超 声 板 波

强 盘 富

(上海超声波仪器厂)

计算数学中的伴随法不但是求解两维耦合振动问题的好方法，而且也能用来求解波的传播问题。本文中，作者同样从三维弹性普遍方程出发，只假定波是沿 x_1 方向传播，从而求得各向异性板中波的传播的频散方程和对应于各频率的传播模式。在板为各向异性时，质点在三个方向上的运动是互相耦合在一起的。当板为各向同性时，运动方程分解为独立的两组，一组只包含质点在 x_2 方向的运动，其对应的波型为 Love 型；另一组只包含 x_1 和 x_3 方向的运动，其对应的波型为 Lamb 型。

一、引 言

自从作者将计算数学中的伴随法引入两维耦合振动问题后，先后求解了振幅变换器[1]，压电陶瓷圆板[2-3]等的耦合振动问题，得到了比较满意的结果。本文中，作者想将此法引入另一类声学问题即声的传播问题。作为第一个例子，本文用此法具体地求解了超声在弹性板中的传播问题。

二、运动方程

由于讨论的问题是声波在板中的传播，故取直角坐标系最为适宜，并取与板面垂直的方向为 x_3 方向，与板面平行的方向分别为 x_1 和 x_2 方向。这样，三个方向上的运动方程就为：

$$
\begin{aligned}
\rho\ddot{u}_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}T_{11} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{12} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{13} \\
\rho\ddot{u}_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1}T_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{22} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{23} \qquad (1) \\
\rho\ddot{u}_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}T_{31} + \frac{\partial}{\partial x_2}T_{32} + \frac{\partial}{\partial x_3}T_{33}
\end{aligned}
$$

式中 ρ 为密度，$\ddot{u}_i$ 为沿对应方向上的加速度，

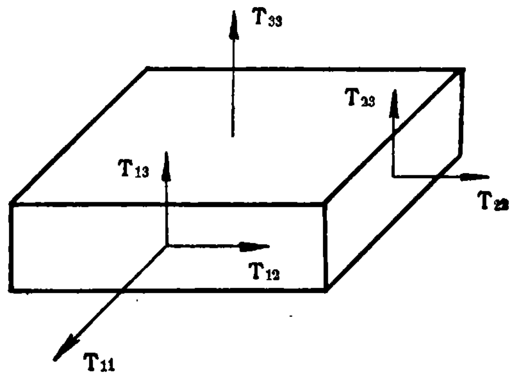

图 1 应力示意图

T_{ij} 为对应方向的应力。如果将其两个下脚标按习惯的方式合并为一个下脚标，则应力与应变有如下关系：

$$T_i = C_{ij}S_j \qquad i, j = 1\sim6 \qquad (2)$$

式中 S_j 为应变，若写出具体的形式则有：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \qquad S_2 = S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\
S_3 &= S_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
S_4 &= S_{23} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right\} \\
S_5 &= S_{13} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right\} \\
S_6 &= S_{12} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

而C_{ij}为弹性常数。

这里，我们假定声波是简谐波而且是沿着x_1方向传播的，因此有：

$$\ddot{u}_i = -\omega^2 u_1 \qquad (4)$$

和 $$u_i = f_i(x_3) e^{j(k_1 x_1 - \omega t)} \quad i = 1 \sim 3 \qquad (5)$$

式中k_1为波矢量，ω为圆频率，而$f_i(x_3)$为x_3的函数，它代表声波在板中传播的质点在各方向的位移随x_3而变化的关系，其具体的函数形式正是本文所要讨论的问题。

将(2)～(5)代入(1)并经整理有：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}C_{55}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3{}^2} + \frac{1}{2}C_{45}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3{}^2} + C_{35}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3{}^2} = -jk_1\frac{3}{2}C_{15}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - (C_{11}k_1{}^2 - \rho\omega^2)f_1 \\
&\quad - jk_1\frac{1}{2}(C_{14}+C_{56})\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2}C_{16}k_1{}^2 f_2 - jk_1\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}C_{15}k_1{}^2 f_3 \\
&\frac{1}{2}C_{45}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3{}^2} + \frac{1}{2}C_{44}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3{}^2} + C_{34}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3{}^2} = -jk_1\left(C_{14}+\frac{1}{2}C_{56}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + C_{16}k_1{}^2 f_1 - jk_1 C_{46}\frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}C_{66}k_1{}^2 - \rho\omega^2\right)f_2 - jk_1\left(C_{36}+\frac{1}{2}C_{45}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2}C_{56}k_1{}^2 f_3 \qquad (6) \\
&\frac{1}{2}C_{35}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3{}^2} + \frac{1}{2}C_{34}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3{}^2} + C_{33}\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3{}^2} = -jk_1\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + C_{15}k_1{}^2 f_1 \\
&\quad - jk_1\frac{1}{2}(C_{45}+C_{36})\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + \frac{1}{2}C_{56}k_1{}^2 f_2 - jk_1\frac{3}{2}C_{35}\frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \left(\frac{1}{2}C_{55}k_1{}^2 - \rho\omega^2\right)f_3
\end{aligned}$$

由上式中的三个联立方程解出$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3{}^2}$，$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3{}^2}$和$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3{}^2}$并将结果写成矩阵形式有：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3{}^2} \\ \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3{}^2} \\ \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3{}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}A_{15}A_{16} \\ \\ A_{31}A_{32}A_{33}A_{34}A_{35}A_{36} \\ \\ A_{51}A_{52}A_{53}A_{54}A_{55}A_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ f_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ f_2 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \\ f_3 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

式中：$$A_{11} = \frac{1}{Q}\cdot\frac{jk_1}{2}\left\{-\frac{3}{2}C_{15}(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34}) + \left(C_{14}+\frac{1}{2}C_{56}\right)(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35}) - \left(C_{13}-\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{12} = \frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{(C_{11}k_1{}^2-\rho\omega^2)(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34}) - C_{16}k_1{}^2(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35}) + C_{15}k_1{}^2(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{13} = \frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(C_{14}+C_{56})(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34}) + C_{46}(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35}) - \frac{1}{2}(C_{45}+C_{36})(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{14}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}k_1^2C_{16}(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34})-\left(\frac{1}{2}C_{66}k_1{}^2-\rho\omega^2\right)(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}k_1{}^2C_{56}(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{15}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{2}\left\{-\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34})+\left(C_{36}+\frac{1}{2}C_{45}\right)(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}C_{35}(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{16}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}k_1{}^2C_{15}(C_{33}C_{44}-C^2{}_{34})-\frac{1}{2}k_1{}^2C_{56}(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}C_{56}k_1{}^2-\rho\omega^2\right)(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})\right\}$$

$$A_{31}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{2}\left\{\frac{3}{2}C_{15}(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})-\left(C_{14}+\frac{1}{2}C_{56}\right)(C_{33}C_{55}-C_{35}{}^2)\right.$$

$$\left.+\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{32}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{-(C_{11}k_1{}^2-\rho\omega^2)(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{34})+k_1{}^2C_{16}(C_{33}C_{55}-C^2{}_{35})\right.$$

$$\left.-k_1{}^2C_{15}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{33}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{2}\left\{\frac{1}{2}(C_{14}+C_{56})(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})-C_{46}(C_{33}C_{55}-C_{35}{}^2)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(C_{45}+C_{36})(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{34}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}k_1{}^2C_{16}(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})+\left(\frac{1}{2}C_{66}k_1{}^2-\rho\omega^2\right)(C_{33}C_{55}-C_{35}{}^2)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}k_1{}^2C_{56}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{35}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{2}\left\{\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})-\left(C_{36}+\frac{1}{2}C_{45}\right)(C_{33}C_{55}-C^2{}_{35})\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}C_{35}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{36}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}k_1{}^2C_{15}(C_{33}C_{45}-C_{34}C_{35})+\frac{1}{2}k_1{}^2C_{56}(C_{33}C_{55}-C^2{}_{35})\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}C_{55}k_1{}^2-\rho\omega^2\right)(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right\}$$

$$A_{51}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{4}\left\{-\frac{1}{2}C_{15}(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})+\left(C_{14}+\frac{1}{2}C_{56}\right)(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})\right.$$

$$\left.-\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{44}C_{55}-C^2{}_{45})\right\}$$

$$A_{52}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{4}\Big\{(C_{11}k_1^2-\rho\omega^2)(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})-k_1^2C_{16}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})$$

$$+k_1^2C_{15}(C_{44}C_{55}-C^2_{45})\Big\}$$

$$A_{53}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{4}\Big\{-\frac{1}{2}(C_{14}+C_{56})(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})+C_{46}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})$$

$$-\frac{1}{2}(C_{45}+C_{36})(C_{44}C_{55}-C^2_{45})\Big\}$$

$$A_{54}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{4}\Big\{\frac{1}{2}k_1^2C_{16}(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})-\left(\frac{1}{2}C_{66}k_1^2-\rho\omega^2\right)(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})$$

$$+\frac{1}{2}k_1^2C_{56}(C_{44}C_{55}-C^2_{45})\Big\}$$

$$A_{55}=\frac{1}{Q}\ \frac{jk_1}{4}\Big\{-\left(C_{13}+\frac{1}{2}C_{55}\right)(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})+\left(C_{36}+\frac{1}{2}C_{45}\right)(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})$$

$$-\frac{3}{2}C_{35}(C_{44}C_{55}-C^2_{45})\Big\}$$

$$A_{56}=\frac{1}{Q}\ \frac{1}{4}\Big\{\frac{1}{2}k_1^2C_{15}(C_{34}C_{45}-C_{35}C_{44})-\frac{1}{2}k_1^2C_{56}(C_{34}C_{55}-C_{35}C_{45})$$

$$+\left(\frac{1}{2}C_{55}k_1^2-\rho\omega^2\right)(C_{44}C_{55}-C^2_{45})\Big\}$$

$$Q=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}C_{55} & \frac{1}{2}C_{45} & C_{35}\\ \frac{1}{2}C_{45} & \frac{1}{2}C_{44} & C_{34}\\ \frac{1}{2}C_{35} & \frac{1}{2}C_{34} & C_{33}\end{vmatrix}$$

为了用伴随法解(7) 式,我们要把它降阶并标准化。为此设 $f_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial x_3}$, $f_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial x_3}$, $f_{31}=\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$,则$\frac{\partial f_{11}}{\partial x_3}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_3^2}$, $\frac{\partial f_{21}}{\partial x_3}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2}$, $\frac{\partial f_{31}}{\partial x_3}=\frac{\partial^2 f_3}{\partial x_3^2}$。将这些式子代入(7),仍写成矩阵的形式有:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}&A_{15}&A_{16}\\ 1&0&0&0&0&0\\ A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}&A_{35}&A_{36}\\ 0&0&1&0&0&0\\ A_{51}&A_{52}&A_{53}&A_{54}&A_{55}&A_{56}\\ 0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{11}\\ f_1\\ f_{21}\\ f_2\\ f_{31}\\ f_3\end{pmatrix}\qquad(8)$$

上式的伴随方程为:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_{11} & 1 & A_{31} & 0 & A_{51} & 0 \\ A_{12} & 0 & A_{32} & 0 & A_{52} & 0 \\ A_{13} & 0 & A_{33} & 1 & A_{53} & 0 \\ A_{14} & 0 & A_{34} & 0 & A_{54} & 0 \\ A_{15} & 0 & A_{35} & 0 & A_{55} & 1 \\ A_{16} & 0 & A_{36} & 0 & A_{56} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

在解上式之前，我们必须说明其边界条件。设板的厚度为b，则在板的两自由面上，即在$x_3=0$和$x_3=b$处都有：$T_{31}=T_{32}=T_{33}=0$，具体的关系式可由(2)～(3)推出如下，即

在$x_3=0$处有：

$$T_{31}=\frac{1}{2}C_{55}f_{11}(0)+jk_1C_{15}f_1(0)+\frac{1}{2}C_{45}f_{21}(0)+jk_1\frac{1}{2}C_{56}f_2(0)+C_{35}f_{31}(0)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{55}f_3(0)=0 \tag{10}$$

$$T_{32}=\frac{1}{2}C_{45}f_{11}(0)+jk_1C_{14}f_1(0)+\frac{1}{2}C_{44}f_{21}(0)+jk_1\frac{1}{2}C_{46}f_2(0)+C_{34}f_{31}(0)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{45}f_3(0)=0 \tag{11}$$

$$T_{33}=\frac{1}{2}C_{35}f_{11}(0)+jk_1C_{13}f_1(0)+\frac{1}{2}C_{34}f_{21}(0)+jk_1\frac{1}{2}C_{36}f_2(0)+C_{33}f_{31}(0)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{35}f_3(0)=0 \tag{12}$$

同样，在$x=b$处有：

$$T_{31}=\frac{1}{2}C_{55}f_{11}(b)+jk_1C_{15}f_1(b)+\frac{1}{2}C_{45}f_{21}(b)+jk_1\frac{1}{2}C_{56}f_2(b)+C_{35}f_{31}(b)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{55}f_3(b)=0 \tag{13}$$

$$T_{32}=\frac{1}{2}C_{45}f_{11}(b)+jk_1C_{14}f_1(b)+\frac{1}{2}C_{44}f_{21}(b)+jk_1\frac{1}{2}C_{46}f_2(b)+C_{34}f_{31}(b)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{45}f_3(b)=0 \tag{14}$$

$$T_{33}=\frac{1}{2}C_{35}f_{11}(b)+jk_1C_{13}f_1(b)+\frac{1}{2}C_{34}f_{21}(b)+jk_1\frac{1}{2}C_{36}f_2(b)+C_{33}f_{31}(b)$$
$$+jk_1\frac{1}{2}C_{35}f_3(b)=0 \tag{15}$$

按伴随解法[3]，如果我们以如下的终端条件：

$$
\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_{55} \\ jk_1C_{15} \\ \frac{1}{2}C_{45} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{56} \\ C_{35} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{55} \end{pmatrix}^{(1)}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_{45} \\ jk_1C_{14} \\ \frac{1}{2}C_{44} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{46} \\ C_{34} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{45} \end{pmatrix}^{(2)}
\begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_{35} \\ jk_1C_{13} \\ \frac{1}{2}C_{34} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{36} \\ C_{33} \\ jk_1\frac{1}{2}C_{35} \end{pmatrix}^{(3)}
\tag{16}
$$

分别对(9)式进行反积分，并经运算最后可得一个以 $f_{11}(0)\cdots\cdots f_3(0)$ 为未知数的六元一次线性齐次方程组，将其写成矩阵的形式为：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}C_{55} & jk_1C_{15} & \frac{1}{2}C_{45} & jk_1\frac{1}{2}C_{56} & C_{35} & jk_1\frac{1}{2}C_{55} \\
\frac{1}{2}C_{45} & jk_1C_{14} & \frac{1}{2}C_{44} & jk_1\frac{1}{2}C_{46} & C_{34} & jk_1\frac{1}{2}C_{45} \\
\frac{1}{2}C_{35} & jk_1C_{13} & \frac{1}{2}C_{34} & jk_1\frac{1}{2}C_{36} & C_{33} & jk_1\frac{1}{2}C_{35} \\
z^{(1)}{}_1(0) & z^{(1)}{}_2(0) & z^{(1)}{}_3(0) & z^{(1)}{}_4(0) & z^{(1)}{}_5(0) & z^{(1)}{}_6(0) \\
z^{(2)}{}_1(0) & z^{(2)}{}_2(0) & z^{(2)}{}_3(0) & z^{(2)}{}_4(0) & z^{(2)}{}_5(0) & z^{(2)}{}_6(0) \\
z^{(3)}{}_1(0) & z^{(3)}{}_2(0) & z^{(3)}{}_3(0) & z^{(3)}{}_4(0) & z^{(3)}{}_5(0) & z^{(3)}{}_6(0)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_{11}(0) \\ f_1(0) \\ f_{21}(0) \\ f_2(0) \\ f_{31}(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix}
=0
\tag{17}
$$

式中 $z^{(1)}{}_1(0)\cdots\cdots z^{(3)}{}_6(0)$ 等为进行反积分后所得的初条件。

要(17)式有解，其系数行列式必须等于零，即：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2}C_{55} & jk_1C_{15} & \frac{1}{2}C_{45} & jk_1\frac{1}{2}C_{56} & C_{35} & jk_1\frac{1}{2}C_{55} \\
\frac{1}{2}C_{45} & jk_1C_{14} & \frac{1}{2}C_{44} & jk_1\frac{1}{2}C_{46} & C_{34} & jk_1\frac{1}{2}C_{45} \\
\frac{1}{2}C_{35} & jk_1C_{13} & \frac{1}{2}C_{34} & jk_1\frac{1}{2}C_{36} & C_{33} & jk_1\frac{1}{2}C_{35} \\
z_1{}^{(1)}(0) & z^{(1)}{}_2(0) & z^{(1)}{}_3(0) & z^{(1)}{}_4(0) & z^{(1)}{}_5(0) & z^{(1)}{}_6(0) \\
z^{(2)}{}_1(0) & z^{(2)}{}_2(0) & z^{(2)}{}_3(0) & z^{(2)}{}_4(0) & z^{(2)}{}_5(0) & z^{(2)}{}_6(0) \\
z^{(3)}{}_1(0) & z^{(3)}{}_2(0) & z^{(3)}{}_3(0) & z^{(3)}{}_4(0) & z^{(3)}{}_5(0) & z^{(3)}{}_6(0)
\end{pmatrix}
=0
\tag{18}
$$

上式是声波在板中传播的频散方程。在板中传播的波型，其频率 ω 与板的厚度、弹性常数和波矢量都有关系。解(18)式可得能在板中传播的声波的频谱以及传播速度随频率而变化的关系。将所得的每一频率依次代入(17)式，可解出对应于各该频率的 6 个初函数：$f_{11}(0)f_1(0)\cdots f_3(0)$。当然，这 6 个初函数都包含一个共同的常数因子，它的数值由激发源决定。我们再以这 6 个初函数为初条件代入(8) 式就可求出对应于该频率的振动模式：$f_{11}(x_3)f_1(x_3)\cdots f_3(x_3)$。

三、各向同性问题

上节中我们讨论了声波在板中传播的普遍问题，即假定弹性板是各向异性的。在此情形下，方程(8)(20)(21)都很复杂，质点在 $x_1x_2x_3$ 三个方向上的运动都是相互耦合在一

起的。在板是各向同性的情形下，问题可得到很大的简化。因为这时弹性常数中只留下 $C_{11}=C_{33}, C_{13}=C_{12}$ 和 $C_{44}=C_{55}=C_{66}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})$，其余的都等于零了，而 (7) 式中的诸常数变为：

$$Q=\frac{1}{16}C_{11}(C_{11}-C_{12})^2,$$

$$A_{12}=4\frac{C_{11}k_1{}^2-\rho\omega^2}{C_{11}-C_{12}},$$

$$A_{15}=-jk_1\cdot 2\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{11}-C_{12}},$$

$$A_{34}=\frac{(C_{11}-C_{12})k_1{}^2-4\rho\omega^2}{C_{11}-C_{12}},$$

$$A_{51}=-jk_1\cdot\frac{1}{2}\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{11}},$$

$$A_{56}=\frac{\frac{1}{4}(C_{11}-C_{12})k_1{}^2-\rho\omega^2}{C_{11}}$$

始端和终端的边界条(10)～(15)变为

在 $x_3=0$ 处有：

$$T_{31}=\frac{1}{2}C_{66}f_{11}(0)+jk_1\frac{1}{2}C_{66}f_3(0)=0 \tag{19}$$

$$T_{32}=\frac{1}{2}C_{66}f_{21}(0)=0 \tag{20}$$

$$T_{33}=jk_1C_{12}f_1(0)+C_{11}f_{31}(0)=0 \tag{21}$$

在 $x_3=b$ 处有：

$$T_{31}=\frac{1}{2}C_{66}f_{11}(b)+jk_1\frac{1}{2}C_{66}f_3(b)=0 \tag{22}$$

$$T_{32}=\frac{1}{2}C_{66}f_{21}(b)=0 \tag{23}$$

$$T_{33}=jk_1C_{12}f_1(b)+C_{11}f_{31}(b)=0 \tag{24}$$

因此，我们可以看出，在板为各向同性材料的情形下，波动方程将分为独立的两组，一组只包含变量 f_{21} 和 f_2，它所代表的质点的运动方向垂直于板厚与波传播方向所组成的平面。另一组包含变量 $f_{11}f_1f_{31}f_3$，它所成表的质点的运动方向在板厚与波传播方向所组成的平面内。运动方程(8)分为

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_{11}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & A_{15} & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ A_{51} & 0 & 0 & A_{56}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{11}\\ f_1\\ f_{31}\\ f_3\end{pmatrix} \tag{25a}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f_{21}}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & A_{34}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{21}\\ f_2\end{bmatrix} \tag{25b}$$

伴随方程(9) 变为：

$$\begin{pmatrix}\dot z_1\\ \dot z_2\\ \dot z_5\\ \dot z_6\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & 1 & A_{51} & 0\\ A_{12} & 0 & 0 & 0\\ A_{15} & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & A_{56} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_5\\ z_6\end{pmatrix} \tag{26a}$$

$$\begin{bmatrix}\dot z_3\\ \dot z_4\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 1\\ A_{34} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_3\\ z_4\end{bmatrix} \tag{26b}$$

对(26a)和(26b)进行反积分的终端条件分别为：

$$\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\\ z_5\\ z_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}C_{66}\\ 0\\ 0\\ jk_1\frac{1}{2}C_{66}\end{pmatrix}^{(1)}\begin{pmatrix}0\\ jk_1C_{12}\\ C_{11}\\ 0\end{pmatrix}^{(3)}$$

和

$$\begin{bmatrix}z_3\\ z_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}C_{66}\\ 0\end{bmatrix}^{(2)}$$

两组求初函数的方程分别为：

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}C_{66} & 0 & 0 & jk_1\frac{1}{2}C_{66}\\ 0 & jk_1C_{12} & C_{11} & 0\\ z^{(1)}{}_1(0) & z^{(1)}{}_2(0) & z^{(1)}{}_5(0) & z^{(1)}{}_6(0)\\ z^{(3)}{}_1(0) & z^{(3)}{}_2(0) & z^{(3)}{}_5(0) & z^{(3)}{}_6(0)\end{vmatrix}.$$

$$\cdot\begin{pmatrix} f_{11}(0) \\ f_1(0) \\ f_{31}(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix}=0 \qquad (27a)$$

和
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_{66} & 0 \\ z_3^{(2)}(0) & z_4^{(2)}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{21}(0) \\ f_2(0) \end{bmatrix}=0 \qquad (27b)$$

两组频率方程分别为：

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}C_{66} & 0 & 0 & jk_1\frac{1}{2}C_{66} \\ 0 & jk_1C_{12} & C_{11} & 0 \\ z_1^{(1)}(0) & z_2^{(1)}(0) & z_5^{(1)}(0) & z_6^{(1)}(0) \\ z_1^{(3)}(0) & z_2^{(3)}(0) & z_5^{(3)}(0) & z_6^{(3)}(0) \end{vmatrix}=0 \qquad (28a)$$

和
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}C_{66} & 0 \\ z_3^{(2)}(0) & z_4^{(2)}(0) \end{bmatrix}=0 \qquad (28b)$$

四、结　语

本文从理论上证明了伴随法可用于声波在板中的传播问题，导出了板为各向异性材料情形下的普遍频散方程和运动方程。在板为各向同性的情形下，方程分解为独立的两组，一组只包含变量 f_{21} 和 f_2，而且可以看出，$f_2(x_3)$＝常数，即质点在 x_2 方向的运动不随 x_3 变化。另一组包含 $f_{11}f_1f_{31}f_3$ 等变量，即质点在 x_1 和 x_3 方向的运动还是耦合在一起的。它们在这两个方向的运动均与 x_3 有关，具体的频散关系和对应于各频率的传播模式由(28a) (27a)和(25a)求出。前一组方程对应的波为 Love 型，后一组方程对应的波为 Lamb 型。

参 考 文 献

[1] 强盘富：«计及横向耦合的振幅变换器的计算»，声学学报，第 3 期p. 186，(1982)年。

[2] 强盘富：«有限尺寸压电陶瓷圆板的耦合振动»，超声技术，第 1 期p.1(1980 年)

[3] 郭纪捷«轴向极化压电陶瓷圆片的自由振动»，无线电电子学汇刊，第 1 期p,65(1982 年)

(上接第 24 页)

和，这就要解决一个存放问题。因此，我们把这两种方法极化的振膜放在干燥器中作存放试验，观察其电荷的稳定情况。其测量结果见表 3。

图 6 则表示了薄膜驻极体在干燥器中存放天数与电荷相对值的变化情况。

从表 3 和图 6 可以看出，电摩擦极化的薄膜驻极体在干燥器中存放一定天数后，其电荷就相对稳定于一水平线上了，能满足在生产中存放一定的生产周期。

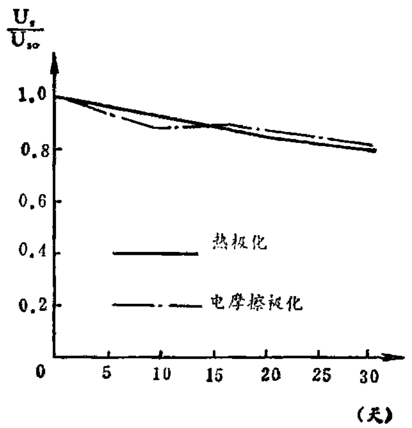

图 6　极化薄膜材料在存放后的电荷稳定性

六、简单结论和注意事项

从上述两种极化方法的对比测量结果，可以看出，电摩擦极化方法不需要升温和冷却装置，而且简单、迅速、电荷稳定性良好，较之热极化方法优越，可在生产中广泛应用。

由于环境湿度对电荷的稳定性影响最大，因此在驻极体的极化和生产过程中必须十分注意周围环境的干燥和无灰尘等。