利用噪声功率抵消的高分辨力自回归谱分析*

L. Marple

(美国信号科学公司)

摘要 自回归谱分析(亦称最大熵谱分析)作为一种较高分辨力的方法，代替常用的*FFT*为基础的谱分析，受到人们极大的关注。本文研究了自回归谱分析法与 Prony 方法和 Pisarenko 谱分解法之间的关系。Prony 方法为自回归谱分析提供了一种新的信号功率估计方法，而 Pisarenko 方法为自回归噪声功率抵消谱分析提供了一种噪声功率估计的方法。

一、引　言

在窄带信号加噪声组成的离散时间过程的谱估计问题中，自回归谱分析作为一种代替常用的 *FFT* 谱分析的方法已获得认可。这是因为在被测数据信噪比足够高时，用自回归方法得到的频率分辨力，要比用 FFT 得到的高 [Marple, 1976]。对于正弦信号加上白色(非相关的)噪声所组成的特定过程，在下列双方之间存在着若干有意义的关系：(1) 自回归谱分析法和 Prony 法；(2) 利用噪声功率抵消的自回归谱分析法和 Pisarenko 谱分解法。这些关系的重要性在于深刻揭示了把自回归谱估计法应用于这种特定信号类型的有效性。

二、自回归谱分析

考虑一个采样时间函数的有限段 $y_n=y(n\Delta t), n=0, 1, \cdots, N$，其中 Δt 是采样间隔。实数过程 $y(\tau)$ 由 M 个正弦信号加白噪声组成，并有离散的时间相关函数，即

$$\phi_n=P_N\delta_n+\sum_{m=1}^{M}P_m\cos(2\pi f_m n\Delta t) \qquad n=0, \pm 1, \cdots\cdots \qquad (1)$$

其中 ϕ_n = 延迟为 n 的自相关函数；P_N = 噪声功率；P_m = 频率为 f_m(赫)的正弦信号功率(瓦)；$\delta_n=1$ $(n=0)$ 或 $0(n\neq 0)$。

自回归谱估计方法可以看作是用自回归模型来拟合被测过程 y_n，如图 1 所示。

---

* "High Resolution Autoregressive Spectrum Analysis Using Noise Power Cancellation", 1978 ICASSP Record, p.345.

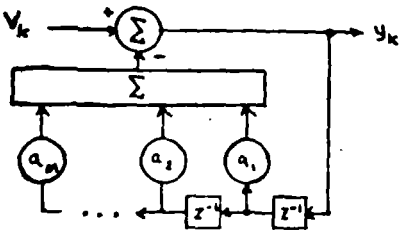


图1 自回归模型

R 阶自回归滤波器的输出为

$$y_k=-\sum_{j=1}^{R}a_j y_{k-j}+v_k \qquad (2)$$

其中 v_k 是白噪声过程，$E(v_k v_{n-k})=P_N\delta_k$，$\{a_j\}$代表自回归模型的参数。(2) 式也能用矢量形式来表示，即为

$$Y_k{}^T A=v_k \qquad (3)$$

其中 $Y_k{}^T=[y_k, y_{k-1}, \cdots\cdots, y_{k-R}]$，$A^T=[1, a_1, \cdots\cdots, a_R]$。用 Y_k 左乘(3)式，并取平均值，则有

$$E[Y_k Y_k{}^T]A=E[Y_k v_k] \qquad (4)$$

或

$$\Phi A=Q \qquad (5)$$

其中 $\Phi=E[Y_k Y_k{}^T]$是过程 y_n 的$(R+1)\times(R+1)$自相关矩阵；$Q^T=[P_N, 0, \cdots, 0]$，Q^T 的表式是根据自回归滤波器输出的过去值和现在的 v_k 不相关而得来的。于是，给定$(R+1)$ 个延迟自相关，用 Levinson 递推算法，从(5)式(通常称为 Yule-Walker 正则方程)可以计算自回归参数和噪声功率 P_N。

自回归谱恰好就是滤波器输出 y_n 的功率谱 $S_{yy}(f)$。于是，传递函数为 $H(f)$ 的滤波器输出功率谱和输入功率谱 $S_{vv}(f)$之间有如下关系：

$$S_{yy}(f)=|H(f)|^2 S_{vv}(f) \qquad (6)$$

对于自回归模型，$S_{vv}=P_N$，自回归谱为

$$\hat{S}_{AR}(f)=S_{yy}(f)=\frac{P_N}{\left|1+\sum_{r=1}^{R}a_r\exp(-j2\pi f_r\Delta t)\right|^2} \qquad (7)$$

只要根据(5)式确定自回归系数和 P_N 后，自回归谱估计就可用 (7) 式计算。典型的自回归谱如图 2 所示。通过观察谱峰的频率来确定出现在频谱中的正弦分量。但是，在自回归谱中，正弦分量的功率不是与峰值高度而是与每个峰下面的面积成正比。为求得这个功率，与其进行积分，不如用另一种方法，即根据(1)式，解出 P，也就是

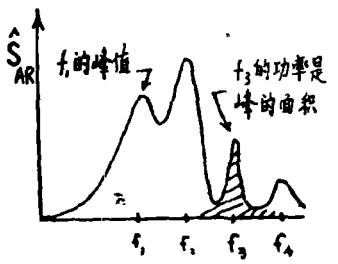


图2 自回归谱

$$GP=\Phi_c \qquad (8)$$

其中 G=频率分量矩阵，其元素 $g_{ij}=\cos 2\pi f_j i\Delta t$；

f_j=第 j 个谱峰的频率，单位赫；

$P^T=[P_1, P_2, \cdots, P_M]$，信号功率矢量；

$\Phi_c{}^T=[\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_M]$，延迟自相关矢量。

这样，若自相关函数是已知的，一个完整的自回归谱估计方法就是，用(5)式来解 A，用(7)式算出自回归谱，以及应用(8)式得到功率估计。

通常情况下，自相关函数是未知的。因此，要用下式来对其进行估计：

$$\hat{\phi}_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1-n}x_k x_{k-n} \qquad n=0, \cdots, N-1 \qquad (9)$$

并用它来代替(5)式中的实际延迟相关。

一旦找出信号功率，与(8)式相似的数学公式提供了噪声功率估计，即

$$\hat{P}_N=\hat{\phi}_0-\sum_{m=1}^{M}P_m \tag{10}$$

此式是由(1)式取零延迟相关得到的，它是第五节中要介绍的噪声功率抵消法的依据。

三、自回归最小平方谱估计

上节介绍了已有已知的或直接估计的延迟自相关时，得到自回归谱的一个方法。为求出(7)式中的自回归参数，还有许多最小平方方法可代替(5)式。这些最小平方方法常常提供更好的自回归谱估计，胜于(9)式和(5)式的组合。

回到图 1 中的自回归模型，假定数据 y_n 的现在值能用 R 个 y_n 的过去值的线性组合来估计，即有

$$\hat{y}_k=-\sum_{j=1}^{R}a_jy_{k-j} \tag{11}$$

该估计的误差为

$$e_k=y_k-\hat{y}_k=\sum_{j=0}^{R}a_jy_{k-j},\quad a_0=1 \tag{12}$$

定义当 $k<0$ 和 $k>N$ 时，$y_k=0$。这样，$E^T=[e_0,e_1,\cdots,e_{R+N}]$能写成

$$\begin{bmatrix}e_0\\ \vdots\\ e_R\\ \vdots\\ e_{N+R}\end{bmatrix}=\overset{\downarrow}{Y_2}\ \overset{\downarrow}{Y_1}\begin{bmatrix}y_0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \\ y_R & \cdots & y_0\\ \vdots & & \\ y_N & \cdots & y_{N-R}\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & y_N\end{bmatrix}\overset{\downarrow}{Y_3}\ \overset{\downarrow}{Y_4}\begin{bmatrix}1\\ a_1\\ \vdots\\ a_R\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$E=y\times A$$

应注意，数据矩阵具有 Toeplitz 对称性，且取决于对观察数据范围以外的数据值作何种假定而分为以下四种情况：Y_1=不加窗情况(对观察范围以外的数据不作假定)；Y_2=前后加窗情况(前后均作零延伸)；Y_3=前加窗情况(前面作零延伸)；Y_4=后加窗情况(后面作零延伸)。通过求平方误差为最小的方法，找出自回归谱(7)式所要求的自回归参数矢量 A：

$$\hat{P}_N=\min E^TE \tag{14}$$

具体作法是对自回归系数求导数得到正则矩阵方程

$$(Y^TY)A=(\hat{P}_N,0,\cdots,0) \tag{15}$$

其中 Y 是数据矩阵四种选择之一。取 $Y=Y_2$ 时，有

$$\frac{1}{N}(Y_2{}^TY_2)A=(\hat{P}_N/N,0,\cdots,0) \tag{16}$$

上式就是 Yule-Walker 正则方程(5)，其中自相关估计由(9)式给出。矩阵 $Y_2{}^TY_2$ 具有 Toeplitz 对称性，而且可用 Levinson 递推算法作 R^2 次运算解出(16)式。

其余三种情况中，$Y_1^TY_1$，$Y_3^TY_3$和$Y_4^TY_4$都不是Toeplitz结构。不过，Morf [1977]已给出了在这三种情况下以R^2次运算解出A的递推公式。就$Y_1^TY_1$的情况而言，方程(15)称作协方差正则方程。Burg[1975]也提供了这种情况的另一种算法，就是人们非常熟悉的最大熵方法。从翻新的观点来看，倾向于选用数据"自相关"矩阵$Y_3^TY_3$。

(15)式及适合于所选数据矩阵Y的递推算法，连同(7)式和(8)式，构成了采样数据自回归谱分析的基础。在用于(15)式的同一递推算法中可以得到隐含的延迟自相关。从(5)式可以看到，自回归模型的自回归参数和自相关函数之间具有一一对应的关系。事实上，容易求得的一个递推关系式是

$$\phi_r=-\sum_{j=1}^{R}a_j\phi_{r-j} \qquad (17)^*$$

该式表明，延迟相关ϕ_r根据R个已计算的延迟相关和自回归参数$\{a_j\}$来计算。应注意，对于所有四种Y矩阵，ϕ_0是相同的。用(17)式表示的关系式，在第五节描述的噪声功率抵消法中，将是一个必不可少的组成部分。

四、Prony法

Prony法[Weiss和McDonough, 1963]不是一种典型的谱分析方法，而是一种指数近似法。然而，指数自变量取复数值时，虚部能产生正弦函数，由此可与频率相联系。这样，Prony法可看作是一种谱线分解法。

Prony法用M个复调制指数之和作为观测数据的模型表示式，即

$$\hat{y}_k=\sum_{j=1}^{M}P_j\exp(\alpha_jk\Delta t)=\sum_{j=1}^{M}P_jz_j^k \qquad (18)$$

其中$z_j=\exp(\alpha_j\Delta t)$，$\alpha$为复数。该方法要求在给定测量$y_n$，$n=0,1,\cdots,N$时，确定$\{P_j\}$和$\{\alpha_j\}$值。若直接对$\{P_j\}$和$\{\alpha_j\}$采用使$E^TE$为最小的最小平方拟合，就会产生高次非线性问题，这里$E^T=[e_0,\cdots,e_N]$和$e_k=y_k-\hat{y}_k$。Prony法的诀窍在于：把问题的非线性集中到一个单自变量多项式方程：

$$(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)=z^M+a_Mz^{M-1}+\cdots+a_2z+a_1=0 \qquad (19)$$

并注意到(18)式可写成线性差分方程

$$\hat{y}_k=-\sum_{j=1}^{M}a_jy_{k-j}\quad k=M,M+1,\cdots,N\geqslant 2M \qquad (20)$$

现在，就能对这一线性化问题，用最小平方估计找到$\{a_j\}$，而不是$\{\alpha_j\}$。但是(20)式恰好就是自回归模型最小平方公式的(11)式。这样，对于计算A参数矢量，Prony法和自回归谱分析法是一样的。所以，用于自回归法的所有递推算法，这里都可以用。

自回归法用A矢量计算自回归谱估计((7)式)，而Prony法则把A作为多项式系数求得(19)式的根。这些根绘在图3所示的z平面上。为比较起见，图3上还给出了相应的自回归谱。应注意的是，与自回归谱峰对应的根，落在紧挨着单位圆的附近。这就提供了另一种检测自回归谱峰值的方法，即求出所有的根，然后确定哪些根落在单位圆和一个半径等于阈值的同心圆之间。

---

* 此式原文有误。——译者

Prony 法的下一步，就是确定信号功率$\{P_j\}$。根据多项式的根确定$\{\alpha_j\}$以后，代回到(18)式，就能得到一个以z_j^r为已知系数的关于P_j的线性方程组。最小平方拟合提供了信号功率矢量P的估计，即

$$P=(Z^{*T}Z)^{-1}Z^{*T}Y \tag{21}$$

其中，* 号表示复共轭；$P^T=[P_1, P_2, \cdots, P_M]$；$Y^T=[y_0, y_1, \cdots, y_N]$；

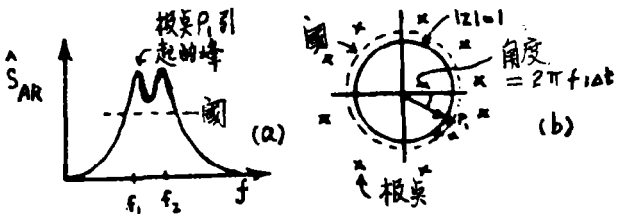


图 3 (a) 自回归谱；(b) z-平面极点图

$$Z=\begin{bmatrix} z_1^0 & \cdots & z_M^0 \\ \vdots & & \vdots \\ z_1^N & \cdots & z_M^N \end{bmatrix}$$

这个功率估计法，可用来代替自回归谱分析(8)式给定的方法，它可能是自回归谱分析的一个更实际的功率谱估计法。

五、利用噪声功率抵消的自回归分析

众所周知[Marple, 1976]，自回归谱的谱峰锐度和分辨力，随信噪比的增加而得到改善。当过程由正弦信号加白噪声组成时，在自相关零延迟项中，扣除大部分噪声功率的贡献，就能人为地增加信噪比，从而获得更高分辨力的频谱，如图 4 所示。噪声功率抵消是一种迭代方法，其中(10)式是该方法的基点。对一组数据找出自回归参数，并用(17)式确定有关的延迟自相关以后，利用 z 平面自回归极点图所相应的自回归谱图，选取高于阈值的频率分量。然后，运用(8)式和(10)式，或者(21)式和(10)式，来计算正弦信号功率和噪声功率估计。噪声功率估计的一部分，要从零延迟自相关项中减去，再用第一次数据计算的延迟自相关，加上修正的零延迟自相关，产生一个新的自回归谱或极点图。这一程序迭代进行，一直到迭代一次后的噪声功率估计比迭代前的增大时才停止。这是根据经验找出的停止点。超过停止范围再扣除噪声功率将导致频谱畸变。

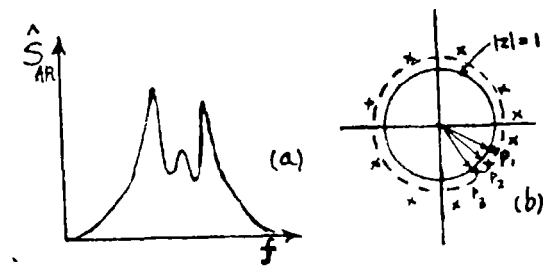


图 4(a) 利用噪声功率抵消的自回归谱；(b) z 平面极点图

六、Pisarenko 谱分解

利用噪声功率抵消法的自回归谱分析是一个迭代过程，在全部噪声功率都被扣除的极限情况下，上述方法逼近 Pisarenko 谱分解法，该方法以 Caratheodory 理论为基础 [Pisarenko, 1972]。此理论表明，所有非奇异的厄米特型 Toeplitz 矩阵

$$\Phi=\begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots \phi_R \\ \phi_1^*\phi_0 & & \cdots \phi_{R-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_R^*\phi_{R-1}^*\cdots & & \phi_0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

具有这样的性质，其元素 ϕ_k 能表示为

$$\phi_k=\sum_{m=1}^{M}P_m\exp(j\omega_m k)+P_0\delta_k \qquad k=0,1,\cdots,R \tag{23}$$

其中，实参数$\{P_m\}(P_m>0$，对于所有 $m)$，$\{\omega_m\}(-\pi<\omega_m\leqslant\pi)$以及 M 都由$\{\phi_k\}$唯一地确定。实际上，要找出 ω_j，只要解本征问题

$$\Phi E=\lambda_{\min}E \tag{24}$$

其中 $E^T=[e_0,e_1,\cdots,e_R]$是与矩阵 Φ 最小本征值 $\lambda_{\min}$ 相应的本征矢量，然后计算多项式的根

$$E^TZ=e_0+e_1z+\cdots+e_Rz^R=0 \tag{25}$$

其中 $Z^T=[1,z,z^2,\cdots,z^R]$。由于厄米特型 Toeplitz 结构，根 z_m 常常能用 $z_m=\exp(j\omega_m)$ 来表示，其中 ω_m 是(23)式复指数的角频率。(8)式可用来计算$\{P_m\}$。事实上，该方法把所有自回归谱估计值的极点都推到 z 平面单位圆上。

当过程是由 M 个实正弦信号加白噪声组成，而且它的 $2M+1$ 个延迟自相关完全已知时，可以证明，若(22)式中 $R\geqslant 2M+1$，则噪声功率给定为：

$$\lambda_{\min}=P_N \tag{26}$$

且$\{\omega_m\}$由(25)式确定，以给出真正的正弦频率。如果延迟自相关虽然已知，但 $R<2M+1$，或者延迟自相关要通过估计得到，且 M 未知，或者噪声是非白的，则由上面分解方法给出的频率或功率不一定是真正的频率和功率。因此，Pisarenko 谱分解方法只有有限的实用价值。

然而，这个方法提供了一个估计白噪声功率的方法，即在第五节中噪声功率抵消法用到的。最小本征值和相应的本征矢量可用经典的幂次方法求得：对任一个初始矢量 E_0，矢量 E_k 的无穷序列

$$E_{k+1}=\Phi^{-1}E_k \text{ 或 } E_k=\Phi E_{k+1},\quad k=0,1,\cdots \tag{27}$$

用迭代产生。在极限情况下，$E_k\to E_{\min}$，是最小本征值的本征矢量。基于对自回归谱的研究，可以确定正弦分量的个数 M，并由延迟自相关估计组成 $2M+1$ 阶自相关矩阵。若自回归参数 A 矢量用作初始矢量，$E_0=A$，则(27)式通过几次迭代就接近收敛。(27)式可用 Zohar[1974] 算法的修正形式有效求解，该算法利用 Φ 的厄米特和Toeplitz对称性的特点，只需要$(2M+1)^2$次运算。在计算出 E 矢量后，最小本征值给定为

$$\lambda_{\min}=\frac{E^T\Phi E}{E^TE} \tag{28}$$

（陈耀明译　侯朝焕校）

参 考 文 献

[1] J. P. Burg, "Maximum entropy spectral analysis", PhD Dissertation, Dept. of Geophysics, Stanford Univ., 1975.

[2] S. L. Marple, Jr., "Conventional Fourier, Autoregressive, and special ARMA methods of spectrum analysis", Engineer's Dissertation, Dept. of Elec. Engin., Stanford Univ., 1976.

[3] M. Morf et al, "Efficient solution of covariance equations for linear prediction", IEEE ASSP-26 pp.429-33, 1977. 10.

[4] V. F. Pisarenko, "The retrieval of harmonics from a covariance function", Geophysics J. of Royal Astron. Soc., vol.33 p.347. 1973.

[5] L. Weiss and R. N. McDonough, 'Prony's method, z-transforms, and Pade approximation", SIAM Rev., vol.5, p.145, 1963.

[6] S. Zohar, "The solution of a Toeplitz set of linear equations", JACM vol.21, p.272, 1974. 4.