

# 定位声呐的定位精度分析

孙保文

(中科院东海研究站)

本文着重探讨定位声呐接收的信号中相位因子所携带的信息。分析了噪声存在情况下相位因子的概率密度以及声学定位的精度。提出了一个改进测量精度的方法(依靠增加接收基阵中的换能器个数),并计算出相应的相位因子概率密度表达式。

## 一、纯噪声输入时相位因子的概率密度函数

相位法测定方位的原理性方框图如图1。

我们首先研究当滤波器的输入为纯噪声(信道噪声和本机噪声之和)时,窄带滤波器的输出,并表示为 $W(t)$ 。 $W(t)$ 是一个窄带高斯过程,且可以表示为:

$$W(t) = X(t)\cos\omega_0 t + Y(t)\sin\omega_0 t \quad (1)$$

其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个独立的高斯过程,它们的均值为0,并且具有相同的自相关函数。

其联合概率密度函数为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi R(0)} e^{-(x^2+y^2)/2R(0)} \quad (2)$$

若将 $X(t)$ 、 $Y(t)$ 表作:

$$X(t) = a(t)\cos\phi(t) \quad Y(t) = a(t)\sin\phi(t)$$

于是  $W(t) = a(t)\cos[\omega_0 t - \phi(t)]$

如众所周知,在 $(-\pi, \pi)$ 的间隔中,随机变量 $\phi(t)$ 是均匀分布的,且相对于 $a(t)$ 是独立的,即:

$$f(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (3)$$

随机变量 $a(t)$ 则属瑞利分布,密度函数为:

$$f(a) = \frac{a}{R(0)} e^{-a^2/2R(0)} U(a) \quad (4)$$

其中 $U(a)$ 是单位阶跃函数:

$$U(a) = \begin{cases} 1 & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } a < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

于是 $a(t)$ 的均值和方差分别为,

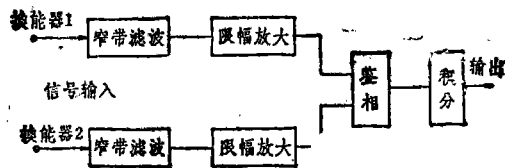


图1 接收机原理图

$$\varepsilon\{\mathbf{a}(t)\} = \sqrt{\frac{\pi R(0)}{2}} \quad \sigma_{a(t)}^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) R(0) \quad (5)$$

## 二、输入为含噪声单频信号时，相位因子的概率密度函数

### 1. 精确表达式

我们再研究滤波器的输入为噪声和单频信号之和的情况，此时滤波器的输出为

$$Z(t) = W(t) + S(t)$$

式中  $S(t)$  为单频正弦信号  $S(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

为方便计，先设  $\varphi = 0$ ，于是输入可表作：

$$Z(t) = [X(t) + A] \cos \omega_0 t + Y(t) \sin \omega_0 t \quad (6)$$

若将  $X(t) + A$  和  $Y(t)$  分别写成：

$$X(t) + A = b(t) \cos \theta(t) \quad Y(t) = b(t) \sin \theta(t)$$

而  $Z(t) = b(t) \cos[\omega_0 t - \theta(t)]$

$X(t)$  和  $Y(t)$  的联合分布  $f(x, y)$  已由式(2)给出，我们要求得  $b(t)$  和  $\theta(t)$  的联合分布  $f(b, \theta)$ ，而  $b$  和  $\theta$  为  $x$  和  $y$  的函数，因此只要求出雅考比行列式则不难求得  $f(b, \theta)$ ，因为  $x = b \cos \theta - A$ ， $y = b \cdot \sin \theta$

所以雅考比行列式  $|J|$  为：

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -b \sin \theta \\ \sin \theta & b \cos \theta \end{vmatrix} = b$$

$$\text{于是 } f(b, \theta) = \frac{b}{2\pi R(0)} e^{-[(b \cos \theta - A)^2 + (b \sin \theta)^2] / 2R(0)} \quad (7)$$

上式系对  $b > 0$ ， $|\theta| < \pi$  而言，若为其他值则  $f(b, \theta) = 0$  由式(7)可以看出两随机变量为非独立的。因而不能直接写出它们的概率密度函数；只能分别地将式(7)对  $\theta$  积分得  $f(b)$ ，对  $b$  积分得  $f(\theta)$ 。

前者较易求出，结果是

$$f(b) = \frac{b}{R(0)} e^{-(b^2 + A^2) / 2R(0)} \cdot I_0 \left[ \frac{bA}{R(0)} \right] \quad (8)$$

其中  $I_0 \left[ \frac{bA}{R(0)} \right]$  为零阶修正贝塞尔函数，且为：

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos \theta} d\theta$$

为了求得后者，我们首先将式(7)中指数项的分子部分作如下的演化：

$$(b \cos \theta - A)^2 + (b \sin \theta)^2 = (b - A \cos \theta)^2 + A^2 \sin^2 \theta$$

然后代入式(7)，对  $b$  积分得：

$$f(\theta) = \int_0^{\infty} f(b, \theta) db = \frac{e^{-A^2 \sin^2 \theta / 2R(0)}}{\sqrt{2\pi R(0)}} \int_0^{\infty} \frac{b}{\sqrt{2\pi R(0)}} e^{-(b - A \cos \theta)^2 / 2R(0)} db$$

$$\text{令 } u = \frac{b - A \cos \theta}{\sqrt{R(0)}} \quad \text{则 } b = \sqrt{R(0)} u + A \cos \theta$$

于是上式中的积分式为：

$$\sqrt{\frac{R(0)}{2\pi}} e^{-A^2 \cos^2 \theta / 2R(0)} + A \cos \theta \left( \frac{1}{2} + \operatorname{erf} \frac{A \cos \theta}{\sqrt{R(0)}} \right)$$

式中  $\operatorname{erf}$  为误差函数

于是显见：

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{e^{-A^2/2R(0)}}{2\pi} + \frac{A \cos \theta \cdot e^{-A^2 \sin^2 \theta / 2R(0)}}{2\sqrt{2\pi R(0)}} \left( 1 + 2\operatorname{erf} \frac{A \cos \theta}{\sqrt{R(0)}} \right) & |\theta| < \pi \\ 0 & \theta \text{ 为其他值} \end{cases} \quad (9)$$

可以看出，无信号输入时，即  $A=0$ ，则式(8)和式(9)分别退化为式(4)和式(3)

## 2. 简化表达式

式(9)比较复杂，但若假设信噪比很大即  $\theta$  取大值的情况，则式(9)可以简化成熟悉的分布。

假设

$$\begin{cases} \frac{A^2}{2R(0)} \gg 1 \\ \theta \ll 1 \end{cases} \quad (10)$$

此时

$$\begin{cases} \sin \theta \cong \theta \\ \cos \theta \cong 1 \\ \frac{e^{-A^2/2R(0)}}{2\pi} \cong 0 \\ \operatorname{erf} \frac{A \cos \theta}{\sqrt{R(0)}} \cong \frac{1}{2} \end{cases}$$

于是式(9)大大地简化作：

$$f(\theta) \cong \frac{A}{\sqrt{2\pi R(0)}} e^{-A^2 \theta^2 / 2R(0)} \quad (11)$$

这是均值为 0，方差为  $\frac{R(0)}{A^2}$  的高斯分布。

同样，在大信噪比的假设下，并略去  $\omega(t)$  取大值的那些出现概率很小的情况，根据图 2 也可得出式(11)的结果。

$$f(\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi R(0)}} e^{-A^2 \theta^2 / 2R(0)} = \frac{G}{\sqrt{\pi}} e^{-G^2 \theta^2} \quad (12)$$

显见  $f(\theta)$  也是零均值的高斯分布，且方差为：

$$\sigma^2 = \frac{R(0)}{A^2} = \frac{1}{2G^2} \quad (13)$$

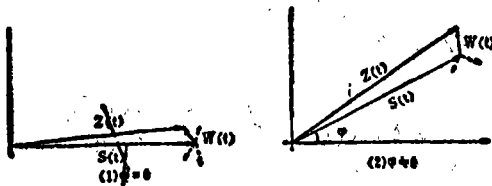


图 2 简化表达式所用的物理模型图

其中  $G^2$  为功率信噪比： $G^2 = \frac{A^2}{2R(0)}$

图 3 是由计算机根据式(9)和式(11)[或式(12)]计算出来的曲线，功率信噪比  $G^2$  在 1000 到 10 的范围内。

从图中很容易看出，在  $|\theta| \leq \pm 15^\circ$  的范

围内它们明显地一致，甚而几乎完全重合。

### 三、定位精度

前面分析的是信号相位 $\varphi=0$ 的情况。若 $\varphi \neq 0$ ，则信号为 $S(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$  此时前文所得的式(11)应相应地变为：

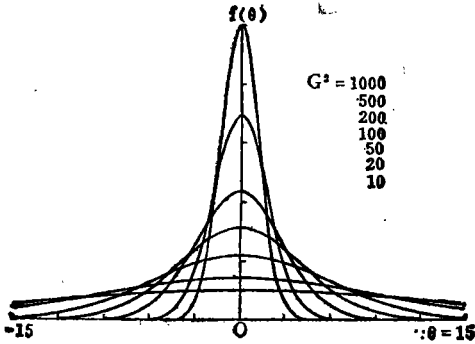


图3 在 $-15^\circ < \theta < 15^\circ$ ，按式(9)(实线)和式(11)(虚线)分别绘制的曲线

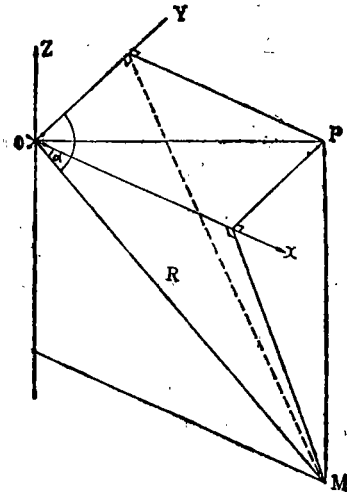


图4 水下目标与接收基阵的相对位置

$$f_{(\varphi)}(\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi R(0)}} e^{-\frac{(\theta-\varphi)^2}{2R(0)/A^2}} = \frac{G}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\theta-\varphi)^2}{2} G^2} \quad (14a)$$

其均值为： $\varepsilon\{\theta\} = \bar{\varphi} \quad (14b)$

方差仍为： $\sigma_{(\varphi)}^2 = \sigma^2 = \frac{R(0)}{A^2} = \frac{1}{2G^2} \quad (14c)$

#### 1. 相位差的概率密度

定位声呐实际上由鉴相器测出二路窄带滤波器输出之间的相位差 $\Delta\varphi$ ，根据式(14)，两路输出的相位概率密度为高斯型，均值和方差分别为 $\varphi_1, \varphi_2$ 和 $\sigma_{(\varphi_1)}^2, \sigma_{(\varphi_2)}^2$ ，相位差为：

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

当两个基阵换能器接收到的噪声是相互独立的情况下，相位差的概率密度应仍近似地为高斯型，且相位差的均值记作

$$\varepsilon\{\Delta\varphi\} = \Delta\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1 \quad (15a)$$

相位差的方差近似地等于两高斯分布的方差之和，即：

$$\sigma_{(\Delta\varphi)}^2 = \sigma_{(\varphi_1)}^2 + \sigma_{(\varphi_2)}^2 = 2\sigma^2 = \frac{2R(0)}{A^2} = \frac{1}{G^2} \quad (15b)$$

所以概率密度为：

$$f(\psi) = \frac{A}{2\sqrt{\pi R(0)}} e^{-\frac{-(\psi-\Delta\varphi)^2}{4R(0)/A^2}} = \frac{G}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\psi-\Delta\varphi)^2}{2} G^2} \quad (15c)$$

#### 2. 水下目标的座标

图4标明了水下目标M和位于0处的接收阵元之间的相对位置。接收阵元很小,位于oxy水平面上,且左右二个换能器位于ox轴上,前后两个换能器位于oy轴上,阵的中心位于坐标原点0。

OM的长度为R,与ox、oy的夹角分别为 $\alpha$ 和 $\beta$ ,于是目标M的x坐标为:

$$x = R \cos \alpha \quad (16)$$

若信号周期为T,于是构成下面的关系式:

$$\frac{\Delta \varphi}{360^\circ} = \frac{\tau}{T} = \frac{d \cdot \cos \alpha}{TC} \quad (17)$$

代入(16)得:

$$x = \frac{TCR}{360^\circ d} \Delta \varphi = B \Delta \varphi \quad (18a)$$

$$B = \frac{TCR}{360^\circ d} \quad (18b)$$

式中信号周期T与换能器间距d,由定位系统的参数确定。而声速C是可以测得的,同样M与基阵的斜距R则可很容易地由应答法测得,一般说来,利用应答法测距的精度是很高的,因此近似地将R看作一非随机变量。所以对某固定目标进行定位时,B可视作常数,于是利用式(18)和(15)可以求出X的概率密度

$$f_{(x)}(x) = \frac{1}{B} f_{(\Delta \varphi)}\left(\frac{x}{B}\right) = \frac{A}{B \cdot 2\sqrt{\pi R(0)}} e^{-\frac{\left(\frac{x}{B} - \overline{\Delta \varphi}\right)^2}{4R(0)/A^2}} = \frac{G}{B\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - B\overline{\Delta \varphi}) - G^2}{2B^2}} \quad (19a)$$

可见X仍为高斯分布,

$$\text{均值为: } \varepsilon\{X\} = B \overline{\Delta \varphi} \quad (19b)$$

$$\text{方差为: } \sigma_{(x)}^2 = \frac{2B^2 R(0)}{A^2} = \frac{B^2}{G^2} \quad (19c)$$

为便于区别,上面x坐标的相位差可记作 $\Delta \varphi_+$ 及 $\overline{\Delta \varphi_+}$ 。

同样的计算可确定出y坐标的概率密度,且也为高斯型,均值为:  $\varepsilon\{Y\} = B \overline{\Delta \varphi_+}$

$$\text{方差为 } \sigma_{(y)}^2 = \frac{2B^2 R(0)}{A^2} = \frac{B^2}{G^2}$$

显见要得到高的定位精度,应 $\sigma_{(x)}^2$ 及 $\sigma_{(y)}^2$ 越小越好,

### 3. 讨论

根据式(19c),若要 $\sigma^2$ 小,必要 $G^2$ 大和 $B^2$ 小,要 $G^2$ (信噪比)大,相当于要信号功率大,众所周知,发射功率大到一定程度后,其困难程度、代价及设备的庞大等问题都会激增。另外 $B^2$ 也不是可以任意变小的,式(18b)中,C为水中声速,R为目标斜距,(我们可以假定测得的R是很精确的),它们不是可以由设计者选择的参数。T为信号周期,要小;d为两换能器的间距,要大但是也都有一定限制。从水声传播的角度来看,低频(T大)的效果好,信号频率太高了,在海水中传播的损失大(对数吸收系数 $\alpha$ 正比于频率的平方,吸收问题会变得严重起来),反会降低应有的接收信噪比。从相位法定位所固有的特点来看,d最大也不得超过接收信号的半波长(实际应用中还要更小一些),就是说d的增大也受到一定的制约。总之,上面所提到的参数( $G^2$ 、T、d等)都只能根据一定的原则和实际要求予以权衡。

## 四、一个改善定位精度的方法

前面分析了用互相垂直的二对换能器进行定位的情况，若以更多的换能器进行定位，则可更进一步改善定位精度。

### 1. 实例

取 $n=4$ 时，阵在 $x$ 轴上有5个换能器，如图5，各经过时延得出 $\varphi_1 \cdots \Delta\varphi_4$ ，从而相加再平均后得 $\Delta\Phi_x$ 。

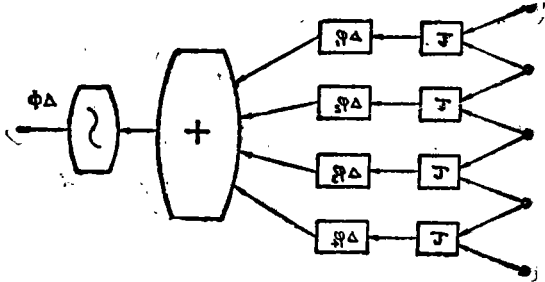


图5 坐标轴上各换能器的排列

同样，与 $x$ 轴垂直的 $y$ 轴上也是5个换能器，（其中第三个换能器位于正中，显见是可以和 $x$ 轴上的第三个换能器公用的）可得 $\Delta\Phi_y$ 。

### 2. 数字特征

设新的函数 $\Delta\Phi$ 为几个单路 $\Delta\varphi_i$ 的平均值：

$$\Delta\Phi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i \quad (20)$$

若设各路的均值均为 $\varepsilon\{\Delta\varphi_i\} = \overline{\Delta\varphi}$ ，方差

为 $\sigma_{(\Delta\varphi)}^2$ ，且各个换能器输出的噪声分量能视作独立，经过一定的演算可知， $\Delta\Phi$ 的均值为：

$$\varepsilon\{\Delta\Phi\} = \varepsilon\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i\right\} = \overline{\Delta\varphi} \quad (21a)$$

即 $\Delta\Phi$ 的均值与前面分析的单路情况下 $\Delta\varphi$ 的均值一样。

$\Delta\Phi$ 的方差：

$$\sigma_{(\Delta\Phi)}^2 = \frac{1}{n} \sigma_{(\Delta\varphi)}^2 \quad (21b)$$

由于均值不变，而方差缩小成 $1/n$ ，无疑进而能减小目标坐标的定位误差。

## 五、结束语

本文仅就定位中的相位部分作了一些理论性的探讨，在南海区进行的某大型多学科工程的水下综合性试验中，定位声呐多次成功地引导深潜器至目标，所起的作用是至关重要的。