由协方差函数恢复谐波*

V.F.Pisarenko

（苏联科学院地球物理研究所）

摘要 本文介绍一种由协方差函数恢复谐波的新方法．这种方法的基础是关于三角函数矩问题的 Caratheodory定理。讨论了这种方法与‘最大熵’谱估计法之间的关系，研究了稍加噪声分量的影响．还讨论了一个数值例子．

引　言

最近发展了几种估计平稳随机过程和噪声场的谱的新方法：

1．‘最大似然’估计法(Capon,1969)；

2．‘最大熵’或‘自回归’估计法(在本文中我们称之为 MEE, 见 Burg, 1972; 亦见Ulrych, 1972 及 Lacoss, 1971)。Parzen (1969)从自回归过程的观点来处理这种估计方法。

3．基于协方差矩阵的本征值和本征矢量的谱估计法，这是由本文作者提出的(Pisarenko, 1972)。

当要求谱峰有高的分辨力时，这些方法特别有用，它们已被应用于各种各样的科学领域，譬如，在地球物理学方面，用于研究地球的自由振动、地震表面波、微震的谱等等。

在本文中我们还要介绍另外一种检测谱峰的方法，这是以关于三角函数矩问题的Caratheodory 定理为基础的。同时我们要证明MEE 事实上是我们新方法的平滑形式。在本文的最后一节，我们研究在记录中加上少量噪声对这种估计方法的影响。

一、由协方差函数的有限截段恢复谱的问题

设 $x(t)$为一复平稳随机过程，平稳是广义的，它取决于离散的时间(譬如见 Doob,1953)*。假定该过程的平均值为零。过程 $x(t)$的谱函数 $F(\lambda)$与其协方差函数 $B(k)$的关系为

$$B(k)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\lambda k)dF(\lambda)\quad -\infty\leqslant k\leqslant\infty \tag{1}$$

当假定$x(t)$是实过程时，我们将明确地说明。

若 $F(\lambda)$绝对连续，它的导数称为谱密度 $P(\lambda)$：

$$P(\lambda)=F'(\lambda) \tag{2}$$

如果 $F(\lambda)$在频率 λ_j 处有一阶跃 ρ_j，即若 $F(\lambda_j+0)-F(\lambda_j-0)=\rho_j$，则如果我们引入 δ 函数

* “Retrieval of Harmonics from a Covariance Function”. The Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society Vol.33, No.3, 1973. 9.

估计其意思为：$x(t)$为复广义平稳的随机序列。——译注

的话，(2)依然成立；在这种情况下，$P(\lambda)$包含$\rho_j\delta(\lambda-\lambda_j)$分量，协方差函数$B(k)$包含谐波$\rho_j\exp(i\lambda_j k)$。

假定我们有一段长为2m的协方差函数，即我们有

$$B(k) \qquad -m\leqslant k\leqslant m \tag{3}$$

真实的谱函数$F(\lambda)$将是怎么样的呢？开始我们假定值$B(k)$完全已知，没有任何噪声或误差。

引理1. 设$B(k)$的截段使得协方差矩阵B($m+1$阶)是非退化的：

$$B=\{B(k-j)\}_{k,j=0,1,\ldots,m} \tag{4}$$

则存在无穷多个谱函数$F(\lambda)$，在$|k|\leqslant m$时与给定的函数$B(k)$的关系为方程(1)。

为证明这个引理，考虑MEE $P_E(\lambda)$：

$$P_E(\lambda)=\beta_{00}\left|\sum_{k=0}^{m}\beta_{0k}\exp(-i\lambda k)\right|^{-2} \qquad -\pi<\lambda\leqslant\pi \tag{5}$$

其中$\{\beta_{kj}\}_{k,j=0,1,\ldots,m}$是矩阵$B$的逆。这种估计方法称为'最大熵'估计法，因为在满足关系

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\lambda k)P(\lambda)d\lambda=B(k) \qquad |k|\leqslant m$$

的所有谱密度函数中，它使熵积分$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\log P(\lambda)d\lambda$为最大(见Shannon, 1948)。应注意，$P_E(\lambda)$正好是$m$阶自回归过程的谱密度(见Jenkins及Watts, 1970)，这种过程的协方差函数的前m个值等于$B(k)$截段的那些给定值。

因为假定B是正定的，故对于足够小的μ，矩阵$R(\mu)=B-\mu I$也将是正定的(这里I表示$m+1$阶单位矩阵)。所以对于足够小的μ，B可表为两个正定矩阵之和：

$$B=R(\mu)+\mu I \tag{6}$$

用$\{r_{kj}\}_{k,j=0,1,\ldots,m}$表示$R(\mu)$的逆，我们得到一族谱密度

$$r_{00}\left|\sum_{k=0}^{m}r_{0k}\exp(-i\lambda k)\right|^{-2}+\mu \tag{7}$$

它们精确地相应于协方差函数$B(k)$的给定截段。我们注意到，(7)中的第二项表示协方差函数中的δ函数$\mu\delta(k)$。引理1得证。

由Caratheodory定理(见下面第二节)可得，对于满足$-\pi<\lambda_0<\pi$的任何λ_0，总存在一谱函数$F(\lambda)$，它相应于$B(k)$的给定截段，并在频率λ_0上有一阶跃；同时也有可能选择一个函数$F(\lambda)$，在任何预先定好的有限频率集$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$上有阶跃(虽然这些阶跃的幅度不能任意地选择，当$n$增加时这些幅度一般趋于零)。

所以如果一离散时间函数的谱估计值是由协方差函数的有限截段得到的，并且相应协方差矩阵是非退化的，则必须考虑到即使协方差函数的值精确地已知，也存在无穷多个相应的谱函数。同时，在任何频率λ上不存在谱密度的上界，因为总可以安排一个δ函数出现于频率λ处。尽管如此，在这种情况下对用某种谱窗平滑过的那些谱函数还是能够得到某种上界和下界的。特别有如下定理成立。

定理　设$w(\lambda)$为一谱窗，即λ的一个实周期函数，周期为2π，可微r次($r\geqslant1$)，并

$$|w^{(r)}(\lambda)|\leqslant K$$

这里K为某个常数。我们用$B(k)$表示与谱函数$F(\lambda)$的关系为方程(1)的协方差函数。于是基于协方差函数的有限截段(3)，对于平滑过的谱

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)$$

存在如下的上下界：

$$\sum_{k=-m}^{m} w_k\exp(-i\lambda_0 k)B^*(k)-KB(0)m^{-r}[(4/\pi^2)\log(m+1)+4]$$

$$\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)$$

$$\leqslant\sum_{k=-m}^{m} w_k\exp(-i\lambda_0 k)B^*(k)+KB(0)m^{-r}[(4/\pi^2)\log(m+1)+4] \quad (8)$$

其中 w_k 是函数 $w(\lambda)$ 的付里叶系数：

$$w_k=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(-i\lambda k)w(\lambda)d\lambda$$

证明在附录中给出。根据这个定理，我们可以估计为谱窗 $w(\lambda-\lambda_0)$ 所截取的连续的和离散的谱分量对功率的贡献。

譬如，用宽度为 Δ 的 Parzen 窗(见 Jenkins 和 Watts, 1969)：

$$w(\lambda)=\begin{cases}1-6(\lambda/\Delta)^2+6|\lambda/\Delta|^3 & |\lambda|\leqslant\Delta/2\\ 2(1-|\lambda/\Delta|)^3 & \Delta/2\leqslant|\lambda|\leqslant\Delta\\ 0 & \Delta\leqslant|\lambda|\leqslant\pi\end{cases} \quad (9)$$

容易证明，$w(\lambda)$ 的二阶导数存在，并小于 $12/\Delta^2$，同时(Jenkins 和 Watts, 1969)

$$w_k=\frac{3\Delta}{8\pi}\left[\frac{\sin(k\Delta/4)}{k\Delta/4}\right]^4$$

对于 $B(k)$，我们取自回归协方差：

$$B(k)=\alpha^{|k|} \qquad |\alpha|\leqslant 1$$

$$F'(\lambda)=(1-\alpha^2)(1+\alpha^2-2\cos\alpha\lambda)^{-1}$$

我们假设 $\Delta=1$，$\alpha=0.5$，$\lambda_0=\frac{1}{2}\pi$ 及 m=50。然后取两位有效数字，积分

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\alpha^2)w(\lambda-\lambda_0)}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda}d\lambda \quad (10)$$

等于 0.076。取同样的精度，和式

$$\sum_{k=-m}^{m} w_k\exp(-i\lambda_0 k)B^*(k)$$

等于 0.077，而

$$KB(0)m^{-r}[(4/\pi^2)\log(m+1)+4]=12\cdot 50^{-2}[(4/\pi^2)\log 51+4]$$

等于 0.027。所以对于积分(10)的真值 0.076，我们求得上下界为 0.077 ± 0.027。我们看到，即使对于比较大的 m 和相当宽的谱窗宽度 Δ，上下界(8)也只是给出对于(10)的相当粗糙的估计。自然，当 m 和 Δ 减小时，估计(8)变得更坏。

因此，当只知道协方差函数的一个有限截段，对真实的谱没有任何先验信息时，我们不应该提真实谱而应该提真实谱的整个族。

二、由协方差函数的有限截段恢复谐波的新方法

在这一节里，我们要利用Caratheodory的下述定理(Szegö新作之证明见Grenander和Szegö，1958，第4章)。

定理　设 $c_1, \cdots, c_m$ 为复数(不全为零)并假定 $m>1$。则存在某个整数 r，$1\leqslant r\leqslant m$ 以及实数 ρ_j 和 $\omega_j(j=1,\cdots,r)$，使得 $\rho_j>0$，$-\pi<\omega_j\leqslant\pi$，并且当 $j\neq k$ 时 $\omega_j\neq\omega_k$，同时使得数列 c_k 的下列表示式成立：

$$c_k=\sum_{j=1}^{r}\rho_j\exp(i\omega_j k)\quad k=1,\cdots,m \tag{11}$$

常数 ρ_j 和 ω_j 是唯一确定的。

我们现在来研究协方差函数 $B(k)$ 的截段(3)并在 Caratheodory 定理中令 $c_k=B(k)$，$k=1,\cdots,m$。于是由(11)得到 $B(k)$ 的下列表示：

$$B(k)=\sum_{j=1}^{r}\rho_j\exp(i\omega_j k)\quad k=1,\cdots,m;\ r\leqslant m \tag{12}$$

当 $k=0$，则一般有

$$B(0)\geqslant\sum_{j=1}^{r}\rho_j \tag{13}$$

由 Szegö 的证明可知，当且仅当矩阵 B 是退化的时候，(13)中的等号成立。若 B 是非退化的，严格的不等式成立。在这种情况下，我们用 ρ_0 记(13)左方和右方之差：

$$\rho_0=B(o)-\sum_{j=1}^{r}\rho_j \tag{14}$$

因为 $B(k)=B^*(-k)$，对于 $B(k)$ 我们有如下表示式：

$$B(k)=\rho_0\delta(k)+\sum_{j=1}^{r}\rho_j\exp(i\omega_j k)\quad |k|\leqslant m \tag{15}$$

其中 $\delta(0)=1$，当 $k\neq0$ 时 $\delta(k)=0$；对于非退化矩阵 B，$\rho_0>0$；对于退化的矩阵 B，$\rho_0=0$。

方程(15)提供了用一组谐波或许还有一个相应于白噪声的 δ 函数之和表示协方差函数 $B(k)$ 的截段的方法。

应当注意，如果真实协方差函数由 r 个谐波(其中 $r\leqslant m$)，可能还有一个 δ 函数组成的话，则表示式(15)给出真实的频率 ω_j 和振幅 ρ_j，因为按 Caratheodory 定理，这些量是唯一确定的。但是如果 $r>m$ 或者如果 $B(k)$ 包含某些非白的谱分量，则(15)所给出的 ω_j 和 ρ_j 可能不是真实的频率和振幅。下面我们将评述这些数与真实谱之间的关系。

若 $B(k)$ 为实的，则为了得到实的余弦谐波，(15)中的复谐波数目必须为偶数，并以复数共轭对出现：

$$\rho_{j1}=\rho_{j2}\qquad\qquad \omega_{j1}=-\omega_{j2}$$

$$\rho_{j1}\exp(i\omega_{j1}k)+\rho_{j2}\exp(i\omega_{j2}k)=2\rho_{j1}\cos(\omega_{j1}k) \tag{16}$$

因而对于实的 $B(k)$，表示式(15)可写成如下形式：

$$B(k)=\rho_0\delta(k)+2\sum_{j=1}^{p}\rho_j\cos(\omega_j k)\quad |k|\leqslant m \tag{17}$$

其中 $p\leqslant m/2$。于是如果在实的协方差函数中余弦谐波的真实数目不大于 $m/2$，则这些谐波可以从长 $2m$ 的协方差函数截段中精确地找出来。

现在，我们根据 Grenander 及 Szegö(1958)的作法来说明确定 r，ρ_j 以及 ω_j 的方法。

确定 r, ρ_j 和 ω_j 的算法　算法由四个步骤组成：

1．求 $m+1$ 阶矩阵 B 的最小本征值 μ_0；其重数记为 ν。μ_0 等于(15)中的 δ 函数项的幅度 ρ_0。如果 $\rho_0=0$，则(15)中的 δ 函数项等于 0。下述两种情况都是可能的：$\nu=1$ 和 $\nu>1$。如果 $\nu=1$，在下面我们就考虑矩阵 $B-\mu_0 I$；如果 $\nu>1$，我们就考虑矩阵 $B-\mu_0 I$ 的阶数为 $r+1$（其中 $r=m-\nu$）的主子式。将此子式记为

$$(B-\mu_0 I)_r=\begin{pmatrix} B(0)-\mu_0 & B(1) & \cdots & B(r) \\ B(-1) & B(0)-\mu_0 & \cdots & B(r-1) \\ \vdots & \vdots & & \\ B(-r) & B(-r+1) & \cdots & B(0)-\mu_0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

于是矩阵 $(B-\mu_0 I)_r$ 的秩为 r，其阶数为 $(r+1)$。

2．求 $(B-\mu_0 I)_r$ 相应于其唯一的零本征值的本征矢量，将其诸分量记为 $p_0, p_1, \cdots, p_r$。

3．求方程

$$p_0+p_1 z+\cdots+p_r z^r=0 \tag{19}$$

的根，把这些根记为 $z_1, \cdots, z_r$。这些根都是不同的，模均为 1，故可把它们唯一地写成形式

$$z_j=\exp(i\omega_j) \qquad -\pi<\omega_j\leqslant\pi \qquad j=1, \cdots, r$$

数 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 为所求谐波的频率。

4．正如 Grenander 和 Szegö(1958)所证明的，振幅 ρ_j 可以用 $z_1, \cdots, z_r$ 来表示。在此我们给出 ρ_j 表示式的另外一种推导，这对于数值计算也许比较方便。

振幅 ρ_j 满足线性方程组

$$\sum_{j=1}^{r}\rho_j\exp(i\omega_j k)=B(k)-\mu_0\delta(k) \qquad |k|\leqslant m \tag{20}$$

现在我们来说明，如何从(20)推导出确定 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 的实线性方程组。首先假定绝对值 $|\omega_1|, \cdots, |\omega_r|$ 都不相同。于是由差分方程理论(Gelfond, 1959)可以证明，当 $\omega_j\neq 0$，$\omega_j\neq\pi$ 时，

$$det\begin{pmatrix} \sin\omega_1 & \sin\omega_2 & \cdots & \sin\omega_r \\ \sin 2\omega_1 & \sin 2\omega_2 & \cdots & \sin 2\omega_r \\ \vdots & & & \\ \sin r\omega_1 & \sin r\omega_2 & \cdots & \sin r\omega_r \end{pmatrix}\neq 0 \tag{21}$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \cos\omega_1 & \cos\omega_2 & \cdots & \cos\omega_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(r-1)\omega_1 & \cos(r-1)\omega_2 & \cdots & \cos(r-1)\omega_r \end{pmatrix}\neq 0 \tag{22}$$

如果 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 中没有一个等于 0 或 π，对于 $k=1, \cdots, r$ 我们可以取方程(20)的虚部：

$$\sum_{j=1}^{r}\rho_j\sin\omega_j k=\mathrm{Im}B(k) \qquad k=1, \cdots, r \tag{23}$$

因为(21)，方程组(23)唯一地确定振幅 $\rho_1, \cdots, \rho_r$。如果某个 $\omega_j=0$ 或 $\omega_j=\pi$，对于 $k=0, 1, \cdots, r-1$ 可取方程(20)的实部：

$$\sum_{j=1}^{r}\rho_j\cos\omega_j k=\mathrm{Re}B(k)-\mu_0\delta(k) \qquad k=0, \cdots, r-1 \tag{24}$$

这个方程组的行列式即为(22)式，因而是非零的。

现在假定在 $\omega_1, \cdots, \omega_r$ 中，有一对有相同的模，譬如说 $\omega_1 = -\omega_2$，而其他 $|\omega_3|, \cdots, |\omega_r|$ 都不同。把(23)和(24)中有 ω_1 和 ω_2 的项放在一起，我们有

$$\rho_1 \sin\omega_1 k + \rho_2 \sin\omega_2 k = (\rho_2 - \rho_1)\sin\omega_2 k$$

$$\rho_1 \cos\omega_1 k + \rho_2 \cos\omega_2 k = (\rho_2 + \rho_1)\cos\omega_2 k$$

我们记 $\rho_2 - \rho_1 = \widetilde{\rho_2}, \qquad \rho_2 + \rho_1 = \widetilde{\widetilde{\rho_2}}$

现在不再考虑(23)和(24)而考虑截断了的方程组

$$\widetilde{\rho_2} \sin\omega_2 k + \sum_{j=3}^{r} \rho_j \sin\omega_j k = \mathrm{Im}B(k) \quad k = 1, \cdots, r-1 \tag{25}$$

$$\widetilde{\widetilde{\rho_2}} \cos\omega_2 k + \sum_{j=3}^{r} \rho_j \cos\omega_j k = \mathrm{Re}B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad k = 0, 1, \cdots, r-2 \tag{26}$$

在这些方程组中，所有的模 $|\omega_2|, |\omega_3|, \cdots |\omega_r|$ 都不相同，所以利用方程组(25)和(26)我们可以确定 $\widetilde{\rho_2}, \widetilde{\widetilde{\rho_2}}, \rho_3, \cdots, \rho_r$，由这些值我们得到

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\widetilde{\widetilde{\rho_2}} - \widetilde{\rho_2}) \qquad \rho_2 = \frac{1}{2}(\widetilde{\widetilde{\rho_2}} + \widetilde{\rho_1}) \tag{27}$$

当有几对频率只是在符号上不同时，这个方法是适用的。在把(23)和(24)中相应的对组合在一起之后，求解截断了的方程组，然后用(27)去求各个振幅。$\omega_j = 0$ 或 $\omega_j = \pi$ 的各项总是由(24)去确定。

应注意，对于实的协方差函数我们用方程组(17)而不用(20)：

$$2\sum_{j=1}^{p} \rho_j \cos\omega_j k = B(k) - \mu_0 \delta(k) \quad |k| < m \tag{28}$$

模 $|\omega_1|, \cdots, |\omega_p|$ 都不相同，可以对于 $k = 0, 1, \cdots, p-1$ 使用方程(28)。由于(22)，这个方程组的行列式不等于 0，故 $\rho_1, \cdots, \rho_p$ 是唯一确定的。

于是数 ω_j 和 ρ_j 的推导完毕。很清楚，当 m 的值到几十时实际上可以在数字计算机上采用这个算法。

三、关于 $P_E(\lambda)$ 和由协方差函数的截段所确定的谐波之间的联系

现在我们假定矩阵 B 的最小本征值 μ_0 是单重的($\nu = 1$)且 $\mu_0 > 0$。于是 $r = m$，并容易证明，除一个常数因子之外，多项式(19)可写成行列式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & \cdots & z^m \\ B(-1) & B(0) - \mu_0 & B(1) & \cdots & B(m-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ B(-m) & B(-m+1) & B(-m+2) & \cdots & B(0) - \mu_0 \end{pmatrix} = 0 \tag{29}$$

对于 $\mu < \mu_0$，我们用 $P_E^{(\mu)}(\lambda)$ 记矩阵 $B - \mu I$ 的最大熵估计(MEE)：矩阵 $(B - \mu I)^{-1}$ 的第一行记为 $\beta_{0k}(\mu)$，相应带符号的子式记为 $B_{0k}(\mu)$：

$$\beta_{0k}(\mu) = \frac{B_{0k}(\mu)}{\det(B - \mu I)} \qquad k = 0, 1, \cdots, m$$

我们看到多项式(29)的诸系数等于 $B_{0k}(\mu)$。但是由方程(5)，$P_E(\lambda)$ 中的系数 β_{0k} 可写成

$$\beta_{0k}=\beta_{\delta k}(0)=\frac{B_{0k}(0)}{\det B} \qquad k=0,1,\cdots,m$$

已经知道(Grenander 和 Szegö, 1958, 第 2 章)，如果 $\det B>0$, 则多项式

$$\sum_{k=0}^{m}\beta_{0k}z^k=\frac{1}{\det B}\sum_{k=0}^{m}B_{0k}(0)z^k=0$$

的所有根位于复 z 平面上单位圆之内。用 $z_1(\mu),\cdots,z_m(\mu)$ 记多项式

$$\sum_{k=0}^{m}\beta_{0k}(\mu)z^k=\frac{1}{\det(B-\mu I)}\sum_{k=0}^{m}B_{0k}(\mu)z^k=0 \tag{30}$$

的根，对于 $\mu<\mu_0$ 有

$$|z_j(\mu)|<1 \qquad j=1,2,\cdots,m$$

由(30)我们看到，当 $\mu\uparrow\mu_0$ 时，根 $z_j(\mu)$ 趋于多项式(29)的根，即

$$z_j(\mu)\to\exp(i\omega_j) \qquad 当\ \mu\uparrow\mu_0,\ j=1,\cdots,m \tag{31}$$

由 MEE $P_E(\lambda)$ 的定义(5)，有

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\lambda k)P_E(\lambda)\,d\lambda=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\beta_{00}\exp(i\lambda k)d\lambda}{\left|\sum_{j=0}^{m}\beta_{0j}\exp(-i\lambda j)\right|^2}=B(k) \quad |k|\leqslant m \tag{32}$$

在积分(32)中作变量代换：

$$\zeta=\exp(i\lambda)$$

我们求得

$$\frac{\beta_{00}}{2\pi}\oint\frac{\zeta^{k-1}d\zeta}{\left|\sum_{j=0}^{m}\beta_{0j}\zeta^j\right|^2}=B(k) \quad |k|\leqslant m \tag{33}$$

其中积分路径围绕在复 ζ 平面上的单位圆。类似地，对于矩阵 $B-\mu I$:

$$\frac{\beta_{00}}{2\pi}\oint\frac{\zeta^{k-1}d\zeta}{\left|\sum_{j=0}^{m}\beta_{0j}(\mu)\zeta^j\right|^2}=B(k)-\mu\delta(k) \quad |k|\leqslant m \tag{34}$$

假定(34)分母的所有的根 $z_j(\mu)$ 是各不相同的，由复留数理论我们有

$$B(k)-\mu\delta(k)=\sum_{j=1}^{m}\rho_j(\mu)z_j^k(\mu) \quad k=0,1,\cdots m \tag{35}$$

对于 $k<0$, 等式(35)改为相应的复数共轭表示式。

由(31)和(35)我们有，当 $\mu\uparrow\mu_0$ 时

$$B(k)-\mu_0\delta(k)=\sum_{j=0}^{m}\rho_j(\mu_0)z_j^k(\mu_0) \quad k=0,1,\cdots,m \tag{36}$$

将(36)和(15)进行比较我们得出结论：$\rho_j(\mu_0)=\rho_j$，故

$$\sum_{j=1}^{m}\rho_j(\mu)z_j^k(\mu)\to\sum_{j=1}^{m}\rho_j\exp(i\omega_jk) \quad k\geqslant 0 \quad 当\ \mu\uparrow\mu_0$$

或以谱的形式

$$P_E^{(\mu)}(\lambda)\to\sum_{j=1}^{m}\rho_j\delta(\lambda-\omega_j) \quad -\pi<\lambda\leqslant\pi \quad 当\ \mu\uparrow\mu_0$$

这个式子使得这个估计方法的某些振幅特性看得很清楚(比较 Lacoss, 1971)，同时说明为什么有时 MEE $P_E(\lambda)$ 能较好地从白噪声背景上分离出谱波来。很清楚，从矩阵 B 中减去某对角

矩阵 $\mu_0 I$ 会使得 Lacoss 的例子中的谐波得到精确的确定。

在取极限 $\mu \uparrow \mu_0$ 之前，(34)中的被积函数可分解成形如

$$|e^{i\lambda} - z_j(\mu)|^{-2}$$

的一些简单分式，可把它们看成是(37)中 δ 函数 $\delta(\lambda - \omega_j)$ 的'平滑过的'的形式。因而可把 $P_E(\lambda)$ 看成是函数

$$\mu_0 + \sum_{j=1}^{m} \rho_j \delta(\lambda - \omega_j)$$

的'平滑'形式。当 μ 朝着 μ_0 增加时，这种平滑作用趋于消失了在 $\mu = \mu_0$ 的极限情况下，$P_E(\lambda)$ 被分解成一些纯粹的谐波。

如果真实谱是连续的，则在其'线性'谱表示式(37)中的谐波 $\rho_j \delta(\lambda - \omega_j)$ 将'勾画出'真实谱密度的轮廓。m 越大，这种勾画将越加细致。

有的时候，线性谱表示式(37)可以给出简便的谱的参数化方法，这在实际计算中也许是有用的。

四、原始数据的微小随机扰动

现在我们来考虑当协方差函数受到加性随机噪声干扰的情况。这意味着在方程(15)中频率 ω_j 和振幅 ρ_j 也是随机变量。因为它们是噪声的非线性函数，一般不能表成噪声的显函数，所以要得到它们的统计特性是非常困难的。因此我们认为噪声振幅足够小，小到可以用微扰方法(见譬如 Gelfand, 1966)。

假定有一段受到扰动的协方差函数 $\widehat{B}(k)$：

$$\widehat{B}(k) = B(k) + \varepsilon\xi(k) \qquad |k| \leqslant m$$

其中 $B(k)$ 是真实协方差函数，$\xi(k)$ 是随机噪声，$\xi(k) = \xi^*(-k)$，ε 是一小的实参数。按我们的假定，$\widehat{B}(k) = \widehat{B}^*(-k)$。我们进一步假定

$$\det B > 0 \tag{38}$$

及以 1 的概率

$$\det \widehat{B} > 0 \tag{39}$$

我们假定噪声 $\xi(k)$ 的头两阶矩存在。把这些矩的实部和虚部分开表示：

$$\left.\begin{aligned} &E\mathrm{Re}\xi(k) = a_k && k = 0, 1, \cdots, m \\ &E\mathrm{Im}\xi(k) = a_{m+k} && k = 1, \cdots, m \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} &E[\mathrm{Re}\xi(k) - a_k][\mathrm{Re}\xi(j) - a_j] = \sigma(k, j) && k, j = 0, 1, \cdots, m \\ &E[\mathrm{Re}\xi(k) - a_k][\mathrm{Im}\xi(j) - a_{m+j}] = \sigma(k, m+j) && k = 0, \cdots, m \\ & && j = 1, \cdots, m \\ &E[\mathrm{Im}\xi(k) - a_{m+k}][\mathrm{Im}\xi(j) - a_{m+j}] = \sigma(m+k, m+j) && k, j = 1, \cdots, m \end{aligned}\right| \tag{41}$$

用 $\mathbf{a}$ 记(40)的列矢量，用 Σ 记 $(2m+1)$ 阶对称协方差矩阵 $\sigma(k, j)_{k, j = 0, \ldots, 2m}$。

我们假定在 $B(k)$ 的表示式(15)中 $r = m$，即

$$B(k) = \rho_0 \delta(k) + \sum_{j=1}^{m} \rho_j \exp(i\omega_j k) \qquad |k| \leqslant m \tag{42}$$

于是对于足够小的 ε，协方差函数 $\widehat{B}(k)$ 将以任意接近于 1 的概率用类似的形式

$$\widehat{B}(k)=\rho_0(\varepsilon)\delta(k)+\sum_{j=1}^{m}\rho_j(\varepsilon)\exp[i\omega_j(\varepsilon)k] \quad |k|\leqslant m \tag{43}$$

表示，其中 $\rho_j(\varepsilon)$ 和 $\omega_j(\varepsilon)$ 是 ε 的随机函数，且

$$\begin{matrix}\rho_j(\varepsilon)\to\rho_j & j=0,1,\cdots,m \\ \omega_j(\varepsilon)\to\omega_j & j=1,\cdots,m\end{matrix} \quad 当\varepsilon\to 0 \tag{44}$$

在点 $\varepsilon=0$ 的邻域，函数 $\rho_j(\varepsilon)$ 和 $\omega_j(\varepsilon)$ 可微，可表为如下形式：

$$\rho_j(\varepsilon)=\rho_j+\varepsilon\widetilde{\rho}_j+\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\rho}}_j+\cdots \tag{45}$$

$$\omega_j(\varepsilon)=\omega_j+\varepsilon\widetilde{\omega}_j+\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\omega}}_j+\cdots \tag{46}$$

我们希望求得函数 $\rho_j(\varepsilon)$ 和 $\omega_j(\varepsilon)$ 主要的线性部分；对于足够小的 ε，以接近于 1 的概率我们有：

$$\begin{aligned}\rho_j(\varepsilon)&\approx\rho_j+\varepsilon\widetilde{\rho}_j \\ \omega_j(\varepsilon)&\approx\omega_j+\varepsilon\widetilde{\omega}_j\end{aligned} \tag{47}$$

将(45)和(46)代入(43)，把指数展成 ε 的幂级数，并使 ε 的诸系数相等，我们便得到

$$\widetilde{\rho}_0\delta(k)+\sum_{j=1}^{m}(\widetilde{\rho}_j+\rho_j\widetilde{\omega}_j ik)\exp(i\omega_j k)=\xi(k) \quad |k|\leqslant m \tag{48}$$

分别取(48)的实部和虚部，得到 $2m+1$ 个实未知参数 $\widetilde{\rho}_0,\cdots,\widetilde{\rho}_m,\widetilde{\omega}_1,\cdots,\widetilde{\omega}_m$ 的 $2m+1$ 阶实线性方程组。对于 $k=0$，我们得到一个实方程(48)；对于 $k=1,\cdots,m$ 我们由每一个复方程(48)得到两个实方程，总共得到 $2m+1$ 个方程。对于 $k=-1,\cdots,-m$，方程(48)没有提供任何附加信息，因为这些情况是 k 为正值的那些情况的复数共轭。

现在我们来证明，相应于(48)的齐次方程组，即 $\xi(k)\equiv 0$，只有一个零解。因为方程(48)的个数与未知参数的数目一致，故(48)有一非退化的矩阵，其解是唯一的。

因此我们必须证明，如果

$$\xi(k)\equiv 0 \qquad |k|\leqslant m \tag{49}$$

则

$$\widetilde{\rho}_0=0 \qquad \widetilde{\rho}_j=\widetilde{\omega}_j=0 \qquad j=1,\cdots,m \tag{50}$$

正如上面在第三节中所证明的，参数 ρ_0 和 $\rho_0(\varepsilon)$ 分别是矩阵 B 和 $\widehat{B}$ 最小的本征值。大家知道(Gelfand, 1966)

$$\widetilde{\rho}_0=\sum_{k,j=0}^{m}p_k p_j^*\xi(k-j) \tag{51}$$

其中 $p_0,\cdots,p_m$ 是相应于本征值 ρ 的 B 的归一化本征矢量的各个分量。因此如果 $\xi(k)\equiv 0$，我们由(51)得到 $\widetilde{\rho}_0=0$。现在方程组(48)有如下形式：

$$\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\rho}_j\exp(i\omega_j k)+ik\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\omega}_j\rho_j\exp(i\omega_j k)=0 \quad |k|\leqslant m \tag{52}$$

$2m$ 个函数

$$\begin{matrix}f_j(k)=k\exp(i\omega_j k) \\ g_j(k)=\exp(i\omega_j k)\end{matrix} \quad j=1,\cdots,m \tag{53}$$

是常系数的 $2m$ 阶线性差分方程

$$L(S)f(k)=0 \qquad |k|\leqslant m \tag{54}$$

的线性独立解(见Gelfand, 1959),其中 S 为位移算符

$$Sf(k)=f(k+1)$$

$L(S)$是 $2m$ 阶的差分算符:

$$L(S)=\prod_{j=1}^{m}[S-\exp(i\omega_j)]^2 \tag{55}$$

因为函数(53)是线性独立的,并且在(52)中方程的数目大于差分方程的阶数,所以(52)只有零解(50)—这就是我们要证明的。

对于 $k=0,1,\cdots,m$,我们现在把方程(48)分成实部和虚部:

$$\begin{aligned}&\widetilde{\rho_0}\delta(k)+\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\rho_j}\cos(\omega_j k)-k\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\omega_j}\rho_j\sin(\omega_j k)=\mathrm{Re}\xi(k) \quad k=0,1,\cdots,m\\&\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\rho_j}\sin(\omega_j k)+k\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\omega_j}\rho_j\cos(\omega_j k)=\mathrm{Im}\xi(k) \quad k=1,\cdots,m\end{aligned} \tag{56}$$

为了把这写成矢量形式,引入未知参数的列矢量 $\boldsymbol{x}$。$\boldsymbol{x}$ 的诸分量为:

$$\left.\begin{aligned}&x_0=\widetilde{\rho_0},\cdots,x_m=\widetilde{\rho_m}\\&x_{m+1}=\widetilde{\omega_1},\cdots,x_{2m}=\widetilde{\omega_m}\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

类似地,我们引入(56)右方部分的列矢量 $\underline{\xi}$,其分量为

$$\left.\begin{aligned}&\xi_0=\xi(0),\ \xi_1=\mathrm{Re}\xi(1),\ \cdots,\xi_m=\mathrm{Re}\xi(m)\\&\xi_{m+1}=\mathrm{Im}\xi(1),\cdots,\ \xi_{2m}=\mathrm{Im}\xi(m)\end{aligned}\right\} \tag{58}$$

用 D 记方程组(56)的矩阵:

$$D=\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}1&1&\cdots&1&0&\cdots&0\\\hline 0&\cos\omega_1&\cdots&\cos\omega_m&-\rho_1\sin\omega_1&\cdots&-\rho_m\sin\omega_m\\\vdots&\vdots&&&\vdots&&\\0&\cos m\omega_1&\cdots&\cos m\omega_m&-m\rho_1\sin m\omega_1&\cdots&-m\rho_m\sin m\omega_m\\\hline 0&\sin\omega_1&\cdots&\sin\omega_m&\rho_1\cos\omega_1&\cdots&\rho_m\cos\omega_m\\\vdots&\vdots&&&\vdots&&\vdots\\0&\sin m\omega_1&\cdots&\sin m\omega_m&m\rho_1\cos m\omega_1&\cdots&m\rho_m\cos m\omega_m\end{array}\right) \tag{59}$$

于是方程组(56)可写成

$$D\boldsymbol{x}=\underline{\xi} \tag{60}$$

根据已经证明了的, $\det D\neq 0$。因而方程(60)的解可写成

$$\boldsymbol{x}=D^{-1}\underline{\xi} \tag{61}$$

其中 D^{-1} 是 D 的逆。由(61)我们可以求得 $\boldsymbol{x}$ 诸分量的各阶统计矩,特别是它们的平均值矢量 $\boldsymbol{b}$ 和它们的协方差矩阵 W

$$\boldsymbol{b}=E\boldsymbol{x}=D^{-1}E\underline{\xi}=D^{-1}\boldsymbol{a},$$

其中

$$\begin{aligned}&b_j=E\widetilde{\rho_j}\\&b_0=E\rho_0 \qquad\qquad j=1,\cdots,m\\&b_{m+j}=E\widetilde{\omega_j}\end{aligned} \tag{62}$$

$$W=E(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^*=ED^{-1}(\underset{\sim}{\xi}-\boldsymbol{a})(\underset{\sim}{\xi}-\boldsymbol{a})^*(D^{-1})^*=D^{-1}\sum(D^{-1})^* \tag{63}$$

其中星号表示复数共轭矩阵或矢量，$\boldsymbol{a}$ 和 $\sum$ 按(40)和(41)定义。因此被扰动参数的近似平均值为

$$\left.\begin{aligned} E\rho_j(\varepsilon)&\approx\rho_j+\varepsilon E\widetilde{\rho_j}=\rho_j+\varepsilon b_j & j&=0,\cdots,m\\ E\omega_j(\varepsilon)&\approx\omega_j+\varepsilon E\widetilde{\omega_j}=\omega_j+\varepsilon b_{m+j} & j&=1,\cdots,m\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

被扰动参数的协方差矩阵为 ε^2W。

对于实际使用，知道在(45)和(46)中被忽略的 ε^2 项有多大是很重要的。把(45)和(46)代入(43)并使 ε^2 的系数相等，我们便得到二次修正量$\widetilde{\widetilde{\rho_j}}$和$\widetilde{\widetilde{\omega_j}}$的方程组：

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\rho_0}}\delta(k)+\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\widetilde{\rho_j}}\exp(i\omega_jk)+ik\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\widetilde{\omega_j}}\rho_j\exp(i\omega_jk)\\ =\sum_{j=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\rho_j(\widetilde{\omega_j}k)^2-ik\widetilde{\rho_j}\widetilde{\omega_j}\right]\exp(i\omega_jk)\end{aligned}\qquad |k|\leqslant m \tag{65}$$

它只是右方不同于(48)，所以方程组(65)总是有唯一解。我们看到，$\widetilde{\widetilde{\rho_j}}$和$\widetilde{\widetilde{\omega_j}}$是噪声 $\xi(k)$ 的二次泛函。如果已知$\xi(k)$的三阶矩和四阶矩，按推导（63）和（64）相同的方法就可以求得 $E(\widetilde{\widetilde{\rho_j}})^2$和$E(\widetilde{\widetilde{\omega_j}})^2$。如果

$$\left.\begin{aligned} E(\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\rho_j}})^2&\ll E(\varepsilon\widetilde{\rho_j})^2 & j&=0,1,\cdots m\\ E(\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\omega_j}})^2&\ll E(\varepsilon\widetilde{\omega_j})^2 & j&=1,\cdots,m\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

则在(45)和(46)中二次修正量可以忽略，线性近似(47)是合理的。

当在 $B(k)$的表示式(15)中 $r<m$ 时，被扰动函数$\widehat{B}(k)$ 的相应表示式一般仍然包含 m 个谐波；也就是说将出现有虚假的振幅和频率的 $m-r$ 个假谐波，它们的幅度有 ε 的量级。在这种情况下，扰动的统计分析要困难得多，因为即使对于$\widetilde{\rho_j}$和$\widetilde{\omega_j}$，方程组也是非线性的。

对于这种情况，用一种粗糙的简化方法是有其价值的：如果我们发现在(15)中有 $m-r$个振幅 $\rho_j(\varepsilon)$有 ε 的量级，则有可能取被扰动协方差函数长为 $2r$ 而不是原来长为 $2m$ 的截段，并象上面那样进行扰动分析。

我们注意到，为了在实践中用(63)和(64)，必须知道矩阵 D，而它则依赖于真实未知参数 ρ_j 和 ω_j。实际上，我们通常把由数据得到的被扰动了的参数 $\rho_j(\varepsilon)$和 $\omega_j(\varepsilon)$代入矩阵 D。这种方法的可行性在于这样一个事实：被扰动的矩阵 $D(\varepsilon)$，即在 ρ_j 和 ω_j 位置代以 $\rho_j(\varepsilon)$和 $\omega_j(\varepsilon)$的矩阵，与真实矩阵 D 只是差一个阵元大小为 ε 量级(对于充分小的 ε)的矩阵。当然，还是必须小心，当某些频率 ω_i,ω_j靠得很近或当噪声不小的时候更是如此。估计 $D(\varepsilon)$中ε的线性项，即认为

$$D(\varepsilon)=D+\varepsilon\widetilde{D}+\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{D}}+\cdots$$

然后证明这一项可以忽略将是可能的，但在此我们不这样做了。

对于实的协方差函数的情况，我们类比于(48)，(59)及(65)把方程写出来。这些方程稍稍不同于那些复表示式，但所有的证明和讨论几乎与复数的情况完全一样。

假设在(17)中，$p=m/2$，$\omega_j\neq 0$及$|\omega_j|<\pi$。对于(48)我们有

$$\widetilde{\rho}_0\delta(k)+2\sum_{j=1}^{m}\widetilde{\rho}_j\cos(\omega_j k)-2k\sum_{j=1}^{p}\widetilde{\omega}_j\rho_j\sin(\omega_j k)=\xi(k)\qquad |k|\leqslant m=2p \tag{67}$$

矩阵D的形式为

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\cos\omega_1 & \cdots & 2\cos\omega_p & -2\rho_1\sin\omega_1 & \cdots & -2\rho_{p1}\sin\omega_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2\cos p\omega_1 & \cdots & 2\cos p\omega_p & -2\rho_1\sin p\omega_1 & \cdots & -2\rho_{p1}\sin p\omega_p \\ 0 & 2\cos(p+1)\omega_1 & \cdots & 2\cos(p+1)\omega_p & -2(p+1)\rho_1\sin(p+1)\omega_1 & \cdots & -2(p+1)\rho_p\sin(p+1)\omega_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2\cos 2p\omega_1 & \cdots & 2\cos 2p\omega_p & -4p\rho_1\sin 2p\omega_1 & \cdots & -4p\rho_p\sin 2p\omega_p \end{pmatrix} \tag{68}$$

对于(58)我们有

$$\xi_k=\xi(k)\qquad k=0,1,\cdots,2p \tag{69}$$

对于(40)和(41)我们有

$$E\xi(k)=a_k\qquad k=0,1,\cdots,2p \tag{70}$$

$$E[\xi(k)-a_k][\xi(j)-a_j]=\sigma(k,j)\quad k,j=0,1,\cdots,2p \tag{71}$$

矩阵Σ的元素为$\sigma(k,j),k,j=0,\cdots,2p$。作了这些改变后，方程(60)—(64)成立。对于(65)，我们有方程组

$$\sum_{j=1}^{p}\left[\widetilde{\widetilde{\rho}}_j\cos(\omega_j k)-k\widetilde{\widetilde{\omega}}_j\rho_j\sin(\omega_j k)\right]=\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{1}{2}\rho_j(k\widetilde{\omega}_j)^2\cos(\omega_j k)+\widetilde{\rho}_j\widetilde{\omega}_j k\sin(\omega_j k)\right]$$
$$k=0,1,\cdots,2p \tag{72}$$

微扰法应用实例 假设

$$B(k)=\rho_0\delta(k)+\rho_1\exp(i\omega_1 k)\qquad |k|\leqslant 1 \tag{73}$$

矩阵D和D^{-1}为

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\omega_1 & -\rho_1\sin\omega_1 \\ 0 & \sin\omega_1 & \rho_1\cos\omega_1 \end{bmatrix}$$
$$D^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega_1 & -\sin\omega_1 \\ 0 & \cos\omega_1 & \sin\omega_1 \\ 0 & -\rho_1^{-1}\sin\omega_1 & \rho^{-1}\cos\omega_1 \end{bmatrix} \tag{74}$$

我们进一步假定$\xi(k)$为一复高斯过程：

$$E\xi(0)=E\xi(1)=0$$
$$E\xi^2(0)=\sigma^2\qquad E\xi(0)\xi^*(1)=0$$
$$E[\mathrm{Re}\,\xi(1)]^2=E[\mathrm{Im}\,\xi(1)]^2=\sigma^2$$
$$\Sigma=\begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

由(62)我们有

$$E\widetilde{\rho}_0=E\widetilde{\rho}_1=E\widetilde{\omega}_1=0$$

由(63)我们有

$$\varepsilon^2 W=\varepsilon^2 D^{-1}\sum(D^{-1})^*=\varepsilon^2\sigma^2\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \rho_1^{-2}\end{bmatrix} \tag{75}$$

现将参数 ρ_0, ρ_1 和 ω_1 的下列数值代入：

$$\rho_0=1, \rho_1=10, \omega_1=\pi/4,\ \ B(0)=11,\ \ B(1)=10(1+i)/2^{1/2}=7.07+i7.07$$

我们假定 $\varepsilon^2\sigma^2=0.01$ 并取噪声值

$$\varepsilon\xi(0)=-0.1 \qquad \varepsilon\xi(1)=0.03-0.07i$$

于是所观察到的被扰动的协方差 $\widehat{B}(k)$ 为：

$$\widehat{B}(0)=10.9 \qquad \widehat{B}(1)=7.1+7i$$

利用上面第二节的算法，我们求得

$$\rho_0(\varepsilon)=10.9-\sqrt{99.41}\approx 0.9295$$

$$\exp[i\omega_1(\varepsilon)]=\frac{7.1+7i}{99.41}\omega_1(\varepsilon)\approx\frac{1}{4}\pi-0.007$$

$$\rho_1(\varepsilon)=\sqrt{99.41}\approx 9.97$$

由(75)我们有

$$E[\rho_0(\varepsilon)-\rho_0]^2=2\varepsilon^2\sigma^2=0.02$$

$$E[\rho_1(\varepsilon)-\rho_1]^2=\varepsilon^2\sigma^2=0.01$$

$$E[\omega_1(\varepsilon)-\omega_1]^2=\frac{\varepsilon^2\sigma^2}{\rho_1^2}\approx\frac{\varepsilon^2\sigma^2}{\rho_1^2(\varepsilon)}=10^{-4}$$

现在我们来估计二次修正 $\varepsilon^2\tilde{\tilde{\rho}}_0$，$\varepsilon^2\tilde{\tilde{\omega}}_1$ 及 $\varepsilon^2\tilde{\tilde{\rho}}_1$。

方程(65)的形式为

$$\tilde{\tilde{\rho}}_0+\tilde{\tilde{\rho}}_1=0$$

$$\tilde{\tilde{\rho}}_1\cos\omega_1-\tilde{\tilde{\omega}}_1\rho_1\sin\omega_1=\frac{1}{2}\rho_1\tilde{\omega}_1^2\cos\omega_1+\tilde{\rho}_1\tilde{\omega}_1\sin\omega_1$$

$$\tilde{\tilde{\rho}}_1\sin\omega_1+\tilde{\tilde{\omega}}_1\rho_1\cos\omega_1=\frac{1}{2}\rho_1\tilde{\omega}_1^2\sin\omega_1-\tilde{\rho}_1\tilde{\omega}_1\cos\omega_1$$

因此我们求得

$$\tilde{\tilde{\rho}}_0=-\frac{1}{2}\rho_1\tilde{\omega}_1^2 \qquad \tilde{\tilde{\rho}}_1=\frac{1}{2}\rho_1\tilde{\omega}_1^2 \qquad \tilde{\tilde{\omega}}_1=\frac{-\tilde{\rho}_1\tilde{\omega}_1}{\rho_1}$$

由(75)我们有

$$\left.\begin{aligned}
&E(\varepsilon^2\tilde{\tilde{\rho}}_0)^2=\frac{1}{4}\varepsilon^4 E\tilde{\omega}_1^4=\frac{3\varepsilon^4\sigma^4}{4}\rho_1^{-4}\approx 7.5\times 10^{-9}\\
&E(\varepsilon^2\tilde{\tilde{\rho}}_1)^2=7.5\times 10^{-9}\\
&E(\varepsilon^2\tilde{\tilde{\omega}}_1)^2=\frac{\varepsilon^4\sigma^4}{\rho_1^4}=10^{-8}
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

及

$$\left.\begin{aligned} E(\varepsilon\widetilde{\rho_0})^2 &= 2\varepsilon^2\sigma^2 = 0.02 \\ E(\varepsilon\widetilde{\rho_1})^2 &= \varepsilon^2\sigma^2 = 0.01 \\ E(\varepsilon\widetilde{\omega_1})^2 &= \frac{\varepsilon^2\sigma^2}{\rho_1^2} = 10^{-4} \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

将(77)与(76)比较，我们看到在这种情况下二次修正 $\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\rho}}_0$, $\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\rho}}_1$ 和 $\varepsilon^2\widetilde{\widetilde{\omega}}_1$ 都比线性修正小得多，因此可以忽略。

结　论

我们所描述的由协方差函数的有限截段恢复谐波的方法可用于谱函数含有跃变或不连续性的非各态历经过程的情况。协方差函数中诸谐波的振幅 ρ_j 就是经过系综平均了的过程的谐波平方幅度本身。然而，这种方法也可用于在实际上经常碰到的一种不同的情况，即当所观察到的时间序列 $x(k)$ 包含某些振幅和频率未知(但不是随机)的确定分量加在有连续谱的随机分量上的情况。在此情况下，由过程的单次实现所得的样本协方差函数将包含同样的那些谐波，但又迭加上一些由于该实现的长度有限而引起的成分。可以把这些迭加物认为是噪声，因为它们随着实现的长度增加而减小。

这就使我们提出把这里所描写的方法应用于'隐藏着的周期性'的问题(譬如见 Whittle, 1952 或 Serebrennikov 和 Pervozvansky, 1965)。这个问题是这样的：观察到时间序列 $x(k)$

$$x(k) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \exp[i\omega_j k + i\phi_j] + n(k) \qquad |k| \leqslant T$$

其中 $n(k)$ 是噪声分量。问题是要估计谐波的振幅 γ_j，频率 ω_j 或许还有相位 ϕ_j。把现在的方法用于这个问题就要计算样本协方差函数：

$$\widehat{B}(k) = (2T+1)^{-1} \sum_{j=-T+k}^{T} x(j)x^*(j-k) \qquad |k| \leqslant m, m \ll T$$

然后如上所述用长 $2m$ 的 $\widehat{B}(k)$ 的样本。在用 $\widehat{B}(k)$ 而不用 $x(k)$ 时，我们当然损失了相位信息，但在确定了频率 ω_j 之后，相位 ϕ_j 就很容易从 $x(k)$ 用标准的最小二乘法求得了。

当然，隐藏的周期性问题可用其本身而无需用协方差函数分析来处理(其讨论见 Pisarenko, 1973)。但是这里所提出的方法的作用在于，它能够利用高速数字计算机一次确定出几十个谐波来。

这里所描述的方法对于在连续谱上分辨谱峰的问题也许也是有用的；对于这种问题无需求离散谐波的极限情况，但我们的新方法提供了一种减小由最大熵谱估计法引起的'平滑'。

附　录

我们来证明在上面第一节中所述的定理。考虑函数 $\phi_m(\lambda-\lambda_0)$：

$$\begin{aligned} \phi_m(\lambda-\lambda_0) &= \sum_{k,j=0}^{m} g_{k-j} \exp[i(\lambda-\lambda_0)(k-j)] \\ &= \sum_{k=-m}^{m} g_k(m+1-|k|)\exp[i(\lambda-\lambda_0)k] \end{aligned} \tag{78}$$

其中 $g_k = g^*_{-k}$ 是下面规定的某些复数。我们有

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}[w(\lambda-\lambda_0)-\phi_m(\lambda-\lambda_0)]dF(\lambda)$$
$$+(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda) \tag{79}$$

首先我们计算(79)右方的第一项；为此我们设

$$g_k=\frac{w_k}{m+1-|k|} \qquad |k|\leqslant m \tag{80}$$

其中 w_k 为函数 $w(\lambda)$ 的付里叶系数：

$$w_k=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} w(k\lambda)\exp(-ik\lambda)d\lambda \tag{81}$$

由(78)看到 $\phi_m(\lambda-\lambda_0)$ 代表函数 $w(\lambda-\lambda_0)$ 的 m 阶付里叶和。因为我们假定过 $w(\lambda)$ 的 r 阶导数存在(其中 $r\geqslant 1$)，且 $|w^{(r)}(\lambda)|\leqslant K$，故对于付里叶和 $\phi_m(\lambda-\lambda_0)$ 与其生成函数 $w(\lambda-\lambda_0)$ 之差可作如下估计：

$$\max_{\lambda}|w(\lambda-\lambda_0)-\phi_m(\lambda-\lambda_0)|\leqslant Km^{-r}[(4/\pi^2)\log(m+1)+4] \tag{82}$$

(见 Achiezer, 1965)。如果 $m\to\infty$，(79)右方第一项趋于零。因此第二项趋于左方的积分，即当 $m\to\infty$，

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)\to(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda) \tag{83}$$

(83)左方的积分可写成

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_m(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{k=-m}^{m}w_k\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i(\lambda-\lambda_0)k]dF(\lambda)$$
$$=\sum_{k=-m}^{m}w_k\exp(-i\lambda_0k)B^*(k) \tag{84}$$

把(84)代入(79)并利用(82)，最后我们得到

$$\left|(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}w(\lambda-\lambda_0)dF(\lambda)-\sum_{k=-m}^{m}w_k\exp(-i\lambda_0k)B^*(k)\right|\leqslant KB(0)m^{-r}[(4/\pi^2)\log(m+1)+4]$$

这就是要证明的。

(陶笃纯译　黄曾旸校)

参 考 文 献

[1] N. Achiezer, Lessons on approximation theory, Nauka, Moscow (in Russian), 1965.

[2] J. P. Burg, "The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra", Geophysics, 37, 375-376, 1972.

[3] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber analysis", PIEEE, 57, 1408-1418, 1969.

[4] J. Doob, "Stochastic processes", John Wiley & Sons, New York, 1953.

[5] I. Gelfand, Lessons on linear algebra, Nauka, Moscow (3rd edition; in Russian), 1966.

[6] A. Gelfond, Calculus of differences, Fizmatgiz, Moscow (in Russian), 1959.

[7] U. Grenander & G. Szegö, Toeplitz forms and their applications, Berkeley, Univ.

of Calif. Press, 1958.

[8] G. Jenkins & D. Watts, Spectral analysis and its applications, Holden-Day, San Francisco, 1969.

[9] R. Lacoss, "Data-adaptive spectral analysis methods", Geophysics, 37, 661-675, 1971.

[10] E. Parzen, "Multiple time series modeling", p.389-409, in Multivariate Analysis II, ed. P. R. krishnaiah, Academic Press, New York, 1969.

[11] V. F. Pisarenko, "On the estimation of spectra by means of non-linear functions of the covariance matrix", Geophys. J. R. Astr. Soc., 28, 511-531, 1972.

[12] V. F. Pisarenko, On the determination of hidden periodicities, Vychislitel'-naya Seismologiya, vol.6, 1973.

[13] M. Serebrennikov & A. Pervozvansky, The determination of hidden periodicities, Nauka, Moscow (in Russian), 1965.

[14] C. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell. Syst. Tech. J., 27, 379-423, and 623-656, 1948.

[15] T. J. Ulrych, "Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids", J. Geophys. Res., 77, 1396-1400, 1972.

[16] P. Whittle, "The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure", Trabajos de Estadistica, 3, 43-57, 1952.