

# 海面散射问题的各种小波高解之间的联系

F. M. Labianca 和 E. Y. Harper

贝尔实验室

本文谨慎地导出了点源海面声散射问题的若干种近似解法，这里感兴趣的是小波高的情况即海面的均方根波高与声波长和海面相关半径相比要小，近似解可分为二类：利用 Kirchhoff 近似得到的解和由微扰展开得到的解。证明了在小波高的条件下微扰解优于任何由 Kirchhoff 近似得到的解，前者对任意的声波长与海面波长之比都是有效的。在小波高的情况下，当声波长与海面波长之比很小时可以证明所有的近似解是一致的。本文指出了在使用 Kirchhoff 近似时可能和已经出现的一些错误。

## 引言和概论

本文讨论了在声速为  $c$  的等速海洋中随机海面引起的频率为  $\omega$  的点源声场的散射问题，特别是海面粗糙度的斜率和均方根幅度很小时的渐近解。本文引用的一些结果和结论只是在这种“小斜率”“小幅度”的假设下才有效，以后我们将称这些结果为小波高近似。

本文的论述大都是哲理性的，其目的是为了更好地理解在文献中出现的某些散射结果之

---

Radiation,” *J. Acoust. Soc. Am.* 44, 28—32 (1968).

- [35] P. M. Morse and K. U. Ingard, *Theoretical Acoustics* (McGraw-Hill, New York 1968), p.404.
- [36] H. Allik, K. M. Webman, and J. T. Hunt, “Vibrational Response of Sonar Transducers Using Piezoelectric Finite Elements,” *J. Acoust. Soc. Am.* 56, 1782—1791 (1974).
- [37] M. Lax, “The Effect of Radiation on the Vibrations of a Circular Diaphragm,” *J. Acoust. Soc. Am.* 16, 5—12 (1944).
- [38] H. M. Nuzenzveig, “High Frequency Scattering by an Impenetrable Sphere,” *Ann. Phys. (N. Y.)* 34, 23—95 (1965).
- [39] H. Severin, “Methods of Light Optics for the Calculation of the Diffraction Phenomena within the Range of Centimeter Waves,” *Suppl. Nuovo Cimento* 9, 381—400 (1952).

译自美国声学杂志 57 卷第 2 期第 287 页 1975.

蒋廷华译 恽宗杨校

间的联系。这些结果有一个共同之处就是在导出它们的过程中曾作过小波高的假设。因此本文所讨论的所有结果都是小波高近似。

基于上述对问题所作的限制，似乎预期不会出现许多不同的结果，而只是一个单一的渐近解，它适用于问题中的其它长度保持不变而  $a \rightarrow 0$  的极限情况。但情况并不完全如此，这里存在着某些差别，其原因部分是由于在一些分析中小波高的假设是通过较严格的数学方法实现的(泰勒展开)而另一些是通过被我们称为 ad hoc 的方法实现的(见 II 节)。此外，一些结果是从描述该问题的微分方程形式出发得到的，而另一些则是从问题的积分方程形式出发得到的，这一事实本身并不会导致不同的结果，这是因为这两种表述方式完全是等价的，但是，在由该问题的积分方程表式出发求得小波高近似过程中某些作者同时还作了另一近似，即 Kirchhoff 近似。这些不同结果之间的联系正是本文要讨论的课题。

为了讨论上述不同近似之间的联系我们定义了如下一些特征长度：

$a$ ，表面的均方根波高；

$k = \omega/c$ ，声波数；

$\lambda$ ，声波长；

$\Gamma$ ，海面波数；

$\Lambda$ ，海面波长；

将要证明(I和III节)当小波高假设：

$$a \ll \lambda,$$

$$a \ll \Lambda,$$

被通过严格的展开方式实现时。由该问题的微分方程形式得到的结果与由积分方程(Helmholtz)公式出发不使用 Kirchhoff 近似得到的结果是相同的。而且这些结果对任意空间和声波长与海面波长之比都是有效的，即对

$$\lambda/\Lambda = \Gamma/k = O, \quad (1)$$

这些结果都是有效的。

还将证明(II和IV节)在使用严格的小波高近似时同时使用 Kirchhoff 近似将会导致所得的结果仅在如下的极限情况有效：

$$\lambda/\Lambda = \Gamma/k \rightarrow 0$$

本文还讨论了由于在小波高近似中使用了 ad hoc 方法而造成的在公开发表的结果之间的进一步差别。

Kirchhoff (或物理光学) 近似宜用于有限幅度表面的散射问题。

$$\text{当 } \lambda \ll \Lambda,$$

$$a/\Lambda = O \quad (1)$$

时它是有效的，这一有效区域可用图 1 中 Venn 图的右边圆表示，左边圆表示了小波高近似的有效区域，即：

$$a \ll \Lambda,$$

$$a \ll \lambda,$$

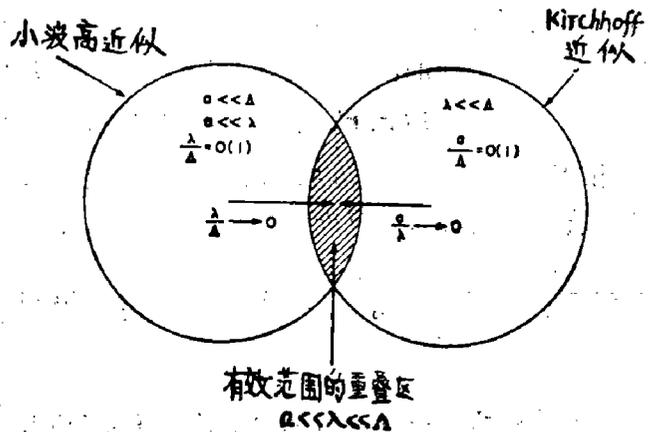


图 1 小波高近似和 Kirchhoff 近似的有效范围说明图

$$\lambda/\Delta=0 \quad (1)$$

这两有效区域有一重叠区, 即图 1 中的阴影区, 在 Kirchhoff 近似下取极限  $a/\lambda \rightarrow 0$  或在小波高近似下取极限  $\lambda/\Delta \rightarrow 0$  都会进入这一重叠区。

图 1 说明, 在小波高假设下, 由小波高近似得到的结果中包括了与此同时还使用 Kirchhoff 近似所得到的结果, 在作小波高近似的同时再作 Kirchhoff 近似不仅是不必要的, 而且极不希望这样做, 因为这会把结果限于有效区域中的那部分重叠区, 即:

$$a \ll \lambda \ll \Delta$$

还将证明图 1 重叠区的一个特征是声功率谱的边带幅度相对于载频(声源频率)必定是对称的。

在图 1 左边园所表示的区域内, 可采用几种方法得到小波高近似, 其中的两种就是上面所提到的, 并将在 I 和 III 节中加以描述。为了完整起见在本文结尾(V 节)还将包括一个简短的讨论, 它表明在这两节中给出的小波高结果实际上是建立在平面波散射的“Rayleigh 假设”基础上的 Rayleigh-Rice 展开的推广。

## I HELMHOLTZ 积分公式

待求解问题的数学表述是:

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(-i\omega t + i\gamma_0) \quad (1a)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = 0 \quad \text{在 } \mathbf{r} = (x, y, z_s) \text{ 处} \quad (1b)$$

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \rightarrow 0, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty, \quad (1c)$$

这里  $c$  是(常数)声速,  $\gamma_0$  是在  $2\pi$  间隔内均匀分布的随机相位。为简单起见, 将声源置于  $z$  轴上,  $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$ 。假设上述海面  $z_s$  可用一个平稳(时间上)和均匀(空间上)的随机过程来描写, 并记为:

$$z_s(\rho, t) = aZ(\rho, t) \quad (2)$$

这里  $a$  是均方根波高,  $\rho = (x, y)$ , 在本文所讨论的问题中声源频率  $\omega$  比自由表面的最高振荡频率  $\sigma_{\max}^1$  要大得多, 这就使得在下一小节中所讨论的问题大为简化。

### A 窄带近似

我们预先假设在小海面波高的情况下, 声散射信号对于源频率(或载频)是一窄带过程<sup>2</sup>。由于假设过程是平稳的, 任何可实现的实信号声压可表示成<sup>3</sup>:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = U(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \cos \omega t + V(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \sin \omega t \quad (3)$$

这里  $U$  和  $V$  变化的时间尺度是  $2\pi/\sigma_{\max}$ , 比载频的时间尺度  $2\pi/\omega$  大。因而  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  对  $t$  的导数包含了这两种时间尺度:

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -P + \frac{2}{\omega} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \cos \omega t - \frac{\partial U}{\partial t} \sin \omega t \right) + \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \cos \omega t + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \sin \omega t \right) \quad (4)$$

这里对随机过程的任一特定的样本函数, 等式(4)右边的第二项的量级是  $O(\sigma_{\max}/\omega)$  而第三项是  $O[(\sigma_{\max}/\omega)^2]$ , 这样我们有

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -P + O\left(\frac{\sigma_{\max}}{\omega}\right) \quad (5)$$

下面我们将丢掉量级为  $\sigma_{\max}/\omega$  的项并把式(1a)写成:

$$(\nabla^2 + k^2)P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(-i\omega t + i\gamma_0) \quad k = \omega/c \quad (6)$$

下面我们将讨论(6)式的满足式(1b)和(1c)所给出的边界条件的近似解, 此解是量级大于  $\sigma_{\max}/\omega$  的部分。

## B 格林第二公式的应用

通常用于求解上述问题的出发点是格林第二公式

$$\int_V (G\nabla''^2 P - P\nabla''^2 G) dv'' = \iint_S (G\nabla'' P - P\nabla'' G) \cdot \mathbf{n}'' ds'' \quad (7)$$

这里  $G$  和  $P$  是对于空间变量  $(x'', y'', z'')$  至少二次可微的函数,  $\mathbf{n}''$  是包围体积  $V$  的表面  $S$  的外法线。式(7)中的符号  $P$  表示式(6)中的未知声压, 而  $G$  是格林函数的一般符号, 它满足:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', t) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') e^{-i\omega t}, \quad (8)$$

和相应的边界条件, 边界条件有两种选择方法, 下面将要讨论这一问题。

格林函数的选择与式(7)中表面  $S$  的选择有密切的联系, 可以有两种选择, 即自由表面,  $z = z_0$ , 以及平表面,  $z = 0$ 。不管哪一种选择, 在对  $P$  和  $G$  作适当的限制后当  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  时, 来自构成封闭表面  $S$  的上半球面 ( $z > 0$ ) 的贡献趋于零。前一种选择会引进外加的复杂性, 首先, 自由表面是运动着的, 而格林公式仅适用于固定表面, 因而就要求某种“冻结表面”的近似, 这一点当然并不会使问题更复杂化, 因为冻结表面近似与前一小节提到的窄带近似是同一范畴的。其次, 虽然已知在自由表面上  $P$  等于零, 但它的法向导数仍然是未知的, 必须作估算, 也就是说要借助于“Kirchhoff 近似”。

表面的第二种选择,  $z = 0$  只要适当地选取  $G$  可避免作冻结表面和 Kirchhoff 近似, 使用的唯一近似是基于小波高假设的基础, 把表面  $z = 0$  上的声压表示成关于  $z_0$  的泰勒级数展开式。应当注意: 即使对式(7)中的表面作第一种选择, 即  $z = z_0$ , 为了利用小波高假设这一有利条件也需要作泰勒级数展开。

由于上述理由, (7)式中表面的合乎逻辑的选择是取平表面  $z = 0$ , 而相应地  $G$  应该选取半空间的格林函数, 它在  $z = 0$  处为 0, 我们以后记为  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ ,

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} e^{ikR_1} - \frac{1}{R_2} e^{ikR_2} \right) e^{-i\omega t}, \quad (9a)$$

$$\text{这里} \quad R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad R_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z' \mathbf{z}_0|, \quad (9b)$$

上式中  $\mathbf{z}_0$  是正  $z$  方向的单位矢量。

联立(6)–(8)式, 并令  $G = G_0$  得到:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma_0} + e^{-i\omega t} \times \iint_{z''=0}^{\infty} \left[ P(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right] dx'' dy'' \quad (10)$$

用等式(10)给出的  $P$  的表示式在窄带近似的范围内是“精确的”

式(10)是微分方程(6)所对应的积分方程表式。在文献<sup>4,5</sup>中给出了方程(6)满足边界条件(1b)和(1c)的小波高(极限  $\alpha \rightarrow 0$ )解的严格推导。所用的技巧是老的, 包括利用泰勒级数展开把  $z = z_0$  处的边界条件转换成表面平均位置  $z = 0$  处的边界条件。下小节我们将利用小波

高假设和转换技巧, 获得积分方程(10)的近似解。

### C 小波高近似

小波高假设意味着均方根波高  $a$  与声波长  $\lambda$  和最小的海面波长  $\Lambda_{\min}$  相比要小(这里  $\Lambda_{\min}$  与节 IA 中提到的最大振荡频率  $\sigma_{\max}$  相对应)即:

$$\begin{aligned} a &\ll \lambda \\ a &\ll \Lambda_{\min} \end{aligned} \quad (11)$$

在上述假设下, 我们把压力场按小量  $a$  展开:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + aP_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + a^2P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + O(a^3), \quad (12)$$

同时把  $z=z_s$  处的声压表示成在  $z=0$  处的泰勒级数:

$$P(x, y, z_s, \mathbf{r}', t) = 0 = (P)_{z=0} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=0} z_s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)_{z=0} z_s^2 + O(z_s^3) \quad (13)$$

联立式(2)(12)(13)并令  $a$  相同幕次的项在等式两边的系数相等, 得到:

$$P_0 = 0 \quad z=0 \text{ 处} \quad (14a)$$

$$P_1 = -Z \frac{\partial P_0}{\partial z} \quad z=0 \text{ 处} \quad (14b)$$

$$P_2 = -Z \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_0}{\partial z^2} Z^2 \quad z=0 \text{ 处} \quad (14c)$$

把式(12)和(14)代入(10)得到最终的  $P_0, P_1, P_2$  的表式(注意: 在  $z=0$  处  $\partial^2 P_0 / \partial z^2 = 0$ ),

$$P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma}. \quad (15a)$$

$$P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -e^{i\omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ Z(\rho'', t) \frac{\partial P_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' dy'' \quad (15b)$$

$$P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -e^{i\omega t} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ Z(\rho'', t) \frac{\partial P_1(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' dy'' \quad (15c)$$

由式(12)和(15a)–(15c)给出的声压场的表式与文献7给出的完全相同。式(15a)–(15c)就是直接由文献7中微分方程求出的对  $P_0, P_1, P_2$  的边值问题序列的严格解, 在III节中将要证明这种等价性。这里想说明的是谨慎地使用格林第二公式和小波高展开可以得到声压场的小波高渐近解, 此外, 在作小波高近似的同时使用 Kirchhoff 近似不仅是不必要的, 而且会降低近似的质量。后一点将在IV节中得到证明。为了进行比较我们必须先回到(7)式, 导出使用 Kirchhoff 近似的结果。

## II Kirchhoff 近似

在IIA中我们回到式(7)选择平均平面  $z=0$  和无限空间的格林函数  $G_-(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ , 并使用 Kirchhoff 近似, 前面已经指出, 这并不是值得推荐的方法, 因为选择半空间的格林函数可以避免作 Kirchhoff 近似(I节), 我们所以这样做的最终目的是要评价这种近似的质量因为它已被如此广泛地使用。

除了 Kirchhoff 近似的质量问题外, 还存在着一个附加的复杂性, 这就是它通常被使用时附带作了常称为小斜率的近似(例如参考文献 8.9)它的步骤是先选择(7)式中的自由表面, 并以  $\alpha \ll \lambda_{\min}$  为理由[注意, 仅仅是(11)式的第二个不等式], 用  $z$  方面的导数代替法向导数:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial z}$$

然后再象通常所做的那样以展开指数成幂级数的方式引入小波高近似 [(11) 的第一个不等式]。这种处理方法我们在引言中曾称它为 ad hoc 以便与正规的保留那些忽略项 [见下面式 (20)(21)] 的处理方法相区别。它会导致不同的结果, 这依赖于具体作者所用的方法。但是, 将要证明(见 V 节)只要把结果限制在图 1 的阴影区内, 这种差别是不严重的, 它可以被看作为近似过程中产生的误差。任何把这结果推广到图 1 左边圆内的企图当然会导致错误的结论, 在 IIB 中将进一步详细讨论这个问题并把重点放在常被引用的文献 8, 9 的结果上。

### A 平均表面公式

在(7)式中我们采用无限空间的格林函数

$$G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = (1/4\pi R_1) \exp[i(kR_1 - \omega t)] \quad (16a)$$

这里

$$R_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (16b)$$

以及选取  $z=0$  的表面

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma_0} - e^{i\omega t} \times \iint_{z''=0} \left[ \frac{\partial P(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} G_{\infty}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t) - P(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t) \frac{\partial G_{\infty}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' dy'' \quad (17)$$

(17)式中第一项是入射场  $P_i$

$$P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma_0} \quad (18)$$

在  $z''=0$  处的格林函数及其导数是已知的, 声压  $P$  在自由表面上也已知为零, 但它的导数  $\partial P/\partial z$  是未知的, 为了求得导数我们使用了 Kirchhoff 近似

$$\frac{\partial P}{\partial n} \approx 2 \frac{\partial P_i}{\partial n} \quad \mathbf{r} = (x, y, z_0) \text{ 处} \quad (19)$$

这里  $P_i$  是入射场。我们可以把法向导数写为:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \nabla P \cdot \mathbf{n} = \nabla P \cdot [\nabla z_0 - \mathbf{z}_0] [1 + |\nabla z_0|^2]^{-1/2} \quad (20)$$

对小振幅表面[见式(11)]的情况,  $z_0 = \alpha Z$ , 把上述算符作用于(19)式的  $P$  和  $P_i$  得到

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2 \frac{\partial P_i}{\partial z} + \alpha \nabla Z \cdot (\nabla P - 2\nabla P_i) + O(\alpha^3) \quad z = z_0 \text{ 处} \quad (21)$$

利用小波高假设如(12)式那样把压力场展开并把  $z = z_0$  处的  $\partial P/\partial z$  表示成  $z=0$  处的泰勒级数, 如同在导出  $z=0$  处的  $P$  的表式(14a) — (14c) 式时所做的那样。其结果为:

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = 2 \frac{\partial P_i}{\partial z} \quad \text{在 } z=0 \text{ 处} \quad (22a)$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = -2\nabla Z \cdot \nabla P_i + 2Z \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2} \quad \text{在 } z=0 \text{ 处} \quad (22b)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial z} = \nabla Z \cdot \nabla P_1 + Z^2 \frac{\partial^3 P_i}{\partial z^3} - Z \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} - \frac{1}{2} Z^2 \frac{\partial^3 P_0}{\partial z^3} \quad \text{在 } z=0 \text{ 处} \quad (22c)$$

把(12), (14a)–(14c), 和(22a)–(22c)代入(17), 令等式两边  $a$  相同幂次的系数相等得到,

$$P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - e^{i\omega t} \iint_{z''=0}^{\infty} \left[ 2 \frac{\partial P_i(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} G_{\infty}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t) \right]_{z''=0} dx'' dy'' \quad (23a)$$

$$P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -e^{i\omega t} \iint_{z''=0}^{\infty} \left[ (-2\nabla'' Z \cdot \nabla'' P_i) G_{\infty} + 2Z \frac{\partial}{\partial z''} \left( \frac{\partial P_i}{\partial z''} G_{\infty} \right) \right]_{z''=0} dx'' dy'' \quad (23b)$$

$$P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -e^{i\omega t} \iint_{z''=0}^{\infty} \left\{ \left( \nabla'' Z \cdot \nabla'' P_1 + Z^2 \frac{\partial^2 P_i}{\partial z''^3} - Z \frac{\partial^2 P_1}{\partial z''^2} - \frac{1}{2} Z^2 \frac{\partial^3 P_0}{\partial z''^3} \right) G_{\infty} + Z \left( -2\nabla'' Z \cdot \nabla'' P_i + 2Z \frac{\partial^2 P_i}{\partial z''^2} \right) \frac{\partial G_{\infty}}{\partial z''} \right\}_{z''=0} dx'' dy'' \quad (23c)$$

不论用演绎法或直接积分<sup>10</sup>都可以证明(23a)式右边第二项为:

$$-e^{i\omega t} \iint_{z''=0}^{\infty} \left( 2 \frac{\partial P_i}{\partial z''} G_{\infty} \right)_{z''=0} dx'' dy'' = -\frac{1}{4\pi R_2} \exp [i(kR_2 - \omega t + \gamma_0)] \quad (24a)$$

这里  $R_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}' + 2z'z_0|$  (24b)

把(16a), (18), (24a)和(24b)代入(23a)得到:

$$P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma} \quad (25)$$

与 I 节中(15a)式一致。这就是说不管是否作 Kirchhoff 近似小波高近似的第一项是光滑平面的解。但是粗看一下发现, 高阶声压的表式(23b)和(23c)一般说来完全不同于(15b)和(15c)。第 VI 节中我们将证明, 只有当声波长和海面波长之比很小的极限情况下, 即  $A_{\min} \ll 1, a \ll \lambda$ , 式(23b)和(23c)等价于(15b)和(15c)。

有些作者<sup>8</sup>选择把总场表示成入射分量与散射分量之和, 而有些作者<sup>9</sup>不这么做。如果把总场作如下分解:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + P_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (26)$$

那末精确到  $O(a^2)$  量级的  $P_s$  的表式等于式(23b), (23c) 右边项和式(23a)右边第二项之和。显然(26)式的分解方法不会影响最终的结果。下一小节中我们将要证明, 文献 8 与 9 的结果是不同的, 这差别并不是直接由于选择了场的分解方法所引起的, 而是由于在场分解的同时为利用小波高近似采用了 ad hoc 处理方法(见本节开始引言中的评述)。

## B 自由表面公式

如前所述, 许多作者以在(7)式中选取无界空间的格林函数  $G_{\infty}$ , 以及表面  $z=z_0$  作为处理问题的出发点。作了这种选取后问题的求解将采取如下两途径之一, 即如文献 9 那样在问题的表式中使用总场或如同文献 8, 把场按(26)式分解, 并求得散射场的积分公式。这种差别不应该产生不同的结果。但是这两文献的作者使用了前面描述过的 ad hoc 处理方法先作小斜率近似再作小波高近似, 因此文献 8 和 9 的结果初看起来是不同的, 而且似乎也没有一个与上节导出的(23)–(25)式的结果一致。这后一个不一致性(明显的)直接归因于使用了 ad hoc 近似, 应该把它与上节中为了把自由表面的边界条件转换到平表面  $z=0$  上所用的泰勒级数展开作一比较。

在作小波高近似之前也即仅作小斜率近似的情况下, 文献 8 和 9 的结果分别为:

$$P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \approx -e^{i\omega t} \times \iint_{z=z_0}^{\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial z''} P_i(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t) G_{\infty}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t) \right]_{z=z_0} dx'' dy'' \quad (27)$$

和

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \approx G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) e^{i\gamma_0 t} - e^{i\omega t} \times \iint_{z=z_0}^{\infty} \left[ 2 \frac{\partial P_i(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} G_{\infty}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t) \right]_{z=z_0} dx'' dy'' \quad (28)$$

由于  $P_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G_{\infty}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \exp(i\gamma_0 t)$ , (28) 式的表面积分应该是散射场  $P_i$  的表式, 它和 (27) 式的表式不同。而且通过简单的分析可以看出, 假如把上两式中的被积式展开成泰勒级数, 并按  $\alpha$  的幂次数排列, 那么所得到的散射场的表式将不同于 IIA 节中由自洽的解析延拓方法得到的结果。

在 IV 节中将要证明, 尽管因采用 ad hoc 方法引起了不一致处, 但当积分宗量在  $\alpha \ll \lambda$  的条件下按小波高  $\alpha$  和小比值  $\lambda/\Delta_{\min}$ \* 展开后, 因  $\alpha \ll \lambda$ , (27)(28) 式的结果与 IIA 中 (23b) 和 (23c) 式的结果一致。

值得指出本文在推得上述结论时所使用的方法是建立在对整个空间都是有效的场的表达式的基础上的, 这些方法不同于许多作者通常在作小波高近似时所采取的方法 (例如见文献 8, 9, 11—14), 典型的情况是这些作者把 (27) 或 (28) 式作为出发点, 对积分得到一种仅适用于夫琅和费区或非涅尔区有效而不是在整个空间上适用的近似。在这基础上再求得小波高结果。虽然这样的近似一般地说在他们的使用范围内是有效的, 但在由这些结果得出结论时必须小心, 以免发生错误。在 IV 节中将会看到在一些文献中<sup>12, 13</sup>曾作出过错误的论述。

最后我们再次重复一下, 如果作了小波高近似, 没有必要因使用 Kirchhoff 近似来把结果限于  $\lambda/\Delta_{\min} \rightarrow 0$  的极限情况。由 I 节中的方法可以导出在频域上和空间上普遍有效的小波高近似。文献 7 中已经这么做了。这些结果将在下节 (III) 中以一种最适宜于 IV 节中将要进行的比较的形式给出。

### III 由 HELMHOLTZ 积分公式导出的普遍有效的解

本节的目的是进一步发展 I 节中得到的公式, 特别是 Helmholtz 积分表示式 (15a)—(15c) 这些公式适用于小波高情况且不依赖于 Kirchhoff 近似。

我们的目标是从 (15a) 到 (15c) 式求得在小波高假设下对空间上和频率域上普遍适用的结果。这些结果与文献 7 和 15 中对微分方程和边界条件作微扰展开所得的结果完全一致。我们所希望说明的是不论是从微分方程出发还是从 Helmholtz 积分方程出发, 只要不使用 Kirchhoff 近似都可以得到相同的普遍有效的近似结果。

在 IIIA 中我们将求得对载频(源频率)和边带声场的随机积分表达式, 并讨论它们的某些重要性质, 如互易性。在 IIIB 中我们将求得声功率谱。这些结果适用于可用一般的波数——频率谱  $S_s(\Gamma, \sigma)$ , 描述的海面, 这里  $\Gamma = (\Gamma_x, \Gamma_y)$  是波矢量,  $\sigma$  是角频率, 均方根波高  $\alpha$  可表示成:

$$\alpha^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint S_s(\Gamma, \sigma) d\Gamma d\sigma \quad (29)$$

\* 原文误为  $\lambda/\lambda_{\min}$  ——译者

我们注意到, 文献7仅讨论所有海面波浪只沿正  $x$  方向或风向推进的情况, 而文献15讨论了普遍的二维海表面的情况。

### A 载频和边带的随机积分表达式

把(15a)代入(15b)得到:

$$P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\exp[i(\omega t + \gamma_0)] \times \iint_{z''=0} \left[ Z(\rho'', \mathbf{r}) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right] dx'' dy'' \quad (30)$$

由上式很明显有  $P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$ , 由  $P_1$  的这种互易性可以得到关于边带的有趣结果, 我们将进一步在 IIIB 末尾讨论,

把表式(30)中的  $P_1$  式代入(15c)式得到:

$$P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \exp[i(2\omega t + \gamma_0)] \times \iint dx'' dy'' \iint dx''' dy''' \times \left[ Z(\rho'', t) Z(\rho''', t) \frac{\partial G_0(\mathbf{r}''', \mathbf{r}', t)}{\partial z'''} \right. \\ \left. \times \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{r}''', \mathbf{r}'', t)}{\partial z''' \partial z''} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=z'''=0} \quad (31)$$

交换变量  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  以及  $\mathbf{r}''$  和  $\mathbf{r}'''$  发现  $P_2$  也是互易的,  $P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_2(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$ , 这种互易性不能推广到声压的更高阶的微扰展开项。

为了估算式(30)和(31)我们需要  $G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)$  和它导数的适当的表式, 特别是为了得到  $P_1$  和  $P_2$  的付里叶积分表达式我们使用  $G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)$  的付里叶积分表达式。由于求得最终结果的步骤相当繁复我们将不在这里给出, 留到附录A作一概要的说明。

我们还需要随机海面  $Z(\rho'', t)$  的随机积分表达式。在  $Z$  是平稳(时间上)和均匀(空间上)的随机场的假设下, 选择了波数——频率表示法, (见文献16或17):

$$aZ(\rho, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \exp[i(\Gamma \cdot \rho - \sigma t)] H(d\Gamma d\sigma) \quad (32)$$

这里  $H(d\Gamma d\sigma) = H(d\Gamma_x d\Gamma_y d\sigma)$  是一个随机的集函数, 它对每一微分体积元(集)  $d\Gamma d\sigma$  给出了一个随机变量, 这一集函数具有如下性质:

$$H(d\Gamma d\sigma) = H^*(\overline{d\Gamma d\sigma}) \quad (33)$$

这里  $*$  表示复共轭,  $\overline{d\Gamma d\sigma}$  是  $d\Gamma d\sigma$  相对  $\Gamma = \sigma = 0$  点的对称体积元。而且此集函数的期望值  $E$  等于零(以  $E$  表示取期望):

$$E[H(d\Gamma d\sigma)] = 0 \quad (34a)$$

以及两不相邻的集  $d\Gamma d\sigma$  和  $d\Gamma' d\sigma'$  所对应的随机集函数之积的期望也等于零

$$E[H(d\Gamma d\sigma)H(d\Gamma' d\sigma')] = 0 \quad (34b)$$

这就是说  $H$  是一个具有正交或不相关的随机集函数。此随机集函数幅度平方的期望为:

$$E[H(d\Gamma d\sigma)H^*(\overline{d\Gamma d\sigma})] = (2\pi)^3 S_{\omega}(\Gamma, \sigma) d\Gamma d\sigma \quad (34c)$$

这里  $S_{\omega}(\Gamma, \sigma)$  是海面的波数——频率谱<sup>18</sup>。

由附录A可知, 所求的一阶修正量  $P_1$  表达式为:

$$P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = -\frac{e^{i\gamma_0}}{(2\pi)^3} \times \iiint \frac{k}{a} \tilde{Q}_{1+} \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) \exp[-i(\omega + \sigma)t] H(d\Gamma d\sigma) \\ - \frac{e^{i\gamma_0}}{(2\pi)^3} \iiint \frac{k}{a} \tilde{Q}_{1-} \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) \exp[-i(\omega - \sigma)t] \times H^*(d\Gamma d\sigma), \quad (35a)$$

这里

$$\tilde{Q}_{1\pm} \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) = \frac{k}{8\pi^2} \times \iint \exp[ik(\xi x + \eta y + \mu_{10}z + \mu_{11\pm}z')] d\xi d\eta \quad (35b)$$

而这里

$$\mu_{10} = (1 - \xi^2 - \eta^2)^{1/2} \quad (35c)$$

以及

$$\mu_{11\pm} = [1 - (\xi \mp \Gamma_x/k)^2 - (\eta \mp \Gamma_y/k)^2]^{1/2} \quad (35d)$$

它们是正实数或是正虚数。 $P_1$ 的表式(35a)是由(32)式描述的海面所对应的波数——频率表示法。

文献15[式(6a)]中对海面采用了一种近似的方向——频率表示法,它很适宜于计算。这两种表达方式之间的联系在于把重力波的频散关系引入到表面波浪的表达式中借助于由平稳均匀的随机压力所激起的重力波激发问题(一阶水波问题)的解<sup>19</sup>可以达到这一点。一旦在这两种海面表示法之间确立了正确的联系,直接可由本文的(35a)–(35d)式得到文献15的结果,即该文的(9a), (12b) (41)和(47)式。我们特别注意到利用多重积分的稳相法<sup>20</sup>可以由(35b)式得到 $\tilde{Q}_{1\pm}$ 的一个渐近式,即文献15中(47)式。而与稳相点有关的支点奇性结构常使我们能得到一个在空间一致的渐近结果。最后一节末尾提出的主张就是由这一事实得出的,由于明显的理由我们把 $P_1$ 称为边带场。如同在附录A中证明的,场 $P_2$ 包含有载波(源)频率的项和关于载频的一个窄频带的项。为了保持能量守恒(见文献15)我们仅保留包含载频的那一项,把它记为 $P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ 。结果为(见附录A)

$$P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = e^{i\gamma_0} \cdot E[e^{-i\gamma_0} P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)] = \exp[-i(\omega t - \gamma_0)] \\ \times \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \left( \frac{k}{a} \right)^2 \tilde{Q}_{20} \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) S_{2c}(\Gamma, \sigma) d\Gamma d\sigma \quad (36a)$$

这里

$$\tilde{Q}_{20} \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) = \frac{ik}{8\pi^2} \iint (\mu_{11+} + \mu_{11-}) \exp\{ik[\xi x + \eta y + \mu_{10}(z + z')]\} d\xi d\eta \quad (36b)$$

同样,当计及文献15中的方向——频率谱表示与本文采用的波数——频率表示之间关系时就可直接由(36a)和(36b)式得出文献15的结果,即该文的(11a), (12c), (38a)和(48)。我们还注意到由于与 $P_1$ 同样的理由式(36b)的渐近形式即文献15的(48)式,在空间上是普遍有效的,由于明显的理由我们把 $P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ 称作为载频修正项。

在下小节中我们给出声信号一维频谱的结果,在这种情况下对波数已作了积分(在文献15的情况下对方向角求知),这里给出的结果将更明确的与文献15的结果联系起来。

## B 声功率谱

满足能量守恒的压力场的小波高展开式[到 $O(a^2)$ ]为:

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \approx P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + aP_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + a^2P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \quad (37)$$

上式中 $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_{2c}$ 的明确表式已在 IIIA 中给出了。在附录B中我们简要地导出了实声压

的自相关函数:

$$R_p(\tau) = E[\text{Re}P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \text{Re}P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t + \tau)] \quad (38a)$$

并把它表示成付里叶积分的形式:

$$R_p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\sigma) e^{-i\sigma\tau} d\sigma \quad (38b)$$

这里功率谱密度  $S_p(\sigma)$  是三项之和:

$$S_p(\sigma) = S_{p_c}(\sigma) + S_{p_+}(\sigma) + S_{p_-}(\sigma) \quad (39)$$

上式中的每一项分别为:

$$S_{p_c}(\sigma) = \frac{1}{4} (C_1^2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + C_2 |\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle|^2 + 2\text{Re}\{C_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') C_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp[ik(R_1 - R_2)]\}) \delta(|\sigma| - \omega), \quad (40a)$$

$$C_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (4\pi R_1)^{-1} \quad (40b)$$

$$C_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -(4\pi R_2)^{-1} + (ak)^2 \frac{e^{-ikR_2}}{(2\pi)^3} \iiint \frac{1}{a^2} S_{z_s}(I, \sigma) \times \tilde{Q}_{20}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{I}{h}) dI d\sigma, \quad (40c)$$

$$S_{p_{\pm}}(\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint k^2 \left| \tilde{Q}_{1\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{I}{h}) \right|^2 \times \{S_{z_s}[I, \mp(\sigma + \omega)] U[\pm(\sigma + \omega)] + S_{z_s}[I, \pm(\sigma - \omega)] \times U[\pm(\sigma - \omega)]\} dI, \quad (40d)$$

为了简便起见上式中没有明确地显示出  $S_p$  和  $S_{p_{\pm}}$  的宗量对空间的依赖性, 式中  $U(x)$  是 Heaviside 阶跃函数。我们称  $\tilde{Q}_{1\pm}(x, y, z, 0, 0, z', k, I/h)$  为边带系统函数, 它对应于上, 下多卜勒边带。

图 2 以图象形式表达了式(39)和(40)的含义, 功率谱函数是频率的偶函数, 这是因为实广义平稳过程  $\text{Re}P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  的自相关函数是  $\tau$  的实偶函数即  $R_p(\tau) = R_p(-\tau)$ 。这些结果与文献 7 的结果相同。在文献 7 中给出了, 图 2 表示的这类情况的数值结果, 它表示的是涌浪的情况, 即这时所有的表面波浪向同一方向运动。不久将发表按文献 15 中的表式计算得到的

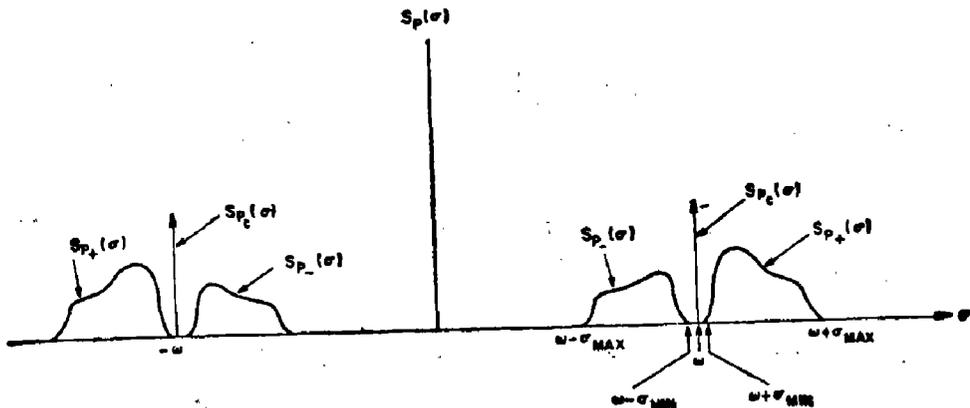


图 2 由式(39)和式(40)给出的声功率谱密度的图示

一般的方向频率谱的数值结果。

我们注意到一般说  $S_{P+}(\sigma) \neq S_{P-}(\sigma)$ , 但是文献 7, 15, 21 的作者们已发现当源和接收器置于同一深度  $z=z'$  时, 相对于载频的上, 下多卜勒边带的强度是相等的, 即  $S_{P+}(\sigma) = S_{P-}(\sigma)$ , 这一结果很有趣并引出了许多问题, 如“为什么”这情况看来总会发生。现在我们能够解释这个“为什么”, 至少可用数学术语来解释。其原因部分在于 IIIA 节(30)式中表明互易性质。交换源和接收器的位置接收到的信号相同, 只要声源频率和海面波浪表式(不管是什么)保持不变。在这种情况下当源和接收器位置交换时, 接收处的声功率谱必定保持不变。图 3(a), 3(b)说明了这种情况, 图中我们向海面俯视相距为  $\rho$  的源和接收器。图 3(a)中源深度为  $z'$ , 接收器深度为  $z$ , 而图 3(b)中源深度为  $z$ , 接收器深度为  $z'$ 。图 3(b)中为了使源点仍位于坐标原点我们作了坐标变换, 因而把水平面内的坐标重新取名为  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ 。考察(35b)式发现如果令

$$\bar{x} = -\bar{x} \quad \bar{y} = -\bar{y} \quad (41a)$$

则

$$\tilde{Q}_{1\pm}(\bar{x}, \bar{y}, z', 0, 0, z, k, \Gamma/k) = \tilde{Q}_{1\pm}(-\bar{x}, -\bar{y}, z', 0, 0, z, k, \Gamma/k) \quad (41b)$$

这意味着如果我以垂直方向为轴把接收器转过  $\pi$  弧度, 那末上下多卜勒边带系统函数就要对换, 由(40d)式可知  $S_{P+}$  和  $S_{P-}$  同样也要对换。从图 3(b)到图 3(c)就表示了这种对换, 图 3(c)中我们重新把  $-\bar{x}$  称为  $x$ ,  $-\bar{y}$  称为  $y$ 。现在把图 3 中的 (a)与(c)相比, 发现接收器与源的深度如同边带一样也作了交换。所以如果源和接收器的深度相同  $z=z'$ , 那两边带也必然相同,

$$S_{P+}(\sigma) = S_{P-}(\sigma)$$

### C 小结——III 节

本节得到的结果有如下特点:

- (1) 可直接由 Helmholtz 积分方程利用小波高近似得出,
- (2) 没有使用 Kirchhoff 近似,
- (3) 在空间上和频率域上都是普遍有效的,
- (4) 与文献 7 和 15 由微分方程出发利用小波高近似得到的结果一致。
- (5) 预见到边带一般是不对称的,
- (6) 可用来评价在使用 Kirchhoff 近似的同时又使用小波高近似这样所得的近似结果的质量。

上面最后一条(6)是第 IV 节要讨论的内容。

## IV 在 Kirchhoff 近似下的小波高解

本节的目的是要讨论 II 节中的 Kirchhoff 近似和 IV 节中普遍有效的近似之间的联系。

在 II 中我们导出了两种公式, 即对平均表面以及对自由表面的小振幅海面的 Kirchhoff 近似公式。前一个公式(23)比后一个严格, 这是因为前者是利用泰勒级数展开得到解析连续的边界条件而后者为了得到所要的结果式(27)和(28)使用了 ad hoc 方法, 这后面的两公式取自其它文献。

Ⅲ节中我们从 Helmholtz 积分公式出发不使用 Kirchhoff 近似求得了普遍适用的解, 式(35)和(36), 这些结果与文献7和15中直接由微分方程出发得到的微扰解相同。

在 IVA 中我们将把平均平面的 Kirchhoff 近似公式(23)与普遍适用的结果, 式(35)和(36), 作比较。在 IVB 中我们将对自由表面的 Kirchhoff 近似公式作类似的比较。在 IVC 中我们将作些一般的评论并把我们的结论小结一下。

#### A 平均表面公式

利用附录 A 的方法可把(23b)和(23c)式改写成类似于Ⅲ节中(35)和(36)式的形式。边带的结果仍由(35)式给出但其中的

$$\tilde{Q}_{1\pm} = \left( \mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma}{k} \right) = \frac{k}{8\pi^2} \iint_{\Sigma} \left( \frac{\pm i\Gamma}{k} \cdot \frac{i\zeta_{\pm}}{\mu_{10}\mu_{11\pm}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_{11\pm}}{\mu_{10}} \right) \times \exp[ik(\xi x + \eta y + \mu_{10}z + \mu_{11\pm}z')] d\xi d\eta \quad (42a)$$

这里  $\zeta_{\pm} = (\xi \mp \Gamma_x/k)x_0 + (\eta \mp \Gamma_y/k)y_0$  (42b)

$\mathbf{x}_0$  和  $\mathbf{y}_0$  分别是  $x$  和  $y$  方向的单位矢量。把(42a)式和(35b)式相比就可看出两边带系统函数  $\tilde{Q}_{1\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k)$  的差别。这一差别归因于在求得(42a)式的过程中使用了 Kirchhoff 近似。如同第三节中说明的, 式(35a)和(35b)在小波高近似的范畴内是严格的。这样在进行严格的小波高展开的同时, 使用 Kirchhoff 近似将引进误差, 其量级为  $O(\Gamma/k) = O(\lambda/\Delta_{\min})$ , 具体体现于(42a)式的括号中的项, 但是在  $\Gamma/k \rightarrow 0$  的极限情况下(42a)式趋于(35b)式。

$$\lim_{\Gamma/k \rightarrow 0} \left( \frac{\pm i\Gamma}{k} \cdot \frac{i\zeta}{\mu_{10}\mu_{11\pm}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_{11\pm}}{\mu_{10}} \right) = 1$$

这样我们可得出结论: 作小波高近似的同时, 如果还使用了 Kirchhoff 近似将导致其结果在频域上不是普遍有效的, 只适用于  $\Gamma/k \rightarrow 0$  的极限情况。而且, 在这极限情况下相对于载频的两边带幅度相等,  $\tilde{Q}_{1+} \rightarrow \tilde{Q}_{1-}$ , 这是因为:

$$\lim_{\Gamma/k \rightarrow 0} \mu_{11+} = \lim_{\Gamma/k \rightarrow 0} \mu_{11-} = \mu_{10}$$

用同样的方法可以证明: 式(23c)具有式(36a)的形式,  $\tilde{Q}_{20}$  的表式不同于(36b)式, 因被积函数中还包含有另外的  $O(\Gamma/k)$  量级的项, 因而载频修正项也只是在  $\Gamma/k \rightarrow 0$  的极限情况下有效。

#### B 自由表面公式

式(27)和(28)分别是文献8和9中得到的公式, 我们已经指出过, 在求得它们的过程中没有用正规的展开方法而用了 ad hoc 方法。尽管这样, 用 IVA 中引用的方法仍可以证明这些结果同样只有在  $\Gamma/k \rightarrow 0$  的极限情况下有效。事实上在这限度内, 自由表面公式与平均表面公式是等同的。

#### C 评论和结论——第 IV 节

许多作者讨论了 Kirchhoff 近似的有效性。文献22的作者研究了 Helmholtz 积分方程得到的对平面波散射问题的积分方程。他提出了 Kirchhoff 近似有效的充分条件, 即表面斜率以及声波长与表面曲率半径之比必须充分的小。这一充分条件可用另一形式表示成:

$$a/\Delta_{\min} \ll 1 \quad (43a)$$

$$a\lambda/\Delta^2_{\min} \ll 1 \quad (43b)$$

式(43a)和(43b)也可以解释成:如果表面波高充分小

$$a/\Delta_{\min} \rightarrow 0$$

那么声波长与表面波长可以同一量级即

$$\lambda/\Delta_{\min} = O(1)$$

但是如同我们已经证明了的,情况并非如此,正确的条件应该是

$$a \ll \lambda \ll \Delta_{\min} \quad (44)$$

Holford<sup>23</sup>也独立地得到了这一结论,他把由Kirchhoff近似得到的结果与平面波在正弦表面散射的严格解作了比较。

近来有些作者讨论了声功率谱的边带一般地说相对于载频在幅度上不对称这一事实。但他们的论据是建立在分析由(27), (28)这类表式得到的结果的基础上的,而这些表式又是借助于Kirchhoff近似导出的,然后这些公式只有在 $\Gamma/k \rightarrow 0$ 的情况下才是正确的,而这时边带在幅度上相对于载频是对称的,所以在 $\Gamma/k = O(1)$ 的情况下,由式(40d)以及边带系统函数 $Q_{1\pm}$ 的表式(35b)可正确地得到边带的不对称性。文献24给出了一组典型参数的功率谱图,我们应该注意到在那些图上,在非常靠近载频的频率处( $\Gamma/k \ll 1$ )边带在幅度上是相对于载频对称的。反映风速影响的更完整的一组数值结果将在以后的文章中给出。

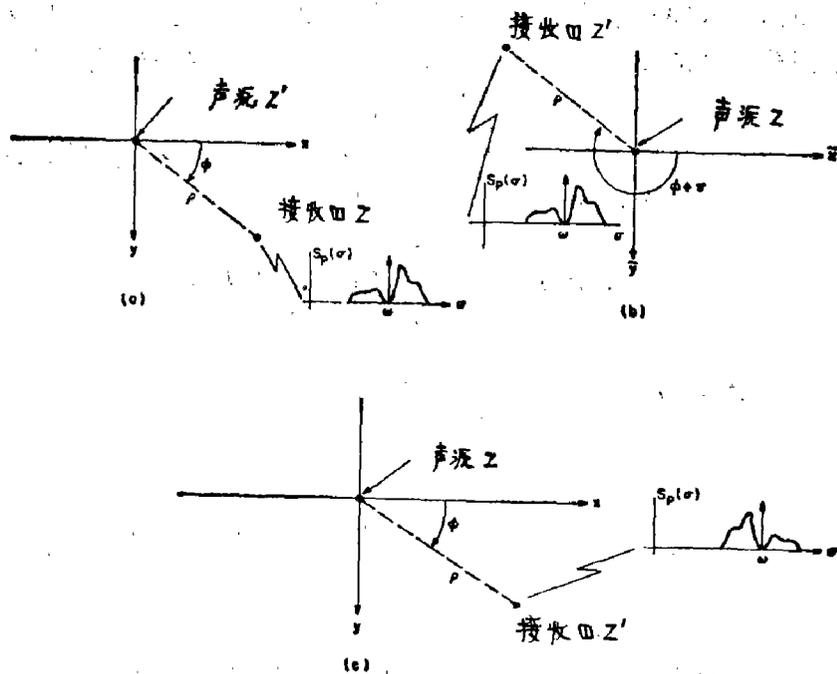


图3 声源和接收器的位置以及当 $z=z'$ 时相应的谱密度,它被用来证实边带相对于载频是对称的

## V Rayleigh Rice 展开

微扰法是经典物理学中的一种标准方法,它已以各种形式被用来求得小波高情况下的散射近似解1907年 Rayleigh<sup>25</sup>考虑平面波在周期表面的散射,他把有限幅度的表面和散射场表示成付里叶级数。散射场的这种表示方法可以解释成是一族离开表面行进的波,这些波的幅度待定,方向角是离散的满足经典的衍射光栅定律。这种表示方法(Rayleigh 假设)已被证明在适当的条件下是精确的<sup>26-28</sup>。在小表面幅度的假设下瑞利通过一种相当于把精确的边界条

件展开到一虚构平表面上的方法求得了未知系数的渐近近似值。1950年 Rice<sup>29</sup> 利用瑞利的方法求解了平面波在随机周期表面散射的问题，再近一些 Barrick<sup>30,31</sup> 利用 Rice 的方法求解了平面电磁波在运动随机表面上的散射问题。

虽然这中间的联系还不完全清楚，但文献 7, 15, 和 21(还可以见本文的 I 和 III 节)所使用的展开方法与 Rayleigh 和 Rice 使用的方法完全等效。在这些参考文献中，研究了点源激发的问题同时把(非周期)表面表示成(随机)付里叶积分(见 III 节)而不是付里叶级数。从概念上说这一差别并不是很重要的，因为付里叶积分可以看作为付里叶级数的极限情况。文献 7, 15 和 21 中的形式上的展开方法引出了一个边值问题的系列，没有作 Rayleigh 假设，但是所有这些边界问题解的总和，确实就是 Rayleigh 假设的形式。附录 C 中将更详细地给出这种联系。所以说上面所引的这些参考文献的结果是 Rayleigh 和 Rice 的原始结果在点源和运动随机表面的情况下的逻辑推广。

致谢

本文发表的研究工作是由海军研究室资助的编号为 480

### 附录 A: 声场的随机积分与表达

在本附录中概要地导出了边带场  $P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  和载频修正项  $P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  的随机积分表达。我们先说明一下因为式(32)形式的积分是在平均极限意义上定义的(如见文献 16 和 17)所以下面所需进行的积分次序的交换是允许的只要在平均意义上最终的结果是收敛的。作了某些适当的假设后，情况就是这样，关于这一点将不再进一步讨论。

联立(30)和(32)式可以导出  $P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  的表式(35)。因为  $Z(\rho, t)$  是实的，式(32)可等效地写成右边项与它的复共轭之和的一半，于是得到：

$$\begin{aligned}
 -(2\pi)^3 \exp[-i(\omega t + \gamma_0)] P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = & \iiint_{-\infty}^{\infty} F_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma) e^{-i\sigma t} H(d\Gamma d\sigma) \\
 & + \iiint_{-\infty}^{\infty} F_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma) e^{i\sigma t} H^*(d\Gamma d\sigma)
 \end{aligned} \tag{A1a}$$

这里

$$F_{1,2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma) = \frac{1}{2a} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\Gamma \cdot \mathbf{r}''} \left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} \times \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' dy'' \tag{A1b}$$

可见式(A1a)具有式(35a)的形式，剩下的任务是要证明函数  $F_{1,2}$  可以简化成式(35b)中函数  $Q_{1,2}$  的形式。这一点很容易做到，只要利用如下事实：

$$\left[ \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} = 2 \left[ \frac{\partial G_{-}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} \tag{A2a}$$

以及表达式

$$e^{i\omega t} G_{-}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t) = \frac{ik}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mu_{10}^{-1} \exp\{ik[\xi(x'' - x) + \eta(y'' - y) + \mu_{10}|z'' - z|]\} d\xi d\eta \tag{A2b}$$

利用恒等式：

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}[k(1-\xi^2)^{1/2}\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[ik(\rho^2+z^2)]}{4\pi(\rho^2+z^2)^{1/2}} e^{-ikt^2} dz$$

$$\rho = x^2 + y^2 \quad (\text{A3a})$$

和 
$$\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}\{k(1-\xi^2)^{1/2}[y''^2+(z''-z)^2]^{1/2}\} e^{-ik\eta y''} dy'' = \frac{2}{k} \mu_{10}^{-1} \exp(ik\mu_{10}|z''-z|)$$

(A3b)

这里  $H_0^{(1)}$  是第一类零阶汉克尔函数。通过消去四个积分就可以得到所要求的简化式：

$$F_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma) = (k/a) \tilde{Q}_{1*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k) e^{-2i\omega t} \quad (\text{A4})$$

为了建立  $P_{2c}$  的表式(36)我们将按导出式(35)同样的步骤去做。现在我们从式(15c)出发，把它与(32)式联立起来，使用与求  $P_1$  时同样的方法便能得到：

$$-(2\pi)^3 e^{-i\omega t} P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \iiint F_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma') e^{-i\sigma' t} H(d\Gamma' d\sigma')$$

$$+ \iiint F_4(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma') e^{i\sigma' t} H^*(d\Gamma' d\sigma') \quad (\text{A5a})$$

这里

$$F_{3,4}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma') = \frac{1}{2a} \iint e^{\pm i\mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'} \times \left[ \frac{\partial P_1(\mathbf{r}'', \mathbf{r}', t)}{\partial z''} \frac{\partial G_0(\mathbf{r}'', \mathbf{r}, t)}{\partial z''} \right]_{z''=0} dx'' dy''$$

(A5b)

$(\partial P_1/\partial z'')$  的积分表式很容易由(35a)和(35b)式得到，当把它与式(A5b)以及(A2a)和(A2b)联立起来便可以简化得到最后表式，只要利用  $\delta$  函数关系式：

$$(2\pi/k)^2 \delta(\xi \pm \Gamma_x/k - \xi') \delta(\eta \pm \Gamma_y/k - \eta')$$

$$= \iint \exp\left\{ ik \left[ x'' \left( \xi \pm \frac{\Gamma_x}{k} - \xi' \right) + y'' \left( \eta \pm \frac{\Gamma_y}{k} - \eta' \right) \right] \right\} dx'' dy'' \quad (\text{A6})$$

因而，函数  $F_{3,4}$  可写成：

$$e^{i(\omega \mp \sigma' t)} F_3(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, \Gamma') = -\frac{e^{i\gamma_0}}{16\pi^2 (2\pi)^3} \frac{ik^3}{a^2}$$

$$\times \iiint \exp[-i(\omega + \sigma \pm \sigma')t] K_3^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma'}{k}) H(d\Gamma' d\sigma)$$

$$- \frac{e^{i\gamma_0}}{16\pi^2 (2\pi)^3} \frac{ik^3}{a^2} \iiint \exp[-i(\omega - \sigma \pm \sigma')t]$$

$$\times K_3^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \frac{\Gamma'}{k}) H^*(d\Gamma' d\sigma) \quad (\text{A7a})$$

这里

$$K_3^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma'/k) = \iint \mu_{10} \exp\{ ik [ (\xi \pm \Gamma_x'/k) x$$

$$+ (\eta \pm \Gamma_y'/k) y + \mu'_{11\pm} z + \mu_{11\pm} z' ] \} d\xi d\eta \quad (\text{A7b})$$

$$K_3^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma'/k) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \mu_{10} \exp\{ik[(\xi \pm \Gamma'_x/k)x + (\eta \pm \Gamma'_y/k)y + \mu'_{11\pm}z + \mu_{11-z}']\} d\xi d\eta \quad (\text{A7c})$$

式中  $\mu_{11\pm}'$  是在  $\mu_{11\pm}$  中以  $\Gamma'$  代替  $\Gamma$ 。

略加思考可发现联立式(A7)和(A5a)时得到的  $P_2$  的结果表式中将包括含有载频(源频)项和边带频率的项。因而  $P_2$  的最终表式可写成:

$$P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = P_{2c}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) + P_{2s}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \quad (\text{A8})$$

这里  $P_{2c}$  由式(36)给出,  $P_{2s}$  是  $P_2$  中含边带频率的部分, 在我们所采用的截取方法中不予考虑(如在 IIIA 中指出的), 但是为了完整起见, 我们指出如果从式(A8)中去掉随机相位因子  $\exp(i\gamma_0)$ , 那么剩下的项  $\exp(-i\gamma_0)P_2$  和  $\exp(-i\gamma_0)P_{2s}$  分别是随机过程  $\exp(-i\gamma_0)P_2$  的平均值和具有零平均值的部分。作(36a)式指出的期望运算并同时利用(34)式可以形式上得到分解式(A8)中的第一项。为了得到  $P_{2s}$  的积分表式必须借助于随机积分的定义(见文献 16 和 17)。可以证明结果是若干项之和, 每一项是一个 6 重或小于 6 重的 Ito 随机积分(见文献 17)。

### 附录 B 声压的功率谱密度

式(38b), (39)和(40)可通过一个直接的形式上的代数运算导出, 它一开始应用(38a), 及(37)式, (37)式右边的三项分别由式(9)和(15a), (35), 以及(36)给出。在这运算中对  $P$  取实部的最方便的办法是把它写成

$$\text{Re}P = \frac{1}{2}(P + P^*)$$

在对(38a)式右边展开时可以作许多简化这是由于  $Z$  是一个零均值的随机过程[式(34a)], 它与随机变量  $\exp(i\gamma_0)$  是统计独立的。通过某些我们没有在这里写出的简单的运算很容易得到(39)式的第一项以及式(40a)——(40c)。

(39)式剩余项以及(40)式的推导稍微复杂一些。这些项可通过估算表式如  $EP_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)P_1^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t+\tau)$  得到。当把(35a)式代入这一表式, 利用式(34)并考虑到,

$$\widetilde{Q}_{1\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k) = \widetilde{Q}_{1\mp}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k - \Gamma/k) \quad (\text{B1})$$

可以得到:

$$EP_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)P_1^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t+\tau) = \frac{2}{(2\pi)^3} \times \iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{a}\right)^2 |\widetilde{Q}_{1+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k)|^2 S_{z_z}(\Gamma, \sigma) e^{i(\omega+\sigma)\tau} d\Gamma d\sigma + \frac{2}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k}{a}\right)^2 |\widetilde{Q}_{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k)|^2 \times S_{z_z}(\Gamma, \sigma) e^{i(\omega-\sigma)\tau} d\Gamma d\sigma \quad (\text{B2})$$

作某些简单的变量变换, 利用  $S_{z_z}$  的对称性质:

$$S_{z_z}(\Gamma, \sigma) = S_{z_z}(-\Gamma, -\sigma)$$

并把对  $\sigma$  的积分分成两个积分区域,  $(-\infty, -\omega)$  和  $(-\omega, \infty)$  式(B2)可以改写成,

$$EP_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)P_1^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t+\tau) = \frac{4}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\omega} \left(\frac{k}{a}\right)^2 |\widetilde{Q}_{1+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k)|^2$$

$$\begin{aligned} & \times S_{z_1}[\Gamma, -(\sigma + \omega)] \times e^{-i\sigma\tau} d\Gamma d\sigma + \frac{4}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2}{a} |\tilde{Q}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', k, \Gamma/k)|^2 \\ & \times S_{z_1}[\Gamma, (\sigma + \omega)] e^{-i\sigma\tau} d\Gamma d\sigma \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

把这表示式与它的复共轭联立起来就可求得式(39)和(40)中所求得的那些项。

### 附录 C Rayleigh-Rice 展开与 I 和 III 节的结果之间的等价性

考察式(35a), (35b), (A5a)和(A7)中的积分表达式可以清楚地看到这一事实, 即文献 7, 15 和 21 的结果或与其等效的 I 和 III 节的结果可以通过适当的推广 Rayleigh 对平面波散射所假设的形式来得到。在本附录中将把我们的结果改写成一种能反映出它是 Rayleigh 假设解在点源激发和运动随机表面情况的推广的形式。

我们从式(35a)和(35b)给出的一阶场  $P_1$  的表式出发把式(35b)代入(35a)并简单地改变对  $\xi$  和  $\eta$  积分的积分变量, 就得到

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = & \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} P_1^{(1)}(d\Gamma d\sigma) \exp\left\{ ik \left[ \left( \xi + \frac{\Gamma_x}{k} \right) x \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \eta + \frac{\Gamma_y}{k} \right) y + \mu_{11-z} \right] - i(\omega + \sigma)t \right\} d\xi d\eta \\ & + \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} P_1^{(2)}(d\Gamma d\sigma) \exp\left\{ ik \left[ \left( \xi - \frac{\Gamma_x}{k} \right) x \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \eta - \frac{\Gamma_y}{k} \right) y + \mu_{11+z} \right] - i(\omega - \sigma)t \right\} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{C1a})$$

这里随机集函数  $P_1^{(1,2)}$  定义为:

$$P_1^{(1)}(d\Gamma d\sigma) = -k^2(8\pi^2 a)^{-1}(2\pi)^{-3} \times \exp[i(k\mu_{10}z' + \gamma_0)] H(d\Gamma d\sigma) \quad (\text{C1b})$$

$$\text{和} \quad P_1^{(2)}(d\Gamma d\sigma) = -k^2(8\pi^2 a)^{-1}(2\pi)^{-3} \times \exp[i(k\mu_{10}z' + \gamma_0)] H^*(d\Gamma d\sigma) \quad (\text{C1c})$$

很明显式(C1a)可以解释为平面波谱的叠加(谱是连续的, 因为这时表面是非周期和随机的, 声源是点源辐射体而不是单一平面波的情况), 那些  $\mu_{11\pm}$  为正实数的平面波离开表面  $z=0$  传播, 而  $\mu_{11\pm}$  为正虚数的平面波很快衰减。我们接着讨论两阶声压, 考察(A5a)和(A7)式, 发现  $P_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  可以表示成与(C1a)式的  $P_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  同样的形式, 只要对随机集函数  $P_1^{(1,2)}$  用如下随机集函数代入:

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(d\Gamma d\sigma, t) = & ik^3(16\pi^2 a^2)^{-1}(2\pi)^{-6} \\ & \times e^{i\gamma_0} \left[ \mu_{10} \exp(ik\mu_{11+z'}) \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma't'} H(d\Gamma' d\sigma') \right. \\ & \left. + \mu_{10} \exp(ik\mu_{11-z'}) \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma't'} H^*(d\Gamma' d\sigma') \right] H(d\Gamma d\sigma), \end{aligned} \quad (\text{C2a})$$

和

$$\begin{aligned} P_2^{(2)}(d\Gamma d\sigma, t) = & ik^3(16\pi^2 a^2)^{-1}(2\pi)^{-6} \times e^{i\gamma_0} \left[ \mu_{10} \exp(ik\mu_{11+z'}) \right. \\ & \left. \times \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma't'} H(d\Gamma' d\sigma') + \mu_{10} \exp(ik\mu_{11-z'}) \right. \end{aligned}$$

$$\times \left[ \int \int \int e^{i\sigma' t} H(d\Gamma' d\sigma') \right] H^*(d\Gamma d\sigma) \quad (C2b)$$

我们注意到随机集函数现在以时间为参数，因为它们必须满足运动表面的边界条件。我们再次重复附录 A 末尾的说明，即我们现在对随机积分的处理是形式上的，借助 Ito 随机积分可给出最终结果的意义。

由上面的推导可知所有小波高微扰展开级数中的更高阶项都可以表示成(O1)的形式。这样我们确定了第 V 节指出的 Rayleigh-Rice 方法与直接微扰方法之间的等价性。

事实上，对本文讨论的问题用 Reigh-Rice 方法求解时，首先假设  $P(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  是形如(O1)式的表式与对光滑平表面的声压  $P_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$  之和，然后用微扰法计算随机集函数，这样就重新得到 III 节的结果。

#### 注释与参考文献

1. 假设海面是一个低通过程，其功率谱密度的截止频率为  $\sigma_{\max}$ 。
2. 这一假设将由随后的分析证明。

#### 参 考 文 献

- [1] The ocean surface is assumed to be a low-pass process with a power spectral density having a cutoff frequency  $\sigma_{\max}$ .
- [2] This assumption will be borne out by subsequent analysis.
- [3] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, New York, 1965), pp. 374—375 and pp.380—381.
- [4] Yu. P. Lysanov, "On the field of a point radiator in a laminar-inhomogeneous medium bounded by an uneven surface," *Sov. Phys.-Acoust.* 7, 255—257 (1962).
- [5] E. Y. Harper and F. M. Labianca, "Perturbation theory for scattering of sound from a point source by a rough surface in the presence of refraction," *J. Acoust. Soc. Am.* 57, 1044—1051 (1975).
- [6] Yu. P. Lysanov, "Theory of the scattering of waves at periodically uneven surfaces," *Sov. Phys.-Acoust.* 4, 1 (1958).
- [7] E. Y. Harper and F. M. Labianca, "Scattering of sound from a point source by a rough surface progressing over an isovelocity ocean," *J. Acoust. Soc. Am.* 58, 349—364 (1975).
- [8] C. Eckart, "The scattering of sound from the sea surface," *J. Acoust. Soc. Am.* 25, 566—570 (1953).
- [9] B. E. Parkins, "Reflection and scattering from a time-varying rough surface—the nearly complete Lloyd's mirror effect," *J. Acoust. Soc. Am.* 49, 1484—1490 (1971).
- [10] The integration can be carried out by making use of Eqs. (A3a) and (A3b) of Appendix A.
- [11] C. S. Clay and H. Medwin, "Dependence of spatial and temporal correlation of forward-scattered underwater sound on the surface statistics. I. Theory," *J. Acoust. Soc. Am.* 47, 1412—1418 (1970).
- [12] L. L. Scharf and R. L. Swarts, "Acoustic scattering from a stochastic sea surface,"

- J. Acoust. Soc. Am. 55, 247—253 (1973).
- [13] F. B. Tuteur and H. Tung, "Asymmetric Doppler amplitudes in the surface scatter channel (A)," J. Acoust. Soc. Am. 59, S89(A) (1976). The details of the work described in this abstract are available in Technical Report No. CS7 (1 April 1976) of the Engineering and Applied Science Department of Yale University.
- [14] J. F. McDonald F. B. Tuteur, and J. G. Zornig, "Spatial interfrequency correlation effects in a surface-scatter channel," J. Acoust. Soc. Am. 59, 1284—1293 (1976).
- [15] F. M. Labianca and E. Y. Harper, "Asymptotic theory of scattering by a rough surface progressing over an inhomogeneous ocean," J. Acoust. Soc. Am. 59, 799—712 (1976).
- [16] A. M. Yaglom, *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962), Chap. 2.
- [17] E. Wong, *Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971), Chap. 7.
- [18] O. M. Philips, *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge University, Cambridge, 1966). pp. 74—75.
- [19] F. M. Labianca and T. T. Kadota (unpublished). This reference, currently in preparation, treats the gravity-wave excitation problem and clarifies certain points concerning the dispersion relation which have not been considered in the current literature.
- [20] L. B. Felsen and N. Marcuvitz, *Radiation and Scattering of Waves* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973), pp. 428—429.
- [21] F. M. Labianca and E. Y. Harper, "Sideband structure of sound from a harmonic point source scattered by a rough surface moving over an upward-refracting ocean," J. Acoust. Soc. Am. 61, 378—389 (1977).
- [22] W. C. Meecham, "On the use of the Kirchhoff approximation for the solution of reflection problems," J. Rational Mech. Anal. 5, 232—333 (1956).
- [23] R. L. Holford, unpublished Bell Laboratories work.
- [24] E. Y. Harper and F. M. Labianca, "Erratum: Scattering over an isovelocity ocean," J. Acoust. Soc. Am. 59, 484 (1976).
- [25] Lord Rayleigh, "On the dynamical theory of gratings," Proc. Roy. Soc. A79, 399 (1907). Also in *Scientific Papers* (Dover, New York, 1964), Vol. V, p. 388.
- [26] R. F. Millar, "On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface," Proc. Cambridge Philos. Soc. 65, 773 (1969).
- [27] R. F. Millar, "The location of singularities of two-dimensional harmonic functions. I and II," SIAM J. Math. Anal. 1, 333 (1970).
- [28] R. F. Millar, "On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface. II," Proc. Cambridge Philos. Soc. 69, 217 (1971).
- [29] S. O. Rice, "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces," in *The Theory of Electromagnetic Waves, A Symposium* (Interscience, New York, 1951), pp. 351—378.
- [30] D. E. Barrick, "Remote sensing of sea state by radar," in *Remote Sensing of the Troposphere*, edited by V. Derr (U. S. GPO, Washington, DC, 1972) Chap. 12.
- [31] D. E. Barrick, "First-order theory and analysis of MF/HF/VHF scatter from the sea," IEEE Trans. Antennas Propag. AP-20, 2—10 (1972).
- [32] See Ref. 20. p. 481.
- [33] T. T. Kadota, unpublished Bell Laboratories work.

译自 J. A. S. A. Vol.62, No.5 1977, P.1144—1157

(金国亮译 吴承义 贺邦正校)