多角柱的声散射

徐海亭

（中科院声学所北海研究站）

提　要

本文采用单一矩有限元方法（Unimoment Finite Element Method）研究具有棱角的多面体刚性柱的声散射。与变量分离法相类似，单一矩方法是把变量表示成一组基函数的迭加，并通过微分方程求解，而有限元方法求解微分方程的边值问题是相当有效的。文中首先用单一矩有限元方法计算了刚性长柱在平面波入射时的散射形态函数以证明该方法的有效性，还对三角柱、方柱、六角形柱和八角形柱等不同截面的等边多边形柱在平面波入射时的散射形态函数进行了理论计算，给出了$KR_0=1$，3,5时形态函数的指向性图和$KR_0=0.1$～5.5范围内反向散射的形态函数曲线。

一、引　言

求具有棱角的或几何形状比较复杂的多面体柱的声散射问题没有明确的解折解存在，只能用数值方法求近似解。在各种近似解方法中，经典的方法只有两种情况，一是当入射波长λ比散射体的特征线度L大很多时，即$L/\lambda\ll1$，使用瑞利散射理论—低频近似方法；二是当$L/\lambda\gg1$时，采用几何光学理论—高频近似方法。当L与λ可比较的中间情况，就必须用数值技术求解。

研究多面体柱的声散射问题实际上是很有意义的。由于棱角的存在，理论处理遇到的困难主要是由于表面曲率的不连续引起的奇异特性。Mei[1]通过用散射体表面源密度在棱角处分布奇异特性的描述，采用积分方程法研究了方柱对电磁波的散射问题；Varadan[2]用类似Mei对散射体表面源函数的处理，把表面声场用一组适合描述其特性的基函数的迭加，采用T矩阵方法求解有棱角刚性柱的声散射。因此，用积分方程法或T矩阵方法主要问题是选择描述表面场的基函数，而基函数的选择本身就要预先知道表面场的分布特性；并且当散射体的几何形状复杂时，基函数的选择就非常困难。

尽管在散射体的棱角处表面声源的法向导数是奇异的，但表面声场仍然是可积的。用单一矩有限元方法求解，就可以避免在数学上处理这种较难处理的奇异问题。Mei[3]首先用这个方法研究电磁波的散射问题。Su[4]用有限元本征函数法研究了多面体柱的声散射，实际上是单一矩有限元方法的特殊情况。由于该方法的有效性和灵活性，所以又称它为经典的变量分离法的修改。这不仅由于单一矩方法同变量分离法一样都把变量表示成基函数的迭加，同时，它们都采用微分方程而不

是采用积分方程求解。本文首先简单描述单一矩有限元方法求解散射问题；然后给出这种方法对几种有棱角的多面体刚性长柱的计算结果。

二、单一矩有限元方法

设一单位振幅的平面波 $\varphi_0 = \exp(j\vec{K}\cdot\vec{r} - j\omega t)$ 入射到截面边界为S的无限长刚性长柱上，如图1所示。K为波数，ω为圆频率，柱轴沿直角座标系的Z轴方向。用单一矩有限元方法求柱目标的声散射，首先在散射体外用一边界为S′的虚拟数学面—无限长圆柱面（三维问题是球壳）来包围散射体，把散射体从无限空间中分离出来，以便在有限空间中进行数值求解。

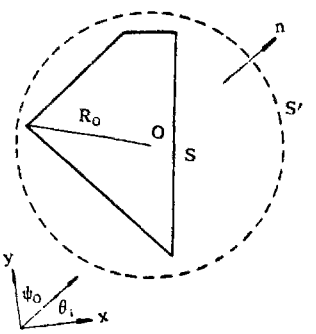


图 1 柱目标的声散射

根据单一矩方法，把S′内的声场 $\psi(r,\theta)$ 表示成一组基函数的迭加：

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{2N} a_n \psi_n(r,\theta) \qquad (1)$$

函数 $\psi_n(r,n)$ 满足波动方程，即 $\nabla^2\psi_n + k^2\psi_n = 0$，当散射体是均匀介质时，$\psi(r,\theta)$ 就可以用变量分离法—即本征函数进行展开。

在S′外，把散射波 ψ_s 和入射波 ψ_0 展开为柱谐和函数：

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{N} (S_n^e \cos n\theta + S_n^0 \sin n\theta)\, H_n^1(Kr) \qquad (2)$$

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{N} (A_n^e \cos n\theta A_n^0 \sin n\theta)\, J_n(Kr) \qquad (3)$$

式中角标 e，0 分别表示系数的偶分量和奇分量，$A_n^{e,0}$ 是已知的，$S_n^{e,0}$ 是待求的，$J_n(Kr)$ 和 $H_n^1(Kr)$ 分别为柱贝塞尔函数和柱汉克尔函数，根据它们在原点和无限远点处的特性，完全适合描述入射平面波和散射波。

由于S′是圆柱面，可以把 $\psi(r,\theta)$ 在S′上展开为富氏级数的形式，即

$$a_n\psi_n(R,\theta) = a_n R_n \begin{cases} \cos n\theta & 0 \le n \le N \\ \sin(n-N)\theta & N+1 \le n \le 2N \end{cases}$$

式中 R_n 与 θ 角无关，它可以与 a_n 合并成一个未知量。利用边界条件：

$$\psi(R,\theta) = \psi_s(R,\theta) + \varphi_0(R,\theta) \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial\psi(r,\theta)}{\partial n}\right)_{r=R} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\psi_s(r,\theta) + \varphi_0(r,\theta)\right)_{r=R} \qquad (5)$$

$\vec{n}$ 为S′的外法线方向。把相应的展开式代入（4）（5）式，并与任选一组加权函数 W_i 求其内积，则（4）（5）式变为

$$\left\langle \sum_{n=0}^{2N} a_n R_n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin(n-N)\theta \end{pmatrix}, W_i \right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{N} \left(A_n^{e,0} Jn(KR) + S_n^{e,0} H_n^1(KR) \right), W_i \right\rangle \quad (6)$$

$$\left\langle \sum_{n=0}^{2N} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ a_n R_n \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin(n-N)\theta \end{pmatrix} \right\}, W_i \right\rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{N} K \left\{ A_n^{e,0} J_n'(KR) + S_n^{e,0} H_n'^1(KR) \right\}, W_i \right\rangle \quad (7)$$

式中 $J_n'(KR)$和$H_n'^{(1)}(KR)$表示对宗量求导数，$A_n^{e,0} = A_n^e \cos n\theta + A_n^0 \sin n\theta$，

$S_n^{e,0} = S_n^e \cos n\theta + S_n^0 \sin n\theta$。我们选择加权函数为

$$W_i = \begin{cases} \cos i\theta & 0 \le i \le N \\ \sin(i-N)\theta & N+1 \le i \le 2N \end{cases}$$

由于三角函数的正交性，（6）（7）式可化为

$$a_n R_n = \begin{cases} A_n^e J_n(KR) + S_n^e H_n^1(KR) & 0 \le n \le N \\ A_m^0 J_m(KR) + S_m^0 H_m^1(KR) & \text{当} N+1 \le n \le 2N \text{时}, 1 \le m \le N \\ & 0 \le n \le N \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(a_n R_n) = \begin{cases} A_n^e K J_n'(KR) + S_n^e K H_n'^1(KR) & \text{当} N+1 \leqslant n \leqslant 2N \text{时}, \\ A_m^0 K J_m'(KR) + S_m^0 K H_m'^1(KR) & 1 \le m \le N \end{cases} \quad (9)$$

其中 $m = n - N$

由（8）（9）即可求得

$$\frac{\partial}{\partial n}(a_n R_n) = \begin{cases} A_n^e K J_n'(KR) + \dfrac{K H_n'^1(KR)}{H_n(KR)} \left[a_n R_n - A_n^e J_n(KR) \right] \\ A_m^0 K J_m'(KR) + \dfrac{K H_m'^1(KR)}{H_m^1(KR)} \left[a_n R_n - A_m^0 J_m(KR) \right] \end{cases} \quad (10)$$

即建立了 $\psi(r,\theta)$在 S′ 上展开式的第 n 阶分量与其法向导数的关系式。

在S′内，函数 $a_n\psi_n(r,\theta)$ 用有限元方法确定。根据波动方程的泛函极值条件，求出 $a_n\psi_n(r,\theta)$的有限元系统运动方程[5]：

$$\{-\omega^2 [M] + [K]\} \{a_n\psi_n\} = \{Q_n\} \quad (11)$$

矩阵〔M〕〔K〕分别为系统的质量矩阵和刚度矩阵，$\{a_n\psi_n\}$ 为有限元元素结点上的值，若用矩阵〔N〕表示元素的形状函数，则元素内任一点 $a_n\psi_n(r,\theta)$的值都可表示

为 $a_n\psi_n(r,\theta)=[N]\{a_n\psi_n\}$、$\{Q_n\}$ 为系统的载荷矩阵，可表示为[5]

$$\{Q_n\}=\int_{s'_e}[N]^T\frac{\partial}{\partial n}(a_n\psi_n(r,\theta))\,ds' \tag{12}$$

代入$a_n\psi_n(r,\theta)$ 在边界上的富氏级数形式和关系式（10），得到

$$\{Q_n\}=[M_n^1]\{a_n\ \psi_n\}+\{Q'_n\} \tag{13}$$

$$[M'_n]=\begin{cases}K\dfrac{H'^1_n(KR)}{H'^1_n(KR)} & 0\leqslant n\leqslant N\\ K\dfrac{H'^1_m(KR)}{H^1_m(KR)} & N+1\leqslant n\leqslant 2N,\ 1\leqslant m\leqslant N\end{cases}\int_{s'_e}[N]^T[N]ds'$$

$$\{Q'_n\}=u_n\int_{s'_e}[N]^T\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix}ds'$$

$$u_n=\begin{cases}A^e_nKJ'_n(KR)-K\dfrac{H'^1_n(KR)}{H^1_n(KR)}A^e_n\,J_n(KR) & 0\leqslant n\leqslant N\\ A^0_mKJ'_m(KR)-K\dfrac{H'^1_m(KR)}{H'_m(KR)}A^0_m\,J_m(KR) & N+1\leqslant n\leqslant 2N,\ 1\leqslant m\leqslant N\end{cases}$$

载荷矩阵$\{Q_n\}$建立了有限区域内的声场同无限区域内的声场之间的联系，而无限区域声场对有限区域声场的影响，数学上体现在对有限元方程载荷矩阵的影响。

将(13)式代入(11)式就可得到：

$$\left\{-W^2[M]+[K]-\left[M'_n\right]\right\}\{a_n\psi_n\}=\left\{Q'_n\right\} \tag{14}$$

求解这个方程，并根据(8)式，就可以求出系数S^e_n和S^0_n，从而也就求得了散射场。

三、计算结果与讨论

用上面的方法进行计算，求出散射系数 $S^{e,0}_n$，当r远离散射体时，散射波可以表示为：

$$\psi_s=f_\infty(\theta)\sqrt{R/r}\exp(jkr)$$

$$f_\infty(\theta)=\sum_{o\ n}^{N\ e,0}S\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi KR}}\cdot\exp(-jn\pi/2-j\pi/4)$$

$f_\infty(\theta)$为远场散射形态函数，在散射问题中是比较感兴趣的物理量。

计算中，采用三角形元素，一次线性内插函数，N的选择为10加KR的整数，这足够保证在计算KR的范围内级数的收敛。平面波的入射方向都指定为x轴的正方向，即$\theta_i=0°$，置散射体于座标面上处对称状态（如图7），所以散射场也是对称的。为减少计算量，利用对称性，仅取半空间进行有限元网格化和计算。整个计算

是在LSI—11/23机上进行的。

为了验证单一矩有限元方法的有效性，首先对具有严格解的无限长刚性柱的声散射进行了计算，在圆柱截面的半平面上取72个三角元素，74个结点，当KR＝5时，元素的最大边长l与波长之比$l/\lambda<0.07$。计算结果同准确解相比较得到明显一致的结果。数值表明，KR≤3时，绝对误差小于千分之二，KR＝5时，绝对误差小于百分之二。

对等边三角柱（208个元素，137个结点）方柱（184个元素，132个结点）、六角柱（138个元素，108个结点）、八角柱（132个元素，107个结点）的计算结果如图2所示。

从图2可以看出，在低频情况下，目

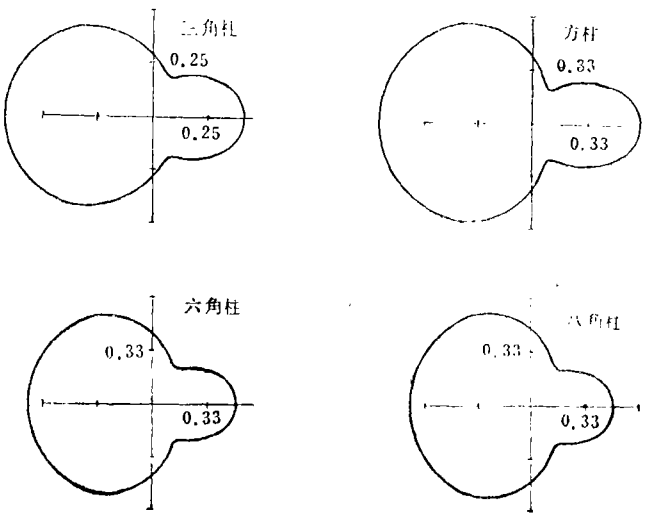


图 2　多面体柱散射远场指向性图 $KR_0=1$

标的散射特性与目标的几何形状关系不大。三角柱与圆柱的散射远场指向性除了最小值的位置稍有不同外非常相似，三角柱位于65°，六角柱为60°，而八角柱与圆柱相同，都是55°。低频时这种瑞利散射特性本身说明了目标的棱角对目标的散射特性影响不大。

此外还计算$KR_0=3$和$KR_0=5$时几种刚性等边多角柱的散射远场指向性图（此处从略）。图3表示多角柱的反向散射形态函数同无量纲频率KR_0的关系曲线。由此可以看出，在高频情况下，棱角对散射特性产生比较明显的影响，相同的KR_0值，多角柱同圆柱相比其指向性更复杂，并且棱角越尖，对散射的影响越大。从反向散射形态函数图来看，八角柱的散射特性已接近圆柱的散射特性，它们峰（谷）值的间隔都是$\triangle KR_0=1.2$，仅在KR_0轴上的位置相差0.1。棱角对高频散射产生的影响主要是由于表面曲率不连续而辐射蠕波所引起的，而在低频情况下，蠕波的影响很小。

计算表明，单一矩有限元方法是有效的。由于它求边值问题是从微分方程入手，而微分方程的描述无论是均匀散射体或非均匀散射体都是相同的，从而使它的求解范围比较广泛；在计算上采用有限元方法，使它的应用相当灵活；另外，对不

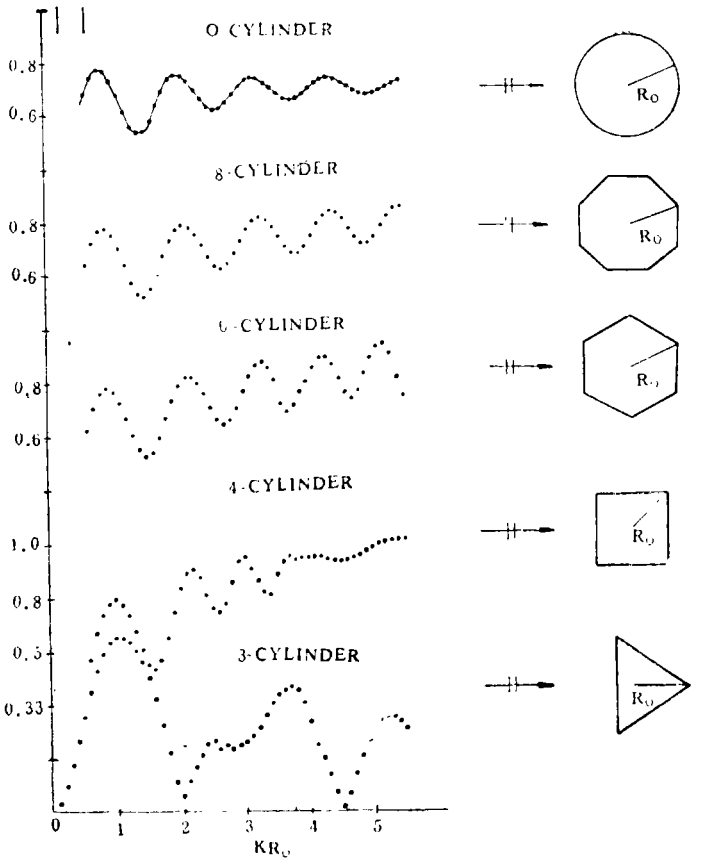


图 3 多角柱的反向散射形态函数图

同散射体，计算程序具有通用性等优点。

工作中得到冯培元同志的帮助和有意义的讨论，赵景栾同志在计算中给予帮助，表示感谢。

参考文献

〔1〕Mei, K.K.and Van Bladel, J.G, "Scattring by perfectly-Conducting rectangular cylinders", IEEE Trans.Antenna Propag. AP-11 (1963), 185—192.

〔2〕Varadan, V. K., Varadan, V. V.and Tsao, S. J., "Scattering of AcousticWave by rigid cylindrical Objects with sharp corners", J. Acoustic. Soc. Am.72 (1982), 1957—1964.

〔3〕Mei, K. K., "Unimoment method of solving Antenna and Scattering Problems", IEEE Trans.Antenna Propag AP—22(1974), 760—766

〔4〕Su, J.H., Varadan, V.V.and Varadan, V.K., "Finite element eigenfunction method (FEEM) for elastic (SH)Wave Scattering", J. Acoustic Soc. Am. 73 (1983), 1499—1504.

〔5〕Zienkievicz, O. C., "Finite element method", (McGraw—Hill, London, 1977)