C., AMETEK/STRAZA, Tech. Rept. 11-1554E-76-6, 1976.

[36] Barnard, G. R., Willette, J. G., Truchard, J. J. and Shooter, J. A., J. Acoust. Soc. Amer., 52, 1437, 1972.

[37] Truchard, J. J., ibid Ref. 30.

[38] Rogers, P. H., Van Buren, A. L., Williams Jr., A. O. and Barber, J. M., ibid Ref. 30.

[39] Berktay, H. O. and Al Temini, C. A., J. Sound Vib. 9, 295, 1969.

[40] Konrad, W. L., Mellen, R. H. and Moffett, M. B., Naval Underwater System Center, Technical Memo., PA4-304-71, 1971.

[41] Bartram, J. F., J. Acoust. Soc. Amer., 53, 383, 1973.

[42] Ryder, J. D., Rogers, P. H. and Jarzynski, J., J. Acoust. Soc. Amer., 59, 1077, 1976.

[43] Lockwood, J. C. and Smith, D. P., AMETEK/STRAZA, Tech. Rept., 11-1354E-74-1, 1974.