

自适应横向滤波器长度的选择

W. S. Hodgkiss

摘 要

就均方误差含义下的最佳角度来说,能从已知输入统计特性导得的 Wiener 滤波器是最佳线性滤波器。当这些统计特性是未知的时候,则采用最小均方误差(LMS)自适应滤波器就能使过滤问题获得极好的结果。梯度下降算法引入了一个正比于自适应滤波器长度的超量均方误差。在自适应基阵处理器中,LMS 滤波器能构成一个从指定的接收波束中部分地去掉旁瓣干扰源的噪声抵消器。本文推导自适应横向滤波器的最佳长度,从而使残余干扰信号能量加上由 LMS 算法引入的超量均方误差为最小。本文对窄带和宽带两种干扰信号均将进行探讨。

引 言

图 1 所示的自适应波束形成器的设想结构,基本上可看作一个单参考输入的噪声抵消器,它具有抽头延迟线自适应横向滤波器处理辅助波束输出。本文所讨论的系统设计问题就是研究自适应滤波器应有的权系数的数目。

Sibul^[1]的分析认为宽带干扰源的均方旁瓣抑制随着分数带宽* (即系统带宽除以二分之一自适应权的个数)减小单调地增加。事实上权矢量不可能不存在相对于其均值的随机失调^[2,3,4,5]。对一半波长间隔均匀加权的 10 元阵的 Sibul 结果概述如图 2 所示。干扰与主波束成 θ 角,有三条标有 26° , 50° 及 90° 的曲线,即相应于主波束的前三个旁瓣的峰值位置。辅助的或参考波束相对于主波束偏斜 15° 。

自适应波束形成器模型

自适应波束形成器的简化模型如图 3 所示。方向性干扰 $D(t)$ 被主波束和辅助波束所接收,主波束和辅助波束在干扰源的方向上的传输函数表作 $H_p(s)$ 和 $H_A(s)$ 。若有一个强干扰,且假设用 $Q_p(t)$ 和 $Q_A(t)$ 所表示的 A/D 转换器的量化效应是噪声背景中的主要成份。从二个通道中来的抽样波形作为自适应噪声抵消器的输入 [4]。我们希望系统均方输出 $E\{\epsilon^2\}$ 为最小。

通过 LMS 梯度下降算法 [4] 迭代更新自适应滤波器的权矢量:

$$W_{j+1} = W_j + 2\mu\epsilon_j x_j$$

* 译注: 分数带宽原文系 fractional bandwidth 文中定义为 $4f/\frac{n+1}{2}$, 此处 $(n+1)$ 为权系数的个数,但在图 2 中却定义为 $4F/F$, 这便是一般的相对带宽, 似原文用字混淆。

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j &= [W_{0j}, \dots, W_{nj}]^T \\ \mathbf{X}_j &= [x_j, \dots, x_{j-n}] \\ \varepsilon_j &= d_j - \mathbf{x}_j^T \mathbf{W}_j \end{aligned}$$

参数 μ 决定算法的收敛速率。假若 $1/\lambda_{\max} > \mu > 0$ 其中 λ_{\max} 是 $\mathbf{R} = \mathbf{E}[\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T]$ 的最大本征值, 则给定权个数 $(n+1)$ 时算法将平均地收敛至使得 $\mathbf{E}[\varepsilon^2]$ 为最小的权矢量。平均权矢量 $\bar{\mathbf{W}}$ 通常称作 Wiener 权矢量, 可表示为 $\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}$ 其中 $\mathbf{P} = \mathbf{E}[d_j \mathbf{x}_j]$ 。一般说来, 均方误差能表示成

$$\mathbf{E}[\varepsilon^2] = \mathbf{E}[d_j^2] - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W}$$

把 $\bar{\mathbf{W}}$ 代入上式便得到最小的方差

$$\mathbf{E}[\varepsilon^2]_{\min} = \mathbf{E}[d_j^2] - \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}$$

虽然 LMS 算法平均地收敛列 Wiener 权矢量, 但它的迭代特征造成 $\mathbf{E}[\varepsilon^2] > \mathbf{E}[\varepsilon^2]_{\min}$, 超量均方误差既直接正比于 μ 又直接正比于自适应滤波器中权的个数^[2,3,4,5]。

$\mathbf{E}[\varepsilon^2]_{\min}$ 的分析

Sibul 的结论[1]认为当自适应滤波器的权个数增加时(相当于减小分数带宽)自适应波束形成器的性能(在最小 $\mathbf{E}[\varepsilon^2]$ 含意下)会单调地改进。 $\mathbf{E}[\varepsilon^2]_{\min}$ 与 Wiener 滤波器阶数之间关系的分析如下所述。

当 \mathbf{R} 是一个实对称矩阵时,

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^*$$

式中 $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_0, \dots, \lambda_n]$, λ_i 是 \mathbf{R} 的本征值, 而 \mathbf{U} 是酉阵, 它的列是 \mathbf{R} 的本征矢量。

重写可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varepsilon^2]_{\min} &= \mathbf{E}[d_j^2] - \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{E}[d_j^2] - (\mathbf{P}^T \mathbf{U}) \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{U}^* \mathbf{P}) \end{aligned}$$

现在我们将在窄带干扰情况下研究 $(\mathbf{P}^T \mathbf{U}) \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{U}^* \mathbf{P})$ 的性质。

考虑到

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{D}_j + \mathbf{Q}_{\Delta j}$$

式中: \mathbf{D}_j = 具有 $C^2/2$ 功率的抽样正弦波, 其频率相当于一个长度为 $(n+1)$ 的离散富氏变换 (DFT) 的某一谱线频率。

$\mathbf{Q}_{\Delta j}$ = 噪声序列, 它的样本是与方差 σ_{Δ}^2 无关的。 \mathbf{R} 是满秩的, 而谱线的复指数项是相应的本征矢量^[6]。注意到 $(\mathbf{U}^* \mathbf{P})$ 和 $\mathbf{P}^T \mathbf{U}$ 能理解为 $(\mathbf{P}$ 的 DFT) 和 $(\mathbf{P}$ 的 DFT)*。

于是

$$\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} = (\mathbf{P} \text{ 的 DFT})^* \mathbf{A} (\mathbf{P} \text{ 的 DFT})$$

式中 $(\mathbf{P}$ 的 DFT) 是与主通道 (d_j) 和辅助通道 (\mathbf{x}_j) 间互谱有关, 而对角矩阵 \mathbf{A}^{-1} 在它的对角线上有 \mathbf{x}_j 的功率谱线值的倒数。

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{x_d} &= (\mathbf{P} \text{ 的 DFT}), \text{ 那末} \\ \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} &= \mathbf{S}_{x_d}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}_{x_d} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{S}_{x_d}(i)|^2 \end{aligned}$$

面对功率为 $C^2/2$ 的单个正弦波

$$\begin{aligned} P^T R^{-1} P &= 2 \left[\frac{C^2}{4} \right]^2 \left[\frac{1}{\frac{\sigma_A^2}{n+1} + \frac{C^2}{4}} \right] \\ &= \frac{C^2}{2} \left[\frac{\frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}}{1 + \frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}} \right] \end{aligned}$$

式中: $\text{IQR} = \frac{C^2}{2\sigma_A^2}$ (干扰——量化噪声比)

假定:

$$d_j = D_j + Q_{Pj}$$

式中 Q_{Pj} 是噪声序列, 它的样本与方差 σ_P^2 无关, 则

$$\begin{aligned} E[\varepsilon^2]_{\min} &= E[d_j^2] - P^T R^{-1} P \\ &= \sigma_P^2 + \frac{C^2}{2} \left[1 - \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}}{1 + \frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}} \right] \end{aligned}$$

显然, $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 是一个 $(n+1)$ 的单调下降函数。注意: 当 $n+1/2 \cdot \text{IQR} \ll 1$ 时 $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 随 $(n+1)$ 线性地下降, 而当 $(n+1/2) \cdot \text{IQR} \gg 1$ 时则它随 $(n+1)$ 十分缓慢地减小。在 $(n+1) \rightarrow \infty$, $E[\varepsilon^2]_{\min} \rightarrow \sigma_P^2$ (也就是完全抵消)

权矢量起伏的研究

在上述分析中, 我们知道当权矢量是 Wiener 权矢量 \bar{W} 时 $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 是权个数 $(n+1)$ 的单调下降函数。此外我们还知道作为 $(n+1)$ 的函数 $E[\varepsilon^2]$ 开始是迅速下降, 随后当 $(n+1) \rightarrow \infty$ 时, 却相当缓慢地减少。由 LMS 迭代算法而造成的超量的均方误差随 $(n+1)$ 的增加而增加。为了从自适应波来形成器中获得所要求的最小输出功率, 通过下面的分析可在超量误差和 $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 之间折衷以定出 $(n+1)$ 。

失调权矢量产生一个超量均方误差 $\mu t_r[\mathbf{R}] E[\varepsilon^2]_{\min}$ [5]。注意: 它直接和 μ 及 $(n+1)$ 有关。因此

$$\begin{aligned} E[\varepsilon^2] &= E[\varepsilon^2]_{\min} + \mu t_r[\mathbf{R}] E[\varepsilon^2]_{\min} \\ &= E[\varepsilon^2]_{\min} (1 + \mu t_r[\mathbf{R}]) \end{aligned}$$

现在我们将研究窄带干扰情况下 $E[\varepsilon^2]$ 的性能。

由于

$$\begin{aligned} \mu t_r[\mathbf{R}] &= \mu (n+1) E[x_j^2] \\ &= \mu (n+1) (\sigma_A^2 + C^2/2) \end{aligned}$$

均方误差的表达式能写成

$$E[\varepsilon^2] = \left[\sigma_p^2 + \frac{C^2}{2} \left[1 - \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}}{1 + \frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR}} \right] \right] \left\{ 1 + \mu (n+1) \left(\sigma_A^2 + \frac{C^2}{2} \right) \right\}$$

注意在下面条件下，即

$$\mu (\sigma_A^2 + C^2/2) \ll 1 \text{ 和 } \left(\frac{n+1}{2} \right) \cdot \text{IQR} \ll 1$$

$E[\varepsilon^2]$ 随 $(n+1)$ 下降而当

$$\mu (\sigma_A^2 + C^2/2) \gg 1 \text{ 和 } \left(\frac{n+1}{2} \right) \cdot \text{IQR} \gg 1$$

$E[\varepsilon^2]$ 随 $(n+1)$ 线性地增加。由此可见 $E[\varepsilon^2]$ 的相当缓坦的最小值区域位于

$$\mu (\sigma_A^2 + C^2/2) = 1 \text{ 和 } \frac{n+1}{2} \cdot \text{IQR} = 1$$

选择

$$n+1 = \frac{2}{\text{IQR}} \quad \text{且} \quad \mu \ll \frac{1}{\sigma_A^2 + C^2/2}$$

就能定出图 3 中自适应滤波器中的个数，这连同对 μ 的限制条件大体上使输出功率为最小。

结 论

在对自适应波束形成器的设想结构中参数 μ 和 $(n+1)$ 的选择时，上述分析能用来作为一般性的指导。首先我们考虑到窄带干扰的情况。

在强干扰的假设下， $2/\text{IQR} \ll 1$ 。由于抵消一个正弦波最少需用二个权[4]，因此 $(n+1) = 2$ 是恰当的。回想起在 $E[\varepsilon^2]$ 的表达式中对 $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 和超量均方误差进行折衷时， $E[\varepsilon^2]$ 既要考虑 μ 又要顾及 $(n+1)$ 的作用。因此，只要 μ 是比较小的，则若用更多的权也能得到相同的 $E[\varepsilon^2]$ 。

第二种情况，也就是宽带干扰的情况下，我们将只作简要的讨论。其分析方法类似于窄带干扰的情况。 $E[\varepsilon^2]_{\min}$ 作为 $(n+1)$ 的函数迅速下降直到抽头延迟线的长度超过 P 有一定大小的区域。回忆起由于权起伏引起的超量均方误差是直接正比于 $(n+1)$ ，因此就在这一点上得到一个缓坦的最小。

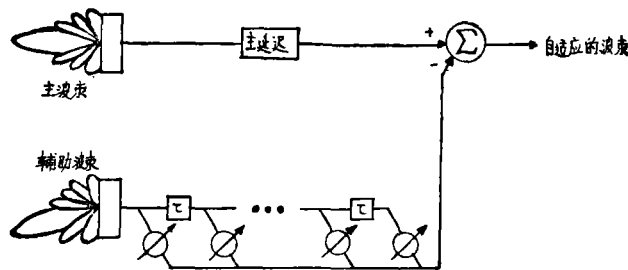


图 1 自适应波束形成器的设想结构

作为一个特例，考虑参考波来对准干扰的情况。这时 $D(t)$ 的谱在通过辅助波束形成器不产生失真(也即 $H_A(s)=1$)。主波束形成器对 $D(t)$ 能引进的最大相关长度是横跨基阵长度，且发生在端射的情况下。若 $(n+1)$ 的值超过了横跨基阵所对应的时延所要求的数目就不会使 $E[\epsilon^2]$ 有进一步的下降。

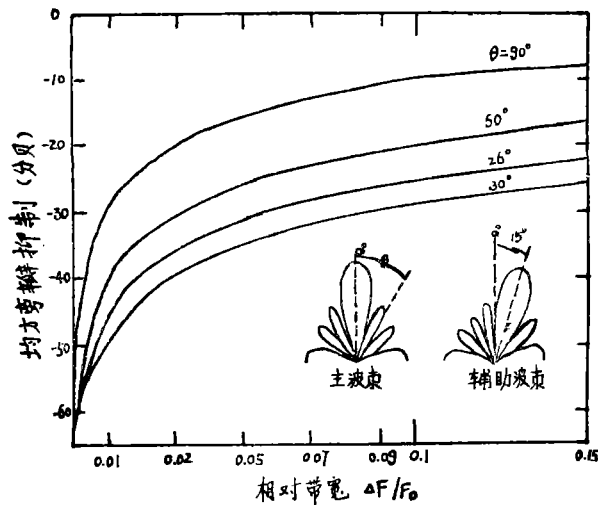
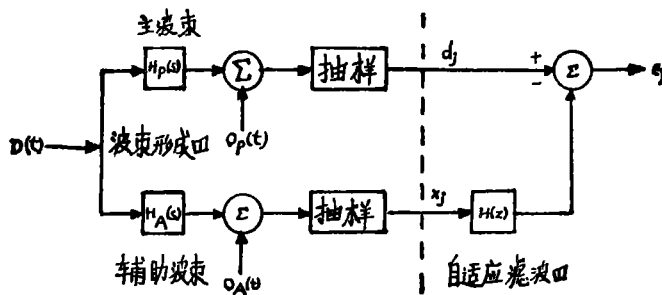


图2 作为相对带宽总数的均方旁瓣抑制



上图的波束形成器 $O_p(t)$ 改为 $Q_p(t)$ ，辅助波束 $O_A(t)$ 改为辅助波束 $Q_A(t)$

图3 自适应波束形成器模型

译自 1978 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing Record. pp 96~99.

译者：方之炳
校者：向大威

参 考 文 献

- 1] Sibul, L. H., Applied Research Laboratory, Pennsylvania State University, private communication.
- [2] Widrow, B., et al., Adaptive Antenna Systems. *Proc. of the IEEE.*, Vol. 55, pp.2143-2159, December, 1967.
- [3] Brennan, L., et al., Control-Loop Noise in Adaptive Array Antennas, *IEEE Trans.*

on *Aerospace and Electronic Systems*. Vol. AES-7, pp.254-262, March, 1971.

- [4] Widrow, B., et al., Adaptive Noise Cancelling: Principles and Applications, *Proc. of the IEEE*, Vol.63, pp.1692-1716, December, 1975.
- [5] Widrow, B., et al., Stationary and Non-stationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter, *Proc. of the IEEE*, Vol.64, pp.1151-1162, August, 1976.
- [6] Gray, R., On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices, *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. IT-18, pp.725-730, November, 1972.

科技消息

QPY-1 型浅地层剖面仪

中国科学院声学研究所东海研究站研制的 QPY-1 型浅地层剖面仪, 是一种应用声学原理进行水下地质剖面的探测调查设备。它可以广泛用于港工建设、海底电缆敷设、海(江)底隧道、铁路桥梁和拦河大坝等工程中选址和 underwater 地质探测, 它能提供连续的地层剖面图, 也可用于浅海海底和河床的地质普查。

在 QPY-1 型浅地层剖面仪中采用了新的技术措施和合理的电路设计。它具有如下特点: 声源重量轻, 便于拆装及运输; 收、发基阵的声学性能好, 后辐射小, 克服了由后辐射产生的虚假地层信号; 采用双通道接收, 基本克服了穿透深度和分辨率之间的矛盾; 具有笔速和低速两种时标, 便于制图, 并利用电子技术进行水深移位, 使用方便。

QPY-1 型地层剖面仪是赶超进口同类日制 SP-3 地层探查机的设备。经过多次海上试验和实际试用, 结果表明: 它具有良好的地层穿透能力, 地层剖面图象的记录清晰, 地层剖面深度可达 50 米, 各项技术指标均能赶上或超过 SP-3 型地层探查机。

SA-1型超声自适应报警器

中国科学院声学研究所东海研究站研制的 SA-1 型超声自适应报警器采用了近年来发展起来的自适应信号处理技术。它主要用来安装于无人活动的密闭机要仓室内。由发射换能器发射超声波, 在室内形成声场。室内无人活动时, 声场是稳定的, 不报警。当入侵者进入室内, 室内声场受到扰动, 采用自适应信号处理技术的接收机便能检测声场的微小扰动, 从而使报警电路报警。

经过二年来的实验和模拟试用, 结果表明: 它具有原理新颖、灵度高、可靠性好且能长期连续工作。能警戒 30 平方米左右的仓室, 并对小火苗(16 开大小的报纸燃烧)兼作火警报警。

SA-1 型超声自适应报警器为房间警戒方式, 它与警戒一点的触点报警器和警戒一条线的红外报警器以及非要发生音响的声控报警器相比具有更广泛的功能。

在 SA-1 型超声自适应报警器的基础上, 东海研究站又进一步研制了 SA-2 型超声报警器。与 SA-1 型相比, SA-2 型报警器的性能与 SA-1 相同, 但结构简单造价低。更宜于推广应用。