

高浓度悬浮液声学特性的探讨

孙承维 魏墨鑫

(同济大学声学研究室)

关于低浓度悬浮液的声学特性,过去已有很多文献进行过讨论,本文着重于高浓度悬浮液的讨论。文中根据波长远大于粒径($ka \ll 1$)条件下悬浮液小体元内固、液二部分应力相等的假设,以及粘滞流体与固体颗粒之间发生相对运动时的附加质量和粘滞阻力的概念,探讨了悬浮液在粘滞性作用下的声学特性。

本文的结果显示了超声技术应用于悬浮液参数测量方面的前景。

一、引言

固体颗粒分散在液体中形成的混合物称为悬浮液。有不少学者从事过研究悬浮液声学特性的工作,其中理论方面比较典型的是 Epstein^[1] 的稀悬浮液衰减理论。Epstein 分析了弹性小球在粘滞流体中对平面声波的散射和透射,计算了稀悬浮液中的粘滞吸收和散射吸收。张淑仪^[2]曾对其中散射吸收部分作过重要修正。实验方面做过工作的主要有: Urlick^[3], Stakutis^[4]、张淑仪和 Hampton^[5] 等人。然而,迄今为止对高浓度悬浮液中声衰减的理论和实验工作做得还比较少,尚未得到圆满的结果,但在生产和水文工作方面经常遇到浓度较高的悬浮液,如煤粉和油的混合燃料中煤粉体积浓度可达 15%,黄河水中泥砂的体积含量甚至高达 40% 以上。因此,为了将超声技术应用于对高浓度悬浮液的浓度、悬浮颗粒粒径等参数的测量,就必须进一步深入研究高浓度悬浮液的声学特性。

本文参照 Biot^[6] 对海洋沉淀物声学特性的理论研究,从分析固体和流体之间的动力作用着手,探讨了高浓度悬浮液的粘滞衰减和悬浮液的声速理论。理论计算值和泥砂悬浮液所得之实验值能较好相符。

二、高浓度悬浮液的粘滞衰减、声速理论

我们研究的是小振幅、较低频率的超声波,因此声场中液体的流动属于层流;在粒径远小于波长条件下,悬浮液在宏观上是各向同性的、均匀的;并假定悬浮液中固体颗粒不相互接触,因此悬浮液(以水作悬浮剂时)的切变模量很小,切变波可以忽略。

设平面波沿 x 轴方向传播,质量为 ρ 的悬浮液单位小体元的动能 T 和耗散函数 D 分别为:

$$T = \frac{1}{2} (\rho_{11} \dot{u}_p^2 + 2\rho_{12} \dot{u}_p \dot{u}_l + \rho_{22} \dot{u}_l^2) \quad (1)$$

$$D = \frac{b}{2} (\dot{u}_p - \dot{u}_l)^2 \quad (2)$$

式中: u 是位移,脚标 p 和 l 分别指固、液二部分, ρ_{11} 和 ρ_{22} 分别是小体元中固、液二部分的有效质量, ρ_{12} 是互感质量, b 是阻力系数。

根据拉格朗日方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_p} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_p} = q_p \quad (3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_l} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}_l} = q_l \quad (3b)$$

式中: q 是广义力。

当波长远大于悬浮颗粒粒径($ka \ll 1$)时,小体元中固、液二部分的应力近似相等,因此悬浮液体积压缩系数 K 和声压 P_0 为:

$$K = K_1 C_l + K_p C_p \quad (4)$$

$$P_0 = -\frac{1}{K} \left(C_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + C_l \frac{\partial u_l}{\partial x} \right) \quad (5)$$

式中: C 是体积浓度。

$$\text{因而: } q_p = C_p \times \left(-\frac{\partial P_0}{\partial x} \right) \quad (6a)$$

$$q_l = C_l \times \left(-\frac{\partial P_0}{\partial x} \right) \quad (6b)$$

将上面式子代入式(3a)和(3b)后得到在有耗散情况下悬浮液中平面波的传播方程:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \ddot{u}_p + \rho_{12} \ddot{u}_l + b(\ddot{u}_p - \ddot{u}_l) \\ = \frac{C_p}{K} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_p u_p + C_l u_l) \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} \rho_{12} \ddot{u}_p + \rho_{22} \ddot{u}_l + b(\ddot{u}_l - \ddot{u}_p) \\ = -\frac{C_l}{K} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_p u_p + C_l u_l) \end{aligned} \quad (7b)$$

从式(7a)和(7b)可以看到悬浮液中固体颗粒的运动不但受到粘滞流体的作用,而且还受到其他固体颗粒的作用,这反映了高浓度悬浮液的特点。将式(7a)和(7b)相加得到:

$$\begin{aligned} (\rho_{11} + \rho_{12}) \ddot{u}_p + (\rho_{12} + \rho_{22}) \ddot{u}_l \\ = \frac{1}{K} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C_p u_p + C_l u_l) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)表明耗散力是体元内力,式(8)右边等于小体元所受外力,而左面表示固、液二部分产生了不同的加速度,由此可得:

$\rho_{11} + \rho_{12} = \rho_1$; $\rho_{12} + \rho_{22} = \rho_2$; $\rho_1 + \rho_2 = \rho$;
式中: ρ_1 和 ρ_2 分别为小体元中固、液二部分的质量。从(7a)和(7b)式可以得出的另一个重要结论是:在声场中悬浮液固、液之间无相对运动的条件是二者的密度必须相等,即: $\rho_p = \rho_l$ 。

我们从粘滞流体中振荡小球的阻力公式(即 Stocks 公式)

$$F = -m_l \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a} \right) (\ddot{u}_p - \ddot{u}_l)$$

$$+ \frac{9}{4\beta a} m_l \omega \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right) (\dot{u}_p - \dot{u}_l)$$

得出互感质量 ρ_{12} 和阻力系数 b 的近似表达式:

$$b = \theta \rho_l \omega C_p; \quad \rho_{12} = -\tau \rho_l C_p \quad (10)$$

式中: ω 是圆频率; $\theta = \frac{9}{4\beta a} \left(1 + \frac{1}{\beta a} \right)$;

$\tau = \frac{1}{2} + \frac{9}{4\beta a}$; a 是球粒半径; $\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\mu}}$;

μ 是液体运动粘滞系数。

设方程(7a)和(7b)的解为:

$$u_p = n_1 \exp(i(\omega t - kx)) \quad (11a)$$

$$u_l = n_2 \exp(i(\omega t - kx)) \quad (11b)$$

将式(10)和式(11)一起代入方程(7a)和(7b),消去 n_1 和 n_2 ,由平面波的复数波数 k 得到振幅衰减系数 α 和声速 $v_{s,p}$ 分别为:

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{C_p C_l^2 \theta \omega \rho_l (1 - \sigma)^2}{\sqrt{2(\theta^2 + Q^2)}} \cdot \sqrt{\frac{K}{\rho}} \\ \cdot \sqrt{\frac{1}{\theta^2 + PQ + \sqrt{(\theta^2 + P^2)(\theta^2 + Q^2)}}} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} v_{s,p} = \frac{1}{\sqrt{K\rho}} \\ \cdot \sqrt{\frac{2(\theta^2 + Q^2)}{\theta^2 + PQ + \sqrt{(\theta^2 + P^2)(\theta^2 + Q^2)}}} \end{aligned} \quad (13)$$

式中: $P = \frac{\rho_p C_l}{\rho} + \tau$; $Q = \sigma C_l^2 + C_l C_p + \tau$;

$\sigma = \rho_p / \rho_l$ 。

在以上理论计算中只考虑了液体的粘滞作用,未涉及声波的散射作用,因而式(12)是高浓度悬浮液的粘滞衰减公式(以下简称高浓度公式)。

下面对上述理论进行一些讨论。我们把 $\beta a \ll 1$ 和 $\beta a \gg 1$ 分别作为低频区域和高频区域:

1) 当浓度 C_p 趋于零时,高浓度公式化为 Epstein 的稀悬浮液粘滞衰减公式,所以

在低浓度时衰减随浓度增大而线性增加；根据高浓度公式，当浓度增大时，粘滞衰减系数 α 有极大值出现。

低频时高浓度公式化为：

$$\alpha = \frac{C_p C_l^2 \rho_l (1 - \sigma)^2}{9\mu} \cdot \sqrt{\frac{K}{\rho}} \cdot \omega^2 a^2$$

这时粘滞衰减和频率的平方成正比，和粒径平方成正比。计算得出，泥砂悬浮液的衰减极大值在 $C_p \approx 28\%$ 。

高频时高浓度公式化为：

$$\alpha = \frac{9}{4} C_p C_l^2 \rho_l (1 - \sigma)^2 \sqrt{\frac{KQ\mu}{2\rho P}} \cdot \frac{\sqrt{\omega}}{a}$$

这时粘滞衰减和频率的 $1/2$ 次幂成正比，和粒径成反比。计算得出，泥砂悬浮液的衰减极大值在 $C_p \approx 52\%$ 。数值计算表明衰减极大值峰随 βa 值增大向高浓度方向移动。

2) 将悬浮液声速公式——式(13)对 (βa) 求导，所得导数大于零，所以声速随频率和粒径单调增加。

低频时：
$$v_{s,p} = \frac{1}{\sqrt{K\rho}}$$

这就是 Wood^[7] 声速公式。由 Wood 公式计算，泥砂悬浮液声速极小值在 $C_p \approx 35\%$ 时出现。

高频时：
$$v_{s,p} = \frac{1}{\sqrt{K\rho}} \cdot \sqrt{\frac{Q}{P}}$$

这时声速 $v_{s,p}$ 随浓度 C_p 单调增加。数值计算表明随 βa 值增大，声速极小值峰向低浓度方向移动，逐渐消失。

三、泥砂悬浮液实验及讨论

1. 实验装置、测量方法和泥砂样品

实验测试装置方框图如图 1 所示。超声信号采用射频脉冲，宽度为 15 个波。声速和衰减测量都以蒸馏水为基准。泥砂悬浮液在测量前经过一次抽真空手续，目的是为了除去泥砂中的微小气泡，实验表明这些气泡对测量的影响极大。为防止泥砂沉降，测量时要不断翻动样筒。

实验用泥砂原料由山西省水文局提供，制成的实验样品的粒径分布如图 2 所示，平均粒径为 10.4μ 。

2. 衰减-浓度关系实验

实验频率为 213KC，以平均半径 $a = 5.2\mu$ 计算则 $\beta a = 4.2$ 。因为 $ka \ll 1$ ，所以散射衰减可以忽略。实验浓度范围为 $0 \sim 40\%$ ，结果如图 3 所示。图中理论值计算时采用的参数数值为： $\rho_l = 1000$ 公斤/米³； $K_l = 4.63 \times 10^{-10}$ 米²/牛顿； $\rho_F = 2650$ 公斤/米³； $K_p = 2.78 \times 10^{-11}$ 米²/牛顿； $\mu = 10^{-6}$ 米²/秒。

高浓度公式——式(12)和实验结果有一致的规律性：在实验的浓度范围内衰减随浓度单调增加。低浓度时衰减和浓度之间接近于线性关系，高浓度公式计算值略高于实验值；高浓度时实验衰减曲线的斜率逐渐变小，这时实验值高于高浓度公式计算值。

高浓度公式和 Epstein 粘滞衰减公式的

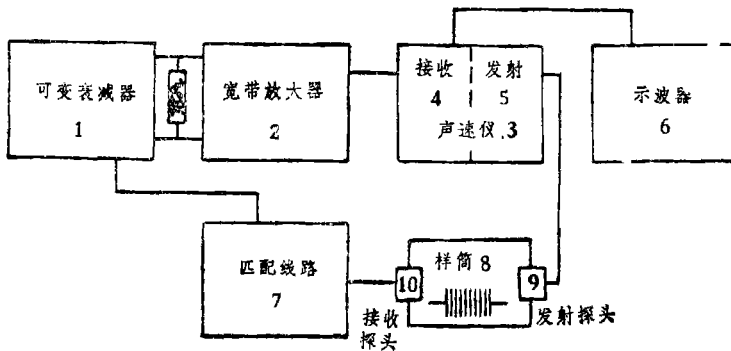


图 1 实验测试装置

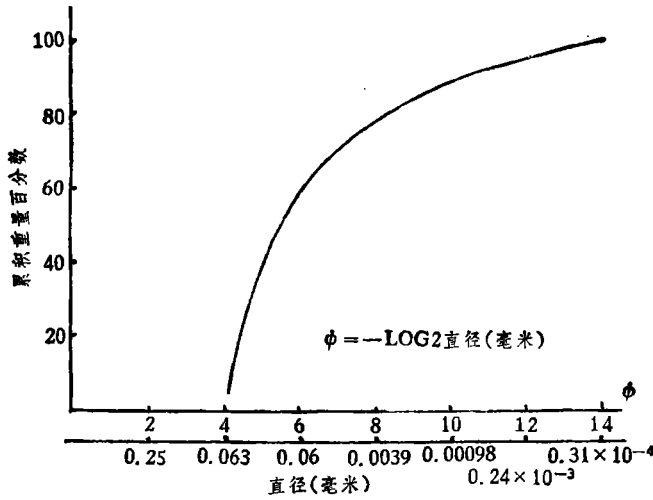


图2 泥砂样品粒径分布图

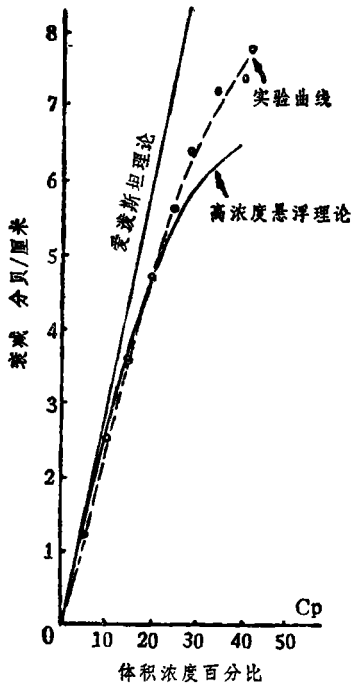


图3 泥砂悬浮液衰减-浓度关系

计算值，在低浓度时基本一致，高浓度公式值略低一些，而和实验结果更接近；高浓度时，Epstein公式和实验结果的定性规律发生矛盾，显然已不适用，而高浓度公式计算值和实验结果的最大偏差约为12%。由此可见，高浓度公式适用的浓度范围比Epstein公式大。

如果根据悬浮液声速随浓度的变化对实验结果作近场衍射修正，那末高浓度公式的计算值和实验结果将更加接近。

3. 衰减-频率关系实验

采用2.5MC、533KC和213KC三个频率，在5.1%、15.3%和25.0%三个浓度上分别进行实验，所得衰减和频率关系的实验平均值为 $f^{0.88}$ ，这和Hampton^[5]的实验结果大致相同。用高浓度公式计算得出的平均值为 $f^{0.83}$ ，略低于实验值，如果考虑衰减测量的实验误差，则可以认为二者基本一致。

4. 衰减-粒度关系实验

因为没有单一粒径的样品，所以只能对实验作定性分析。表1是实验结果。表2是选择有代表性的粒径进行的数值计算。二张表的粒度范围大致相同，频率都是2.5MC，浓度为10%。

表1是按平均粒径由小至大编号的。表1和表2总衰减值的共同规律是：随粒度增大，衰减值先逐渐下降，在 $ka \approx 0.2$ 时出现极小值，此后随粒度继续增大衰减值迅速增加。我们可以看到在表2范围($\beta a > 1$)内，随粒度增大粘滞衰减单调下降，而散射衰减却单调上升。当 $ka < 0.1$ 时粘滞衰减起决定作用，所以随粒度增大总衰减值下降。由此可见，

表1 衰减-粒径关系实验值

实验编号 No	1	2	3	4	5	6
粒径 (μ)	<38	<65	<90	38~65	65~90	125~250
ka	<0.2	<0.34	<0.47	0.20~0.34	0.34~0.47	0.65~1.31
衰减值(cm^{-1})	0.35	0.24	0.23	0.069	0.10	0.81

1、2、3号实验定性验证了高浓度公式在 $\beta a > 1$ 频率范围的粘滞衰减和粒度之间关系; 在 $ka > 0.4$ 时, 散射衰减起决定作用, 所以总衰减值随粒度增大而增大; 当 ka 值在0.2~

0.3左右时, 二种衰减因素比较接近, 处于过渡阶段, 所以出现了极小值。因而表2是对表1实验结果的定性解释。

表2中的粘滞衰减项是用高浓度公式计算的, 按推导时的假设高浓度公式适用范围是 $ka \gg 1$, 但因为加修正项之后的Epstein粘滞衰减公式可适用于较大的 ka 值, 且在表2的浓度和粒度范围高浓度公式和加修正项的Epstein公式的计算值几乎相等, 所以表2仍采用了高浓度公式的计算值。

表2 衰减-粒度关系计算值

半径 a (μ)	0.94	3.0	10	20	30	38	57	76
ka	0.010	0.032	0.11	0.23	0.32	0.40	0.60	0.80
βa	2.6	8.4	29	59	91	110	170	220
粘滞衰减 (cm^{-1})	0.88	0.35	0.11	0.053	0.038	0.030	0.021	0.016
散射衰减 (cm^{-1})	—	—	0.0038*	0.036*	0.098*	0.17	0.48	0.90
总衰减 (cm^{-1})	0.88	0.35	0.11	0.089	0.14	0.20	0.50	0.92

(*——按瑞利散射公式计算, 其余按普通散射公式(2)计算)

5. 声速-浓度、频率关系实验

实验频率为533KC和2.5MC, 浓度范围是0~40%。如图(4)所示, 实验规律是: 在相同浓度上2.5MC的声速大于533KC的声速, 533KC的声速大约在浓度为10%时出现极

小值, 而2.5MC的声速和浓度关系几乎没有极小值现象。悬浮液声速公式——式(13)所描述的声速与频率的关系、声速随浓度的变化规律和实验完全吻合。悬浮液声速公式的计算值高于实验值, 最大偏差为+2%; 而

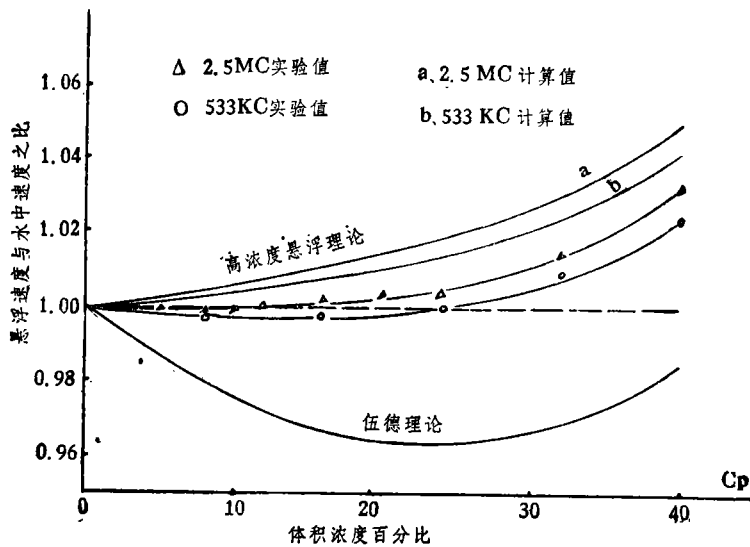


图4 泥砂悬浮液声速-浓度关系

Wood^[7] 声速公式的计算值则低于实验值,最大偏差达 -4%。

四、结 论

本文在波长远大于粒径 ($ka \ll 1$) 的条件下分析了悬浮液中固体颗粒和液体之间的动力作用,根据小体内固、液二部分应力相等的假设,以及粘滞液体与固体颗粒之间发生相对运动时的附加质量和粘滞阻力的概念,求出了高浓度悬浮液粘滞衰减公式和悬浮液声速公式。计算表明: Epstein 粘滞衰减公式是高浓度公式在低浓度时的简化形式,高浓度公式不但计入了流体对固体颗粒的作用,而且计入了固体颗粒相互间的作用,而 Wood 公式则是悬浮液声速公式在低频时的简化形式,悬浮液声速公式既表示出声速和浓度的关系,又表示出声速和频率的关系。

在 $ka \gg 1$ 而 $\beta a > 1$ 的频率范围进行了衰减-浓度关系实验、衰减-频率关系实验、衰减-粒度关系实验和声速-浓度、频率关系实验,比较广泛地验证了关于高浓度悬浮液声学特性的理论。实验表明:高浓度公式和 Epstein 粘滞衰减公式相比,不但适用的浓度

范围比较大,而且在低浓度时,高浓度公式的计算值也比 Epstein 公式的计算值更接近于实验结果。实验还表明悬浮液声速公式较 Wood 声速公式有所改进。

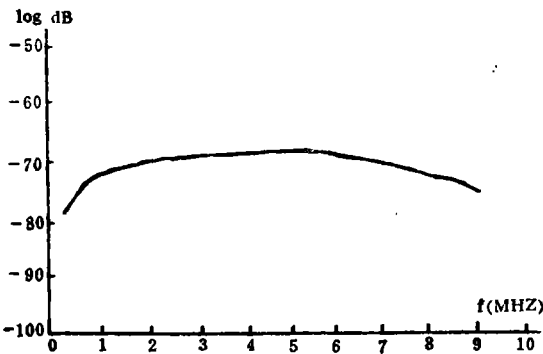
从本文可以知道,悬浮液的声学参量衰减、声速和悬浮液的浓度、悬浮颗粒粒径等重要参数之间在一定范围内存在单值关系,甚至是近似的线性关系,这充分显示了利用超声波进行悬浮液参数测量在水文工作和工农业生产方面具有广阔的应用前景。

应该指出,由于本文的推导过程中引入了许多简化假设,因此本文的结论只适用于这些简化假设近似成立的场合。本文并没有、也不可能全面解决高浓度悬浮液的声学特性问题,这尚有待于今后的进一步工作。

参 考 文 献

- [1] Epstein P. S. & Carhart, R. T., J. A. S. A. 25 (1953). 553.
- [2] 魏荣爵,张淑仪,物理学报, 21(1965), 1061.
- [3] Urlick, R. J., J. A. S. A., 20 (1948), 283.
- [4] Stakutis, V. J., Marse, R. W., Dill M. & Beyer, R. T., J. A. S. A., 27 (1955), 539.
- [5] Hampton A. D., J. A. S. A., 42 (1967), 882.
- [6] Biot M. A., J. A. S. A., 28 (1956), 168.
- [7] Urlick, R. J., J. App. Phys., 18 (1947), 983.

(上接第 14 页)



附图 2 美制微型探头频响曲线(根据出厂证书绘制)
(该频响曲线与本文中所测的灵敏度频响曲线之差别在于测量放大系统的影响)

在实验研究中,中国科学院上海有机化学研究所、五机部 53 所和温州压电元件厂向我们提供了性能良好的 PVDF 压电薄膜,本所副研究员蒋危平同志还给我们的工作以支持和帮助,谨致衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 马乐山、姚绍玉、董其瑾、蒋危平,全国超声显象技术学术交流会报告。1982.4.
- [2] Callerame J., Tancrell R. H. and Wilson D. T. 1978 Ultrasonics Symposium Proceedings, IEEE cat No 78CH 1344-SU, 117.
- [3] Bui L., Shaw H. J. and Zitelli L. G., Electron Letter 12, 16(1976) 393.
- [4] Swazty R. G. and Plummer J. D., IEEE Transactions on Electron Devices ED-26, 12 (1979) 1921.