带限信号外推法*

J. A. Cadzow

（美国弗吉尼亚州立大学电气工程系）

一、前　　言

描述在无限时间区域 $(-\infty,\infty)$ 内信号 x 的固有特征的经典方法是付里叶分析。具体地说，这样的分析一开始就要计算付氏积分变换：

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1}$$

式中ω为数值可在$(-\infty,\infty)$内变化的实频率。与信号x相关联的付氏频谱定义为幅度$|X(\omega)|$，它作为ω的函数的变化特性经常产生有关信号x的有用信息。从概念上来说，这个积分变换的计算是简单明了的，它的实用性也是众所周知的。

然而，在实际应用中必须了解到，只能得到作变换的信号的有限时间观察即$x(t)$的值仅在属于某一"观察一时间"集Λ的t时间内才是已知的，这个Λ有一个非零但有限的测度。这个观察时间集是无限时间间隔的子集，其典型情况是一个简单的有限间隔，如(t_0,t_1)。显然，只给定下式确定的信号x的部分特性是不能计算付氏积分变换(1)式的：

$$x(t) \qquad 当\ t\in\Lambda \tag{2}$$

因此，在这样的实际情况中，就需要应用基于这部分信息得到付氏变换的好的估计。为了达到满意的估计，已提出了各种方法，大体上这些方法假设Λ是在有限范围里，并且通常为以下三种类型之一：

1. 周期图　信号$x(t)$的已知的有限时间段乘以一个窗函数$w(t)$，然后确定有限时间乘积$w(t)x(t)$的付氏变换(见文献〔1〕和〔10〕)。
2. 预测滤波　确定阶数固定的一个线性数字滤波器的系数，该滤波器能产生采样的有限时间段信号的最佳的一步预测。这样得到的滤波器用于估计信号谱。这个方法包含了本质上等价的最大熵法和自回归方法(见〔2〕和〔12〕)。
3. 外推法　在这个方法中，应用合适的外推法规则，扩展信号的有限时间段(见〔6〕和〔11〕)。

在这篇文章里，我们将着手于发展一个外推带限信号的有限时间段的系统的方法。若信号x的能量是有限的，同时它的付氏变换在频率集合Ω之外恒等于零(Ω具有非零但有限的范围)，即

$$X(\omega)\equiv 0 \qquad \omega\notin\Omega \tag{3}$$

则我们说信号x是带限的。在典型的情况中，集Ω是ω轴上的一个单区间(如低通信号)或者是有限个区间的集合(如带通信号)。

* "An Extrapolation Procedure for Band-Limited Signals", IEEE ASSP-27, No.1, 1979.

最近，提出了一个外推低通带限信号的算法(见〔16〕和〔11〕)。它实质上是顺序地应用一组信号运算来产生一个近似序列，在理论上保证了后者收敛到所要求的外推值。可惜，当这个方法用数字来实现时，需要截断近似信号的范围，而实际上信号的范围是无限的。因此，数值算法不需要收敛到所要求的解，虽然已发表的经验证明给出了保证。事实上，这个算法是值得注意的 Youla 普遍交错正交投影算法的特殊情况[15]。

下面，我们要处理关于外推观察信号(2)的更一般的问题，其中已知信号(2)在(3)式的意义上是带限的。将介绍一种保证收敛的实现所求的外推的迭代法。此外，这个算法可以作数值近似而不引进以前所述的不希望有的区域截断，因此提供了一个性能比较好的算法。更重要的是提供了一个用一步法获得所求的外推的有效方法。这种一步法可以减轻慢收敛速度的影响。

二、外推问题

下面，我们感兴趣的是一组具有有限能量且定义在无穷大时间轴上的信号。如果积分表达式$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt$是有限的，则信号 x 可看作是含有有限能量的，此式中 x^* 是 $x(t)$ 的复共轭，积分是在 Lebesgue 的意义上进行的。事实上，这组信号连同下述标准内积组成Hilbert空间，它用 L_2 来表示：

$$\langle x_1, x_2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt \tag{4}$$

如果信号 x 包含在 Hilbert 空间 L_2 里，众所周知，用表达式(1)所定义的信号的付氏变换是存在的。进一步，信号 x 能借助于反付氏变换积分从它的付氏变换来复原，这积分为：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5}$$

信号理论的大部分取决于将给定信号分解为许多分量，这些分量的付氏变换占据频谱的不同部分。为了说明这个分解的效果，让我们来考虑上述的带限频率集 Ω，Ω 有非零但有限的范围。这个 Ω 典型地等同于我们在应用中感兴趣的 x 的频谱分量。现在我们把反付氏变换积分分解为：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega\notin\Omega} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = x_1(t) + x_2(t) \tag{6}$$

式中第一个积分表示信号$x_1(t)$，第二个积分表示信号 $x_2(t)$。

应用这个信号分解后，显然，分量信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$的付氏变换对于所有 $\omega\notin\Omega$和 $\omega\in\Omega$ 分别恒等于零。这又意味着在 $\langle x_1, x_2\rangle = 0$ 的意义上分量信号 x_1 和x_2是"正交的"。为了建立这种特性，我们引进"理想带限"滤波器的传递函数，它对应于集 Ω并定义为：

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & 当\ \omega\in\Omega \\ 0 & 当\ \omega\notin\Omega \end{cases} \tag{7}$$

我们取(6)式的付氏变换并根据$H(\omega)$的定义有：

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = H(\omega)X(\omega) + [1 - H(\omega)]X(\omega) \tag{8}$$

显然，由于$H(\omega)$的结构，$X_1(\omega)X_2^*(\omega)$的乘积恒等于零。这个事实连同 Parseval 恒等式，后者表示为：

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t)dt$$

或等价地用内积表示法：

$$\langle X_1, X_2\rangle = 2\pi\langle x_1, x_2\rangle \tag{9}$$

建立了分量信号 x_1 和 x_2 的正交性。这个正交特性在许多信号分析研究中是最重要的。

由此确定了包含在 Hilbert 空间 L_2 里的每个信号能唯一地分解为两个信号之和，其中一个信号的付氏变换对于给定的集 Ω 之外的 ω 恒等于零，另一个信号的付氏变换对于给定的集 Ω 之内的 ω 恒等于零。此外，经过这种处理的分量信号 x_1，x_2 总是正交的。根据这一点，显然 Hilbert 空间 L_2 可以分解成特定的直接和(见[8])

$$L_2 = B_\Omega \oplus B_\Omega^{\perp} \tag{10}$$

这里 $B_\Omega^{\perp}$表示 L_2的子空间，它的分量与下述带限子空间正交：

$$B_\Omega = \{x \in L_2 : X(\omega) \equiv 0 \quad 当\ \omega \notin \Omega\} \tag{11}$$

这个直接和的分解在很多使用分量信号的信号处理应用中是值得注意的，这些信号分量包含在(或近似地包含在)如表达式(11)所给定的带限子空间内。在这类情况中，下面的外推问题是令人感兴趣的。

外推问题　　给定信号$x \in B_\Omega^{\perp}$ 的时间截断形式如下式：

$$x(t) \qquad 当\ t \in \Lambda$$

确定在观察时间集 Λ以外的 $x(t)$的行为。

在这个问题里，两个特征集 Λ 和 Ω 各自取有限但非零的范围。这个外推问题的解是用引进两个投影算子来找到的。

三、主要的正交投影算子

为了对外推问题给出一个所需要的代数结构，考虑正交投影算子是有益的。如果线性算子P是幂等的，即对于所有$x \in X$，有$Px^2 = Px$，则P可以被认为是在矢量空间X 的投影算子。进一步，若这个投影算子的作用区域和零空间是正交的[即$\langle x, y\rangle = 0$，对于所有 $x \in N(P)$和 $y \in R(p)$]，则它是正交的。根据这个基本定义，我们将引入两个正交投影算子，它们将在我们的外推法研究中起核心作用。

时间截断算子 T

基本的时间截断算子 T的引入是由上面所说的观察时间集 Λ引起的。如果这个算子作用到输入信号 x 上，那么就产生输出信号 y，记为

$$y = Tx \tag{12a}$$

式中 y 在时间 t 时的值由下式确定：

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & 当\ t \in \Lambda \\ 0 & 当\ t \notin \Lambda \end{cases} \tag{12b}$$

显然，这个时间截断算子是线性的，它的作用区域和零空间形式为：

$$R(T) = \{x \in L_2 : x(t) \equiv 0 \qquad 当\ t \notin \Lambda\}$$

及

$$N(T) = \{x \in L_2 : x(t) \equiv 0 \qquad 当 t \in \Lambda\}$$

由(12)式很显然看到，当所有的 $x \in L_2$ 时，有 $T^2x = Tx$。这确定了T 是一个投影算子。此外，

由于子空间 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的元素之间的内积显然为零，所以这些子空间是正交的。因此我们确定，时间截断算子是正交投影算子，从而基本的信号空间能分解为直和式：

$$L_2=R(T)\oplus R(T)^{正} \tag{13}$$

其中，$R(T)^{正}=N(T)$ 表示正交于 $R(T)$ 的子空间。这个直和的分解意味着任何信号 $x\in L_2$ 都能唯一地表示为 $x=x_1+x_2$，其中单独的分量 $x_1\in R(T)$，和 $x_2\in R(T)^{正}$。此外，这些分量是由正交投影运算产生的：$x_1=Tx$ 和 $x_2=(I-T)x$，式中 I 表示单位算子。

带限算子 B

第二种被考虑的正交投影算子是由在 L_2 里的一个一般信号的付氏变换分解（如(8)式表示的）引起的。具体地说，由 $H(\omega)X(\omega)$ 和 $[1-H(\omega)]X(\omega)$ 确定的信号 $X(\omega)$ 的单独分量分别包含在闭合的子空间 B_Ω 和 $B_\Omega^{正}$ 里。在时域里，分量 $x_1\in B_\Omega$ 由下式给出：

$$x_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{14}$$

式中描写线性卷积运算的单位脉冲响应是理想带限滤波器传递函数（7）的反付氏变换，其形式如下：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega}e^{i\omega t}d\omega \tag{15}$$

我们希望用算子符号表示(14)式，以便为外推问题给出一个代数结构式，根据这个想法，写出下式：

$$x_1=Bx \tag{16}$$

式中 B 表示由卷积关系式(14)所确定的理想带限滤波器运算。为了确定 B 是投影算子，我们用了对于所有的 ω 有 $H^2=H(\omega)$ 的事实，得到，当所有 $x\in L_2$ 时，$B^2x=Bx$。此外，由下式给出这个投影算子的作用区域和子空间是正交的：

$$R(B)=\{x\in L_2:X(\omega)\equiv 0 \quad 当\omega\notin\Omega\}$$
$$N(B)=\{x\in L_2:X(\omega)\equiv 0 \quad 当\omega\in\Omega\}$$

这可以用 Parseval 的恒等式（9）来证明。因此，理想带限算子 B 是正交投影算子，它的作用区域空间等同于带限子空间 B_Ω。这并不是偶然的巧合，因为算子 B 就是有意这样规定的，以便实现这个目的。我们感兴趣地注意到，这个理想带限算子还为基本信号空间提供了另一个直和的分解：

$$L_2=R(B)\oplus R(B)^{正}$$

式中 $R(B)^{正}=N(B)$。因此，任何信号 $x\in L_2$ 都能唯一地分解为在 $R(B)$ 和 $R(B)^{正}$ 的信号之和。这个分解是通过运算 $x=Bx+[I-B]x$ 来实现的，式中 $Bx\in R(B)$，$[I-B]x\in R(B)^{正}$。

四、外推算法

现在将提出一个算法，它已被证明对于完成信号的外推运算是有效的。具体地说，给定包含在子空间 B_Ω 里的一个信号 x 的时间截断形式，用算符表示为：

$$y=Tx \tag{17}$$

我们将推导出由给定的 y 产生信号 x〔即(17)式的反关系〕的迭代方法。这个算法的推导起始于基本的信号恒等式：

$$x=(I-BT)x+By \tag{18}$$

可以看出，此式适合于所有用表达式(17)相联系的信号 x 和 y。下面，我们将不在最初时假设 $x\in B_\Omega$，虽然这样可能引起限制。

于是，外推问题可以重新表示为寻找"定点"x；在只给定它的时间截断映象 y(即给定Tx)时，x 将满足算子关系式(18)。为了找到这个定点，我们将用逐次近似的经典原则。由此得到迭代关系：

$$x_n=(I-BT)x_n+B(Tx) \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{19}$$

式中 x_n 表示对于 x 的第 n 次近似值，x_0 是初始近似值，同时我们用它的等价表示式Tx来代替时间截断信号 y。为了确定在什么条件下这个算法将产生一个收敛到所要求的结果 x 的序列$\{x_n\}$，研究一下误差信号是有益的。在第 n 步迭代中，关系式(19)表明，误差信号由下式给出：

$$x_n-x=[I-BT](x_{n-1}-x) \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{20}$$

如果这个误差关系是累迭的，则很容易得到下式：

$$x_n-x=[I-BT]^n(x_0-x) \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots \tag{21}$$

由上式可知，下面的引理是一个必然的结果。

引理1 当且仅当

$$[I-BT]^n(x_0-x)\to\theta \tag{22}$$

由算式(19)产生的序列$\{x_n\}$收敛到 x，式中θ表示零信号。

现在我们来考虑建立关于初始近似值 x_0 的一个条件，它将保证满足(22)式的收敛要求。选择x_0使初始误差信号 x_0-x 包含在 B_Ω 里。下面两个条件都满足这种情况：1) x 和 x_0都在 B_Ω 内；或 2) x 和 x_0 的带外分量相等。无论哪一种情况，只要 $x_0-x\in B_\Omega$，就可以从(20)式得到，全体误差信号序列 $\{x_n-x\}$都包含在B_Ω内。这意味着(20)式可以等效地表示为：

$$x_n-x=B[I-T](x_{n-1}-x) \quad 当\ x_0-x\in B_\Omega \tag{23}$$

因为一般而言，不相同的算子$I-BT$和 $B[I-T]$事实上在限制域 B_Ω 内是恒等的。

对(23)式的研究表明，用标准内积$E_n=\langle x_n-x, x_n-x\rangle$来测量的第 n 步误差信号的能量总是小于或等于第 $n-1$步误差信号的能量（即 $E_n\leqslant E_{n-1}$，当 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）。这是下列事实的一个直接结果：组成关系式(23)的每个算子 $I-T$ 和 B 决不增加，而一般说来是要减少它们所作用的信号的能量的。因此，当初始近似值 x_0 选得使 $x_0-x\in B_\Omega$ 时，算式(19)总是产生一个近似信号序列$\{x_n\}$，近似误差的能量在每一次迭代中都减少，或在最坏情况下保持原样。有理由相信，误差信号序列 $\{x_n-x\}$ 使在$E_n\to 0$时，就确定了序列$\{x_n\}$收敛到 x。

为了确定近似序列事实上在 $x_0-x\in B_\Omega$ 时确实收敛到 x，我们来讨论 Von Neumann 的交错投影定理(见[9, p.55])。当这个定理应用于组合正交投影算子序列 $I-T$, $B[I-T]$, $[I-T]B[I-T]$, $B[I-T]B[I-T]\cdots\cdots$时，就产生了下面的定理。

定理1 当且仅当$x_0-x\in B_\Omega$时，近似误差信号序列$\{x_n-x\}$才收敛到零。

这是下述事实的推论：序列$\{[I-BT]^n(x_0-x)\}$和 $\{[B(I-T)^n](x_0-x)\}$在$x_0-x\in B_\Omega$时是恒等的。Von Neumann 定理用于后边的序列后表明，序列将收敛到由 x_0-x 正交投影到闭合子空间 $R(B)\cap R(I-T)$ 上而得到的信号。由于信号不能同时是带限和时限的，因此这个闭合子空间仅包含零信号，从而建立了条件 (22)。相反，若 $x_0-x\notin B_\Omega$，则正交投影将不是

零，意味着 $x_n \nrightarrow x$。

由此证明，当且仅当$x_0 - x \in B_\Omega$ 时，算法(19)产生所要求的外推（即 $x_n \to x$）。我们应看到，显然，当 $x_n \to x$ 时，x 并不需要包含在B_Ω里。如果我们设法知道 x 的带外分量，则取初始近似值 x_0 等于该分量，算法就会产生一个近似序列。不管 x 是否包含在 B_Ω 里，它都收敛到 x。遗憾的是确定这个带外分量一般是不可能的，因而我们必须适当地限制要外推的信号的类型。更特殊地是当我们感兴趣的信号类是带外分量总是为零的信号(即子空间B_Ω)时，只要 $x_0 \in B_\Omega$，算法将总是收敛的。现在将这个观察结果以引理的形式叙述如下。

引理 2　外推算式(19)将产生一个近似信号序列 $\{x_n\}$，这个序列将收敛到所要求的外推，只要信号 x 和它的初始近似值 x_0 都包含在子空间 B_Ω里。

五、算法的执行过程

所提出的外推算式(19)能保证收敛(即 $x_n \to x$)，只要初始近似值 x_0 保证 $x - x_0 \in B_\Omega$。在时域里，这个算式有下面等效的积分表示：

$$x_n(t) = x_{n-1}(t) + \int_{\tau \in \Lambda} h(t-\tau)[x(\tau) - x_{n-1}(\tau)]d\tau \tag{24}$$

式中固定时间 t 可取为任意实数。由于我们主要的目的是对固定的外推瞬时时间 $t^* \notin \Lambda$ 计算 $x(t^*)$(即完成外推)，所以现在将提出一个用算式(24)完成这个任务的有效方法。开始，我们在(24)式里设 $t = t^*$ 并观察到第 n 次外推近似值 $x_n(t^*)$取决于前一次的外推值$x_{n-1}(t^*)$ 和在所有 $t \in \Lambda$ 时 $x_{n-1}(t)$的行为。根据这个观察，建议在第 n步迭代中把算法的执行过程分成两个过程：

1) 对所有 $t \in \Lambda$，信号 $x_n(t)$是用算式(24)来计算的。

2) 第 n 次外推近似值 $x_n(t^*)$是用算式(24)并把 t 置于 $t^* \notin \Lambda$来计算的。

这个方法之所以合乎需要，是因为第一步的结果与 t^* 的选择完全无关。当我们企图在多于 1 个 t^*值的情况下外推信号时，这个方法具有明显的计算上的节省，因为第 n步迭代中最费力的工作是上述第一步。

算式(24)的计算一般需要对此合成积分作数值近似，任何数值积分方法都能用，例如矩形的或梯形的近似法(见[4])。明显的数值图解将显然地取决于观察时间集 Λ和带限集 Ω。为了减小在迭代过程中建立的任何数值误差，这个数值近似法必须小心地执行。

有必要指出，所提出的算式(24)只要求积分的计算在有限的范围 Λ之内进行，这一点与别的外推算法是不同的，后者在理论上要求在无穷范围$(-\infty, \infty)$内进行(见[11])。在别的方法中，这个实际困难是通过截断积分范围来避开的。这个积分范围的截断可能对算法的性能产生有害的影响。

六、一步外推法

虽然外推算法(19)已经保证收敛性，但其收敛速度在大多数实用情况下可能非常慢。考虑到这个因素，现在提出一个易处理的分析方法以得到更有效的外推法。首先，改写算式(19)的公式：

$$x_n = x_{n-1} + B[T(x - x_{n-1})] \tag{25}$$

此外，我们取初始近似值 x_0 为零(即$x_0=\theta$)。如果从 1 开始按关系式(25) 作迭代，显然，外推序列的一般元素由下式给出：

$$x_n = B\left[\sum_{k=0}^{n-1} T(x - x_k)\right] \qquad n=1,2,3,\cdots\cdots$$

然后，我们把(21)式代入这个表达式，并且应用$x_0=\theta$，就得到：

$$x_n = B\left[\sum_{k=0}^{n-1} T(I-BT)^k x\right]$$

利用很容易建立的算子恒等式$T[I-BT]^k=[I-TB]^kT$得到：

$$x_n = B\left[\sum_{k=0}^{n-1} (I-TB)^k Tx\right] \tag{26}$$

求和的表达式可以利用下述算子恒等式来表示成方便的解析形式：

$$\sum_{k=0}^{n-1} [I-TB]^k TBz = z - [I-TB]^n z \tag{27}$$

此式对于所有包含在 Hilbert空间 L_2 里的信号都成立。比较(26)和(27)式，显然，如果能找到一个信号 $z=R(T)$，它满足算子方程：

$$TBz = Tx \tag{28}$$

则表达式(26)简化成

$$x_n = Bz - B[I-TB]^n z \tag{29}$$

如果观察到的截断信号 Tx 是由带限信号 x(即 $x=Bx$)产生的，则在第四节中已经证明所提出的算法产生一个收敛到 x 的近似值序列。基于这一点，我们取表达式(29)在 $n\to\infty$ 时的极限来得到：

$$x = Bz \tag{30}$$

这个结果是下述事实的推论，即：如果(29) 式如假设那样收敛到 (28) 式的一个解，则序列$\{B[I-TB]^n z\}$必定收敛到$N(T)$的一个元素。然而，序列$\{B[I-TB]^n z\}$全包含在B_Ω中，因此它必定收敛到零信号，因为只有零信号才同时包含在B_Ω和$N(T)$中。

简言之，用这个一步法解这个外推问题决定于能否找到满足算子关系式(28)的有限能量信号$z\in R(T)$。如果存在这样一个解，则所需要的外推是用理想带限算子 B 作用于 z 来完成的[正如表达式(30) 所指出的]。在这个过程里最困难的工作是解算子关系式 (28)，它在时域上取形式：

$$\int_{\tau\in\Lambda} h(t-\tau)z(\tau)d\tau = x(t) \quad t\in\Lambda \tag{31}$$

式中 $h(t)$ 是 (15) 式所给出的理想带限滤波器的单位脉冲响应。该式被认为是一个具有核$h(t-\tau)$的第一类 Fredholm 积分方程。一旦得到算子关系式(31)的解，利用外推表达式(30)就能得到所求的外推。在时域这个外推表达式的形式是：

$$x(t^*) = \int_{\tau\in\Lambda} h(t^*-\tau)z(\tau)d\tau \tag{32}$$

其中 $t^*\notin\Lambda$是外推瞬时时间。

七、性能好的带限信号的类型

在我们感兴趣的实际情况中，理想带限滤波器传递函数(7)是 ω的偶函数。这意味着它

的作为积分方程(31)的核的付氏反变换是 t 的偶函数。由于这个核是对称的，因此有可能用合成线性算子TB的特征值—特征函数合并结构来描述积分方程(31)的解。具体地说，如果标量 λ 和信号 $\phi\in R(T)$满足算子表达式 $TB\phi=\lambda\phi$，或等价地在时域里有：

$$\int_{\tau\in\Lambda} h(t-\tau)\phi(\tau)d\tau=\lambda\phi(t) \qquad 当\ t\in\Lambda$$

则 λ 和 ϕ 可看作是与算子 TB 有关的特征值—特征函数对。

文献中提到许多关于这些特征值—特征函数对的代数结构的有趣特性（见[14], P.180—181)。特别令人感兴趣的是 Picard(见[5])证明的一个普遍定理。这个定理指出，当且仅当被观察信号 Tx 能用级数展开：

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\langle Tx,\phi_n\rangle\phi_n \tag{33a}$$

且这个展开式的系数使

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\langle Tx,\phi_n\rangle/\lambda_n]^2 \tag{33b}$$

有限，则存在积分方程(31)的有限能量解 $z\in R(T)$。在这些表达式里，λ_n 和 $\phi_n\in R(T)$分别是算子 TB 的特征值和相应的规格化正交特征函数的全部。进一步，如果特征矢量集$\{\phi_n\}$在$R(T)$内是完备的，则积分关系式(31) 的解将是唯一的。例如：与第四节中考虑的时间截断带限低通信号类相联系的椭球特征函数集就是完备的[14]。

必须注意，一般地说，存在一个B_Ω的子集，在其中级数展开式(33)不成立。于是，一步外推法对于这个性能拙劣的子集里的任何信号都是无能为力的。更重要的是很容易推出外推法的基本运算本身对于这个子集中的信号也是不适用的。基于这一点，建议只寻找带限信号的外推法，这类信号在满足(33)式的意义上是性能良好的。

八、数值外推法

由上一节的一步外推法产生外推信号需要 Fredholm 积分方程(31)，假设截断信号 Tx 满足条件 (33)，则保证能得到一个有限能量解 $z\in R(T)$。然而，显然，要得到解析解，除了非常特殊的例子外全都是不可能的。因此我们必须采用数值技术以获得近似解。为了说明所用的典型方法，我们假设观察时间集是一个简单的时间区间，可设它取下述形式而不失一般性：

$$\Lambda=\{t:-\delta\leqslant t\leqslant\delta\}$$

对于这个选定的观察时间集，要解的积分方程是

$$\int_{-\delta}^{\delta} h(t-\tau)z(\tau)d\tau=x(t) \qquad -\delta\leqslant t\leqslant\delta \tag{34}$$

对于$t\in\Lambda$，给出信号$x(t)$，我们要确定一个有限能量解 $z(t)$，$t\in\Lambda$。这个积分运算的核由表达式(15)给出。

对积分方程(34)作数值解通常需要将积分区间 $(-\delta,\delta)$ 分成有限个小间隔，在这些间隔里，每个小积分近似为一个矩形或梯形等的面积。例如，设积分区间分为$2M+1$个相等的小间隔，每个小间隔的宽度 $\Delta=2\delta/2M+1$。如果把矩形积分方法用于计算$t=k\Delta$时的(34)式，则有

$$\sum_{i=-M}^{M} \Delta h(k\Delta - i\Delta) z(i\Delta) = x(k\Delta) \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm M \tag{35}$$

这个近似值的精度是根据正整数M的选择而定的，一般，当M值较大时，产生的近似值更精确。这个积分式(34)的数值近似可看作是一个有$2M+1$个未知数$z(i\Delta)$、有$2M+1$个线性方程的方程组，用矩阵形式可表示为

$$H\hat{z} = \hat{x} \tag{36}$$

$2M+1$阶方阵H的元素是理想带限滤波器单位脉冲响应(15)的样本，如下式：

$$h_{ij} = \Delta h(i\Delta - j\Delta) \quad i, j = 1, 2, \cdots\cdots; 2M+1 \tag{37}$$

$2M+1$维列矢量$\hat{x}$和$\hat{z}$的分量为：

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= x(-M\Delta - \Delta + i\Delta) \\ \hat{z}_i &= z(-M\Delta - \Delta + i\Delta) \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, 2M+1 \tag{38}$$

把$\hat{x}$看作为Tx的均匀抽样形式和把$\hat{z}$看作为(34)式的解的近似值的均匀抽样形式是方便的。下一步是从有$2M+1$个未知数的$2M+1$个线性方程解出矢量z。最后，对外推关系式(32)运用标准矩形积分近似法得到下面的外推算法结果：

$$x(q\Delta) = \sum_{i=-M}^{M} \Delta h(q\Delta - i\Delta) \hat{z}(i\Delta) \tag{39}$$

式中q可取任意整数。一旦得到表达式(36)的解$\hat{z}$，只需要利用关系式(39)完成$2M+1$次乘法和$2M$次加法就能得到所需要的每个外推点。认识到这点是很重要的。简要地说，这个方法的步骤是(i)从方程组(36)解出$\hat{z}$；(ii)对于任何所需的外推时间$q\Delta$，计算外推关系式(39)。

在用这个数值方案去实现一步法时，必须考虑到一些可能出现的困难。例如，如果信号Tx属于前面所提到的一类不适用的信号，则线性方程组(36)本身就是不适用的。在这种情况中，右边矢量$\hat{x}$的小扰动会引起解$\hat{z}$的很大变化。在预计$\hat{x}$的测量不会精确时，这是最不希望有的特性。此外，前已证明[3]，无穷多的不同带限信号将包含在B_Ω里，这将产生相同的一组用于(35)式的$2M+1$个样本$\{x(k\Delta)\}$。这样，所设想的外推法仅在M选择得大到足以显著地减少这个现象的影响时才是有效的。M究竟取多大取决于基本的带限信号的结构，这仍是留待将来研究的一个课题。

我们注意到，Sabri 和 Steenart 提出了另一个一步外推法，此法是从 Papoulis 外推法[11]发展而来的。这个方法要求对阶数为$N=2M+1+$(被外推的点数)的方阵求逆。这与本文介绍的方法形成对照，本文方法只要对阶数为$2M+1$的方阵求逆。一般说来，N比$2M+1$大得多，因此本文的方法比他们的方法有效得多。更重要的是，他们的方法必须截断范围是无穷大的信号以实现数值运算。可惜，这可能降低它们的外推结果的性能。

当理想带限滤波器传递函数$H(\omega)$是ω的偶函数时，出现了一个重要的和实际的情况，就是描述关系式(36)的矩阵H是 Toeplitz 型[即$h_{ij} = \Delta h(|i-j|\Delta)$]。这是下述事实的必然结果：相应的脉冲响应$h(t) = F^{-1}[H(\omega)]$是时间的偶函数。这是值得注意的，因为这样就可以用 Levinson 算法（见[7]）从 Toeplitz 线性方程组(36)解出$\hat{z}$。这个求解方法在计算上是高效率的。同时，我们的经验表明，它对于矩阵H差不多是奇异的情况，相对而言不太敏感。

九、数值计算举例

这部分我们将举例说明所给出的一步外推法的有效性。我们通过考虑低通和带通信号外推法的两种特殊情况来作到这一点。这些例子可以很好地描绘出在应用和文献中碰到的问题的类型。

低通信号的外推

在低通信号外推问题中，特定的观察时间集和带限集由下式确定：

$$\begin{aligned} \Delta &= \{t: -\delta \leqslant t \leqslant \delta\} \\ \Omega &= \{\omega: -\sigma \leqslant \omega \leqslant \sigma\} \end{aligned} \tag{40}$$

式中 δ 和 σ 是正的常数，分别等于观察时间间隔和通频带。显然，上述的 Ω 集对应于最高频率不超过 σ 弧度/秒的低通信号。根据(15)式，有关的理想单位脉冲响应由下式给出：

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{j\omega t} d\omega = \sin[\sigma t]/\pi t \tag{42}$$

这个理想信号反过来又确定了用于数值近似外推运算的关系式(36)的H矩阵的元素，具体地看，根据(37)式，这些元素的表达式给定为：

$$h_{ij} = \frac{\sin[(i-j)\sigma\Delta]}{\pi(i-j)} \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, 2M+1 \tag{43}$$

这个矩阵是 Toeplitz 型的(即一般元素值 h_{ij} 是$|i-j|$的函数)。

对于这个低通例子，外推法按下述步骤进行：1) 在观察区间 $(-\delta, \delta)$ 中，以抽样周期 $\Delta = 2\delta/(2M+1)$对 $x(t)$的观察段作均匀抽样产生由(38)式给出的矢量 $\hat{x}$；2)确定线性方程组(36)的解 $\hat{z}$，其中矩阵 H 的元素由表达式(43)式给出；3)用表达式(39)对于选择的任何外推时间 $q\Delta$产生外推信号。为了说明这个方法，让我们考虑特定的低通信号

$$x(t) = \frac{\sin(0.94\sigma t)}{0.94\sigma t} \tag{44}$$

它的频谱完全包含在集(41)里[1]。假设观察到的是这个信号主瓣的中心20.68%部分，如图 1 所示。我们希望用这部分信息(相当于$\delta = 11\pi/50\sigma$)完成外推。实现一步外推法时M任意取为5，这时产生的均匀抽样集是：

$$x(k\Delta) = \frac{\sin[0.0376\pi k]}{0.0376\pi k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm 5$$

应用前面提到的 Levinson 算法来解具有 11 个未知数、11个方程的线性方程组 (36)，确定出 $\hat{z}$。最后在 $q = \pm 6, \pm 7, \cdots\cdots, \pm 99$时计算外推表达式(39)，得到了所需要的外推值。结果画在图 1 上。在图 1 中，实线表示没有截断的信号(44)，实点表示外推值，在所标明的观察窗内的 $x(t)$的 11 个样本被用于外推。显然，外推法在这个例子里工作得很出色(即外推点与实际值符合)，精确到小数点右边第四位。

带通外推

在许多应用中，所研究的信号的频谱已知是在一个给定的频带之内。例如频带由下述频

1. 这个信号的时间截断形式的外推比 Papoulis[11] 考虑的低通信号$\sin(\sigma T)/\sigma T$要困难得多。——原注

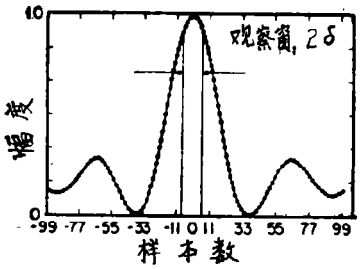

图1　低通信号 $\sin(0.94\sigma t)/0.94\sigma t$的时间截断信号的外推；实点表示外推值

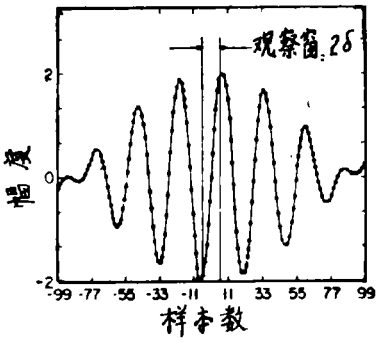

图2　带通信号 $\sin(0.99\sigma t)+\sin(0.85\sigma t)$ 的时间截断信号的外推；实点是外推值

率集确定：

$$\Omega=\{\omega:\sigma_1\leqslant|\omega|\leqslant\sigma_2\} \tag{45}$$

式中 σ_1 和 σ_2 是正的常数，它们规定了通带的区间。这个外推问题的观察—时间集仍将取为对称集(40)。应用关系式(15)得到相应的理想单位脉冲响应为

$$h(t)=\frac{\sin[\sigma_2 t]-\sin[\sigma_1 t]}{\pi t} \tag{46}$$

因此，有关的矩阵H的元素为

$$h_{ij}=\frac{\sin[(i-j)\sigma_2\Delta]-\sin[(i-j)\sigma_1\Delta]}{\pi(i-j)}\quad i,j=1,2,\cdots\cdots,2M+1 \tag{47}$$

为了说明带通外推法，我们考虑参数取 $\sigma_2=\sigma$ 和 $\sigma_1=0.8\sigma$ 的情况区别 Ω。此外，要对其时间截断部分作外推的信号是

$$x(t)=\sin[0.99\sigma t]+\sin[0.85\sigma t] \tag{48}$$

很清楚，这个信号是带限的，它的频谱完全包含在所规定的 Ω 集内。在以 $\delta=11\pi/25\sigma$ 的间隔(40)内观察了这个信号。这对应于只有 $x(t)$ 的最低正弦分量的一个周期的 0.374，如图 2 所示。

下一步，设 $M=5$，利用关系式(30)解 Toeplitz 线性方程组(36)，其中，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots,\pm5$ 时的分量 $x(k\Delta)$由以 $\Delta=2\delta/11$ 对信号(48)作均匀抽样而得到。用 Levinson 算法解这个 $\hat{z}$ 的方程组，再结合用外推表达式(39)就产生了 $q=\pm6,\pm7,\cdots\cdots\pm99$时的外推值$x(q\Delta)$。这个过程的结果示于图 2 。在这个图里，实线表示无截断的信号(48)，实点表示外推值，而在所标明的观察窗内的 $x(t)$ 的 11 个抽样是用于作外推的。显然，外推法产生的结果是精确的。

十、结　　论

对于时间截断型带限信号的外推法，发展了一个有效的算法，用 Von Neumann 的交错投影定理确保了这个方法的收敛性，它的执行过程要求迭代计算定义在有限积分限内的积分，因此数值近似是可能的。

为了有效地实现外推运算，进一步提出了一种一步外推法。它的执行过程涉及到解第一

类的 Fredholm 积分方程。用两个例子来说明了这个方法的适用性和有效性。在这两个例子里，用了 Fredholm 方程的数值近似。将来进一步研究的课题是：1) 进一步描述性能好的带限信号的类型；2)考虑加性带外噪声的情况；3)把外推误差和用于算法或一步法的数值积分方案的结构联系起来。

最后应该指出，这里提出的概念对于许多更普遍的问题也是适用的。具体地说，令 B 和 T 是作用于 Hilbert 空间X上的任意对一正交投影算子。进一步给出变换的图象信号$y=Tx$，并假定要求找到原先的图象信号x，假设 x 包含在 $R(B)$里。很容易证明，只要子空间$R(B)\cap N(T)^{\perp}$仅包含零元素，算法(19)将产生收敛到 x 的近似序列。此外，当 $z\in R(T)$及取 $x=Bz$时，一步法也是适用的，它要求解算子方程$TBz=Tx$。

（郑肇本译　徐为方校）

参 考 文 献

[1] R. B. Blackman and J. W. Tukey, The Measurement of Power Spectra. 1958.

[2] J. P. Burg, "Maxixmum entropy spectral analysis", Ph.D. dissertation. Stanford. CA, 1975. 5.

[3] J. A. Cadzow, "Improved spectral estimation from incomplete sampled-data observations", presented at the RADC Spectrum Estimation Workshop, 1977. 5.24-26.

[4] L. G. Chambers, Integral Equations: A Short Course. 1976.

[5] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics. 1973.

[6] R. W. Gerchberg, "Super resolution through error energy reduction", Opt. Acta vol.21, no.9, pp.709-720, 1974.

[7] N. Levinson, "The Wiener RMS (root mean square) error criterion in filter design and prediction", J. Math. Phys., vol.25, pp.261-278, 1947.

[8] A. W. Naylor and G. R. Swell, Linear Operator Theory. 1971.

[9] J. von Neumann, The Geometry of Orthogonal Spaces, vol.II. 1950.

[10] A. V. Oppenheim and R. W. Schafer, Digital Signal Processing. 1975.

[11] A. Papoulis, "A new algorithm in spectral analysis and band — limited extrapolation", IEEE CAS-22 p.735-742, 1975.

[12] E. Parzen, "Multiple time series modeling", in Multivariate Analysis, vol.2, P, R. Krishnaiah, Ed. 1969.

[13] M. S. Sabri and W. Steenaart, "An approach to band-limited signal extrapolation: The extrapolation matrix", IEEE CAS-25 p.74-78, 1978.

[14] H. L. van Trees, Detection, Estimation and Modulation Theory, Pt.1. 1968.

[15] D. C. Youla, "Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections", presented for publication.