高分辨力谱分析方法的频率分辨能力*

L. Marple

（美国信号科学公司）

摘要 本文介绍常规付里叶法、自回归法和 Pisarenko 分解法的功率谱密度估计对两个正弦信号的频率分辨能力。从平均意义上讲，常规付里叶谱分析方法的分辨力近似为观察（样本）间隔的倒数。但是，对于两个有任意初始相位的正弦信号，它的分辨力可能比平均分辨力要好得多或者差得多。

理论上，只要正弦信号的个数和自相关函数已知，Pisarenko 分解法总能分辨两个或两个以上的正弦信号。另一方面，自回归（最大熵）谱估计的分辨能力随信噪比而变化，其理论分辨能力在 Pisarenko 分解法和常规付氏法之间。根据实验发现，在 20 分贝信噪比时，自回归法的分辨性能大约是常规付氏法的 4 倍；在 0 分贝信噪比时，也有 2 倍左右；在－10分贝时，二者的分辨力几乎无差别。

引　　言

通常，在计算功率谱估计时，经验法则认为，频率分辨能力是用于谱分析的数据的时间间隔的倒数。这个法则基于信号的持续时间(ΔT)和信号变换的"宽度"或范围（Δf）之间的不定性关系[1]。虽然，不定性关系通常涉及一个信号，但在解释两正弦信号分辨能力的度量时，不定性关系假定，两个正弦信号最多能接近到 Δf 赫，使其变换不存在显著重叠，从而能区分开它们的不同响应。于是，

$$\Delta f \approx 1/\Delta T \tag{1}$$

常规分析法隐含着这样的假定，即在观察窗以外的信号为零。对任何信号都可以作任意截取，其长度为 ΔT_0 秒，就是窗的宽度。这样，对常规方法而言，$\Delta T = \Delta T_0$。而对于高分辨力分析方法，我们将会看到，要对观察数据进行非零延伸。于是，测量加延伸数据的有效持续时间 $\Delta T > \Delta T_0$。所以，高分辨力方法的频率分辨能力要比常规谱分析方法的好。这就是自回归法高分辨力特性的基础。本文对两种常规付氏法、自回归法(Burg 算法)和 Pisarenko 分解法，用分辨性能图定量地给出理论的和实际能达到的分辨能力。

采用同样的数据，对一种常规方法和两种高分辨力方法求得的分辨力范围如图 1 所示。此外，自回归噪声功率抵消法(NPC)是 Pisarenko 分解法的一种近似，该方法的详细讨论见文献[2]。

---

* "Frequency Resolution of High - Resolution Spectrum Analysis Techniques", Proc. RADC Spectrum Estimation Workshop, 1978. 5. p. 19.

分辨能力的度量和条件

本文中，对于两正弦信号的分辨能力，定义为频率 $\Delta f=|f_1-f_2|$，即在中心频率 f_c 处计算功率谱密度(PSD)，其中 $f_c=(f_1+f_2)/2$，它等于在两个正弦频率上求得各个 PSD 的平均值，也就是

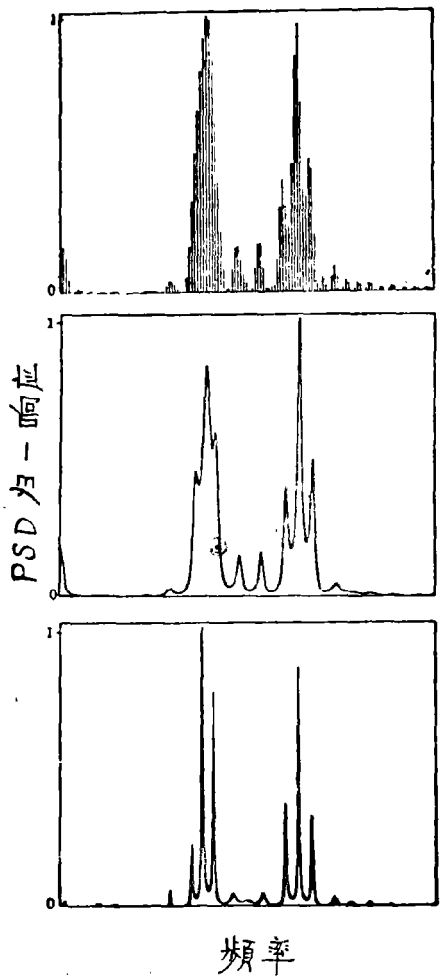
$$S\left(\left[f_1+f_2\right]/2\right)=\frac{1}{2}[S(f_1)+S(f_2)] \qquad (2)$$

采用上述定义的分辨能力(如图 2 所示)是由于 Pisarenko 分解法和自回归法都没有能度量 3 分贝响应带宽的传统的主瓣函数，因而希望能提供一个通用的分辨能力的定义，以便对任何一种 PSD 计算方法都能适用。

频率分辨能力的度量，可用一个无量纲量 R 来表示，称其为标准分辨能力：

$$R=2\pi M\Delta t\Delta f \qquad (3)$$

其中，Δt 是采样间隔，以秒为单位；Δf 是两正弦信号恰好能分辨时的频率间距，以赫

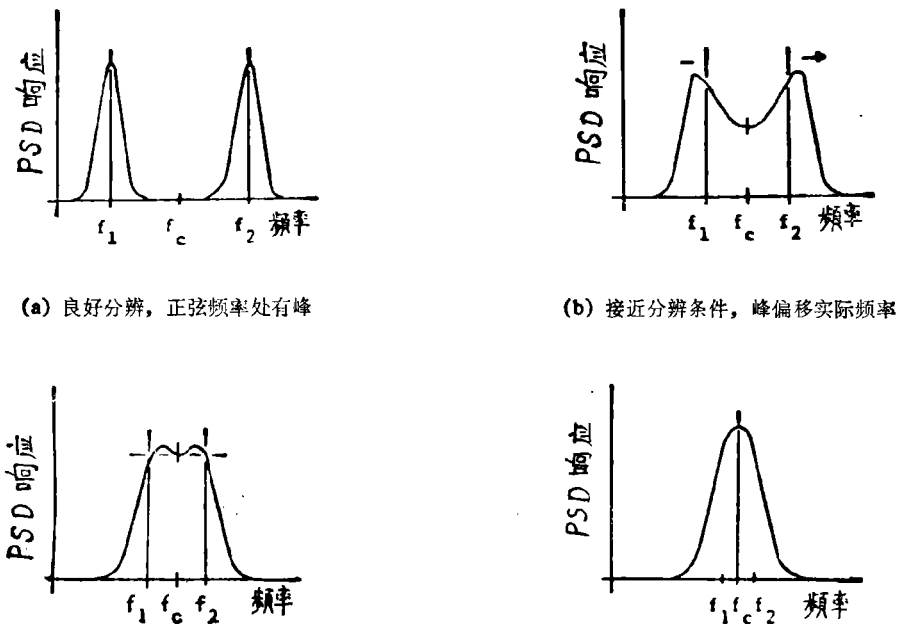


(a) 补零的 FFT

(b) $AR(MEM)$法

(c) 噪声功率抵消的AR法
(近似于 Pisarenko 分解法)

图 1　实验室产生的采样 FSK 信号(25 分贝 SNR，64 个样本)频响图



(a) 良好分辨，正弦频率处有峰

(b) 接近分辨条件，峰偏移实际频率

(c) 刚能分辨，峰向中心移

(d) 不能分辨，两频率太近不能分开

图 2　分辨条件的说明

为单位；M 是自相关延迟数。标准分辨能力的定义取自不定性原理的时间—带宽乘积关系。对于常规谱分析，可以预料 $R\approx 2\pi$，即 6.28 左右。为了确定以赫为单位的分辨能力，只需在标准分辨能力图上，对已知的 M 和 SRN，查出相应的 R 值。这样，根据已知的 R, M 和 Δt，就有

$$\Delta f = R/2\pi M\Delta t \quad (赫) \tag{4}$$

注意，$M\Delta t$ 是总观察时间间隔。

常规付氏法的分辨能力

根据以上 R 的定义，图 3 给出了已知延迟自相关时常规付氏法的标准分辨能力，它是用分析方法推导出来的。详尽的分析参见文献[3]。这里考虑的常规付氏法是 Blackman—Tukey PSD 估计，就是

$$\hat{S}_{BT}(f) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \Phi_m \exp(-j2\pi f_m \Delta t) \tag{5}$$

其中 Φ_m 是已知的或估计的延迟自相关。应注意，(5)式的求和是有限的，表明常规方法是零延伸。

通常，对延迟自相关要加窗，以便减小旁瓣泄漏的影响。一种通用的窗函数就是三角形窗或 Bartlett 窗。采用这种窗，分辨能力要比图 3 所示的略有下降，这说明加窗是以牺牲分辨能力为代价而减小旁瓣的。注意，Blackman-Tukey 方法的两种曲线都位于不定性原理给定

的 6.28 线之下。由此表明，有可能达到比经验法则要略好些的分辨能力。

更为普通的常规付里叶 PSD 估计是周期图，它直接用时间采样值 x_m 来计算，即

$$\hat{S}_{PER}(f)=\frac{1}{M\Delta t}\left|\sum_{m=0}^{M-1}x_m\exp(-j2\pi fm\Delta t)\right|^2 \qquad (6)$$

上式计算大都用 FFT 方法，就是按频率参数 f 的离散间隔来计算(6)式。

图 4 表明，除了观察时间间隔外，两个正弦信号之间的相对相位是确定周期图分辨能力的一个重要因素。周期图是根据数据的加窗变换得来的，而加窗正弦信号在变换域上产生 $\sin f/f$ 函数。随正弦信号起始相位的不同，两个或两个以上加窗正弦信号的合成变换是 $\sin f/f$ 函数的旁瓣矢量与主瓣矢量相长干涉或相消干涉的结果。这种旁瓣互作用是两正弦信号起始相位的函数，对周期图能达到的分辨能力有很大影响，如图 4 所示。该图是通过计算机运算得到的，计算机程序确定了分辨力的范围，两个正弦信号起始相位的步长为 5°。由于周期图的分辨能力不是信噪比的函数，所以没有加上噪声（但是，一组有噪声数据的分辨能力的方差是信噪比的函数）。这样，在图 4 上表示平均分辨力的点是所有可能起始相位的周期图的平均分辨性能。对平均值的平均给出了一个粗略的经验公式。对周期图分辨力来说，有 $\Delta f=0.86/\Delta T$ 赫，式中 $\Delta T=M\Delta t$ 是总观察时间间隔。这可与常用的 $1/\Delta T$ 的经验公式相对照。

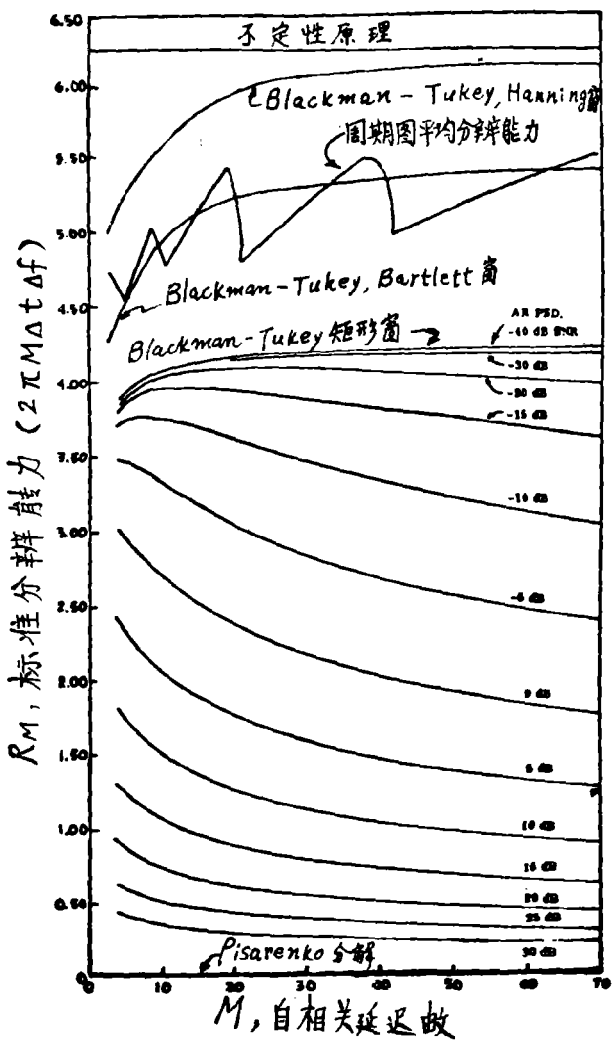


图 3　常规法、自回归法和 Pisarenko 法的标准分辨能力

* AR 系数个数$=M-1$

在图 3 上重新绘制了上述粗糙的平均分辨力曲线，它叠加在已知自相关函数时带 Bartlett 窗的 Blackman-Tukey 曲线之上。这一点并不奇怪，因为周期图和 Blackman-Tukey 方法产生同样的结果，只要在(5)式中代入自相关函数估计

$$\hat{\Phi}_n=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1-n}x_mx_{n+m} \qquad (7)$$

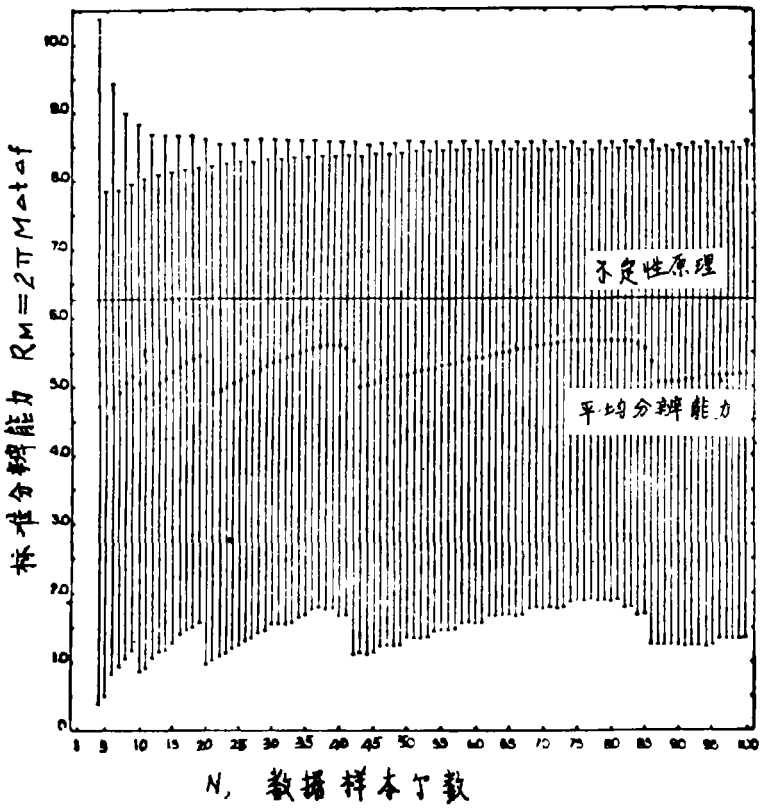


图 4　周期图(*FFT*)分辨能力的方差和初始相位的关系

其中 $n=0,\cdots,M-1$，并且令 $\hat{\Phi}_{-n}=\hat{\Phi}_n$。容易证明，(7)式构成了自相关函数的有偏估计，偏差就是 Bartlett 窗的偏差。

Pisarenko 分解的分辨能力

当一个已知信号是纯正弦信号加白噪声组成时，找出信号中的正弦频率和功率的合适方法是 Pisarenko 谱分解法。为了完全分辨频谱分量，即分解频谱，对于 $M/2$ 个正弦信号加白噪声的情况，要求完全知道 $M+1$ 个延迟自相关函数。给定这些以后，Frost[4]根据 Pisarenko 的深奥文章[5]，系统地阐述了找出正弦频率的一个方法，其要点如下。

(A) 确定秩为 $M+1$ 的自相关矩阵的最小本征值 λ_{min}，自相关矩阵为：

$$\Phi^{M+1}=\begin{bmatrix}\Phi_0 & \cdots & \Phi_M\\ \vdots & & \\ \Phi_M & \cdots & \Phi_0\end{bmatrix} \tag{8}$$

已证明最小本征值就是白噪声功率谱密度：$\lambda_{min}=\sigma_N^2$(证明见 Marple的文章[3])

(B) 解出与 λ_{min} 对应的本征矢量 $\Gamma=\mathrm{col}[1,\ \gamma_1,\cdots,\gamma_M]$

$$\Phi^{M+1}\Gamma=\sigma_N^2\Gamma \tag{9}$$

矢量 Γ 与正弦信号加白噪声过程的 ARMA(自回归动平均)模型的系数有关[3]。

（C）找出各个正弦信号的频率，即计算以下多项式的根：

$$\Gamma^T Z = 1 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_M z^M = 0 \quad . \tag{10}$$

其中 $Z=\mathrm{col}[1, z, z^2, \cdots, z^M]$，而且每个根 z_i 的模一定为 1，所以 $z_i=\exp[j\omega_i]$，ω_i 就是各正弦信号的角频率。

Marple[3,4]给出了与上述方法相配合的公式，以得到每个频谱分量的功率。

Pisarenko 分解(*PD*)法的理想分辨能力是图 3 所示的 $R=0$ 线。但是，人们往往根据数据来估计自相关延迟。另外，事先并不知道正弦分量的个数。这两个因素会在(8)～(10)式过程中引进误差，影响得到理想的分辨能力。一种称为自回归噪声功率抵消法的方法，不用解出本征值和多项式的根，其性能接近 *PD* 法的潜在性能。该方法在另一篇文章[2]中讨论。

自回归法的分辨能力

有关自回归(*AR*)法或称最大熵法(*MEM*)的超分辨能力已有许多研究。在 Burg[6]给出的原始 *MEM* 法中，用已知自相关延迟计算下式给定的 PSD 估计：

$$\hat{S}_{AR}(f) = \frac{P\Delta t}{\left|1+\sum_{m=1}^{M} a_m \exp(-j2\pi f m \Delta t)\right|^2} \tag{11}$$

标量 P 和 *AR* 系数$\{a_m\}$通过求解下面的矩阵方程得到：

$$\Phi^{M+1} A = \underline{P} \tag{12}$$

其中，Φ^{M+1}由(8)式给定；$A=[1, a_1, \cdots, a_m]^T$；$\underline{P}=[P, 0, \cdots, 0]^T$。可以证明[3]，*AR* 法 *PSD* 也可等效地写成：

$$\hat{S}_{AR}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n \exp(-j2\pi f n \Delta t) \tag{13}$$

其中

$$\phi_n = \Phi_n \quad |n| \leqslant M$$

$$\phi_n = -\sum_{m=1}^{M} a_m \phi_{n-m} \quad |n| > M \tag{14}$$

可以看出，*AR* 法 *PSD* 估计并不具有常规付里叶方法隐含的窗，因为 *AR* 法 *PSD* 等效于常规法无限求和的极限情况。不加窗意味着 *AR* 法 *PSD* 没有旁瓣泄漏现象。同样，(14)式给定的延迟延伸所给出的有效时间宽度 $\Delta T > \Delta T_0$，说明比常规 *PSD* 的分辨能力要高。

利用两个等幅正弦信号加白噪声的自相关函数，按(11)式得到的解析结果，提供了如图 3 所示的 *AR* 法平均分辨能力。当信噪比 *SNR* 较高时，其性能接近 *PD* 法的分辨能力；而 *SNR* 较低时，性能接近常规 Blackman-Tukey 法的分辨能力。

图 5 以不同的座标变量重新绘出这些标准分辨曲线。符合这组合成曲线的经验公式是：

$$R = 6.471\ [SNR(M+1)]^{-0.31} \tag{15}$$

注意，分辨能力与 *SNR*(线性单位而不是分贝单位)及自相关延迟数的乘积的幂成正比。

当仅有数据样本，而不是自相关函数时，分辨性能如图 6 所示。如用 Burg 算法，即通过最小平方估计法来确定 *AR* 系数，就可得到 *AR* 法的 *PSD*。还有许多算法都能用来确定 *AR* 系数。例如，Makhoul[7]提出的网格法算法，Morf 等人[8]提出的梯法算法等。由于篇幅限制，这里不再讨论这些算法。

考虑两个正弦信号，每一个信号的起始相位都是零度，并有三种不同的 *SNR*。曾发现

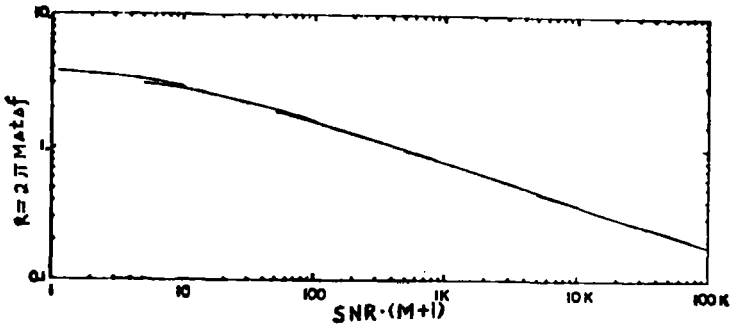


图 5　延迟自相关完全已知时的标准 AR 分辨能力与 $SNR(M+1)$ 的关系

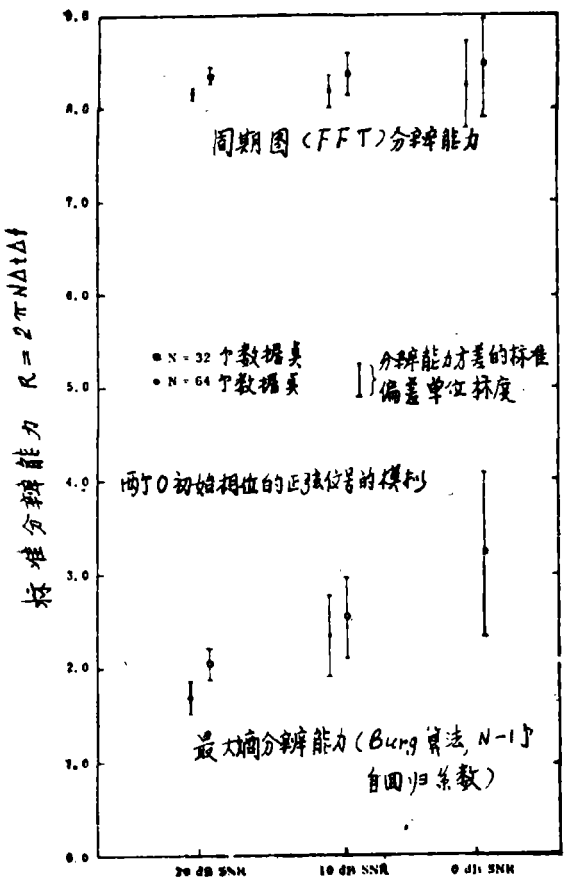


图 6　用数据样本而不是延迟自相关计算的标准分辨能力

零相位时的分辨能力接近于最差。图中还给出周期图分辨力以作比较。为了确定图 6 所示的平均分辨力和方差，使用了许多组数据。由图 6 可见，在 20 分贝 SNR 时，Burg 算法的 AR 法分辨力约为周期图分辨力的 4 倍；而在 0 分贝 SNR 时，改善因子约为 2。

当每个正弦信号的相位改变时，AR 法和周期图法 PSD 的分辨力变化的趋势一致。

在计算的 AR 系数比数据点少的所谓中间情况下，AR 法的分辨性能如图 7 所示。和预料的一样，当 AR 系数的个数不变时（此处个数为 4），数据点数增加，将使标准分辨力越来越接近由图 3 给出的理论曲线。

至此，AR 分辨能力的改善也许是最佳的了。在实际情况中，要计算的 AR 系数往往比数据点的一半还要少。这样作是为了能使 AR 谱中的假信号响应量下降到最小，并能减小谱线分裂效应。当 AR 系数个数比数据数少时，AR 谱对常规谱的相对改善降低了。例如，由图 3 可知，当 −5 分贝 SNR 时，取数据样本为 64 个，则 64 点周期图（FFT）的标准分辨力约为 5.4；而 32 个系数，−5 分贝 SNR 时的 AR 法 PSD 标准分辨力近似为 2.8。这种情况的相对分辨力为：

$$\frac{\Delta f_{PER}}{\Delta f_{AR}}=\frac{R_{PER}/2\pi 64\Delta t}{R_{AR}/2\pi 32\Delta t}=\frac{5.4}{2\times 2.8}=0.96 \tag{16}$$

两信号分辨能力，中等情况，$M<N$，N有限

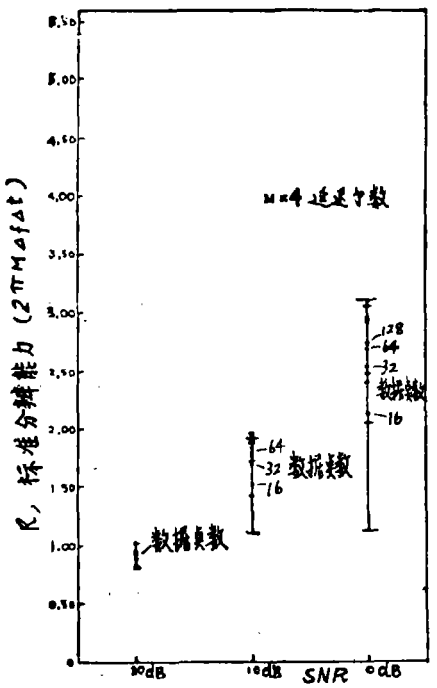


图7　要计算的 AR 系数比数据点数少(即中间情况)时的标准分辨能力

由于该比值小于1，平均说来，AR法PSD估计的频率分辨能力要比常规的FFT分析的分辨能力差些。所以，在低SNR时，用AR谱估计通常没有什么好处。

小　结

常规FFT方法的平均分辨能力是窗函数形状和宽度ΔT的函数。按照本文引入的分辨能力概念，FFT方法的频率分辨能力$\Delta f\approx 0.86/\Delta T$。$AR$法的分辨能力随$SNR$减小而下降，最后退化为常规方法的分辨能力。如果自相关函数完全已知或者可以精确估计，那么用PD法就能得到理想的分辨能力。

（陈耀明译　黄曾旸校）

参 考 文 献

[1] A. Papoulis, Signal Analysis, McGraw-Hill Co., p.273-278, 1977.

[2] L. Marple, "High resolution autoregressive spectrum analysis using noise power cancellation", Record of the 1978 IEEE International Conf. on ASSP.

[3] L. Marple, "Conventional Fourier, Autoregressive and Special ARMA Methods of Spectrum Analysis", Engineers Dissertation, Dept. Electrical Engineering, Stanford Univ., 1976.

[4] O. L. Frost, "Power Spectrum Estimation", Proc. 1976 NATO Advanced Study Institute on Signal Processing.

[5] V. F. Pisarenko, "The Retrieval of Harmonics from a Covariance Function", Geophys. J. of the Royal Astronomical Society, Vol.33, p.347-366, 1973.

[6] J. P. Burg, "Maximum Entropy Spectral Analysis", PhD. Thesis, Dept. of Geophysics, Stanford Univ., 1975.

[7] J. Makhoul, "Stable and Efficient Lattice Methods for Linear Prediction", IEEE ASSP-25 p.423-428, 1977.

[8] M. Morf et al, "Efficient solution of covariance equations for linear prediction", IEEE ASSP-25 p.429-433, 1977.