

# 定位声呐测距误差理论分析

曾 鹏

(中科院东海研究站)

测距是声呐系统的主要功能之一，测距的精度在某些应用方面显得十分重要，本文从CDW-A型定位声呐中使用的具体系统出发，导出了在白噪声背景影响下的测距统计误差的方差，并利用近似方法导出了白噪声通过此系统后的统计分布。同时对影响测距精度的一些参数进行了分析，提出了改善测距精度，减小测距误差的方法，为本系统的设计提供了理论依据。

## 一、引言

图1示出了测距系统的原理性方框图，其原理简介如下：

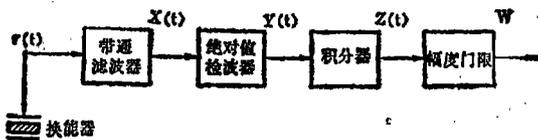


图1 测距系统原理图

换能器将接收到的声信号转换成电信号  $r(t)$ ，通过窄带滤波器后，将背景噪声的功率衰减一部分。然后由绝对值检波器和积分器组成的包络检测器将其包络  $z(t)$  取出，由门限电平比较判别后测得信号的到达时间，

乘上声速后即得到目标的距离。

由于信号上叠加有背景噪声，因而包络  $z(t)$  是一随机过程，这样得到的到达时间也是一随机变量，与实际的到达时间有一个随机测时误差，因而引起一随机的测距误差。下文中，将先导出测时误差方差，然后导出测距误差方差。

分析前，有如下的条件和假定：

(1) 接收信号形式：

$$S(t) = f(t) \cos \omega_0 t$$

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

为一正弦波填充的脉宽为  $T$  的脉冲信号。

(2) 换能器输出端的电噪声为一宽带的零均值高频限带平稳高斯白噪声  $n(t)$ ，其带宽  $\Delta f_n$ ，概率密度函数为：

$$\rho(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left\{ -\frac{n^2}{2\sigma_n^2} \right\}$$

(3) 窄带带通滤波器为理想的，其带宽  $\Delta F$ ，传输函数为  $H_B(\omega)$ ，脉冲响应函数为  $h_B(t)$ ，形式如下：

$$H_B(\omega) = \begin{cases} K & \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq |\omega| \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \omega \text{ 为其它值} \end{cases}$$

其中:  $\Delta\omega = 2\pi\Delta F$

(4) 积分器为RC低通滤波器, 其截止频率远低于信号的工作频率  $f_0$ ,

(5) 满足输入为大信噪比的假设。

## 二、白噪声通过系统后的分布

在无目标信号时, 系统的输入只有背景噪声  $n(t)$ , 即:

$$r(t) \triangleq r_0(t) = n(t) \quad t > T \quad (1)$$

$r_0(t)$  通过窄带滤波器后仍为一高斯噪声, 记为  $x_0(t)$  其均值, 方差分别为:

$$E[x_0(t)] = E \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} n(\tau) h_B(t-\tau) d\tau \right\} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D[x_0(t)] &= \sigma_{x_0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(\omega) |H_B(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_0^{2\pi\Delta F} \frac{\sigma_0^2}{2\Delta f_n} K^2 d\omega = K^2 \frac{\Delta F}{\Delta f_n} \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $\sigma_0^2 = \left( \frac{N_0}{2} \right) \cdot 2\Delta f_n \quad S_0(\omega) = \frac{N_0}{4\pi}$

$x_0(t)$  为一窄带的高斯白噪声, 它通过绝对值检波器后根据Price定理, 可得输出的均值、方差、相关函数如下<sup>[1]</sup>:

$$E[y_0] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{x_0} \quad (4)$$

$$D[y_0] = \frac{\pi-2}{2} \sigma_{x_0}^2 \quad (5)$$

$$R_{y_0}(\tau) = \frac{2}{\pi} \sigma_{x_0}^2 [\rho_{x_0}(\tau) \sin^{-1} \rho_{x_0}(\tau) + \sqrt{1 - \rho_{x_0}^2(\tau)}] \quad (6)$$

其中  $\rho_{x_0}(\tau)$  为检波器器输入端噪声  $x_0(t)$  的相关系数, 有:

$$\rho_{x_0}(\tau) = \frac{R_{x_0}(\tau)}{\sigma_{x_0}^2} \quad (7)$$

将(6)式展开为幂级数<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} R_{y_0}(\tau) &= \frac{2}{\pi} \sigma_{x_0}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \rho_{x_0}^2(\tau) + \frac{1}{4!} \rho_{x_0}^4(\tau) + \frac{9}{6!} \rho_{x_0}^6(\tau) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=4}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+2)!} \right] (2n-1)!! \rho_{x_0}^{(2n+2)}(\tau) \right] \end{aligned}$$

注意到  $|\rho_{x_0}(\tau)| \leq 1$ , 上式中可取前三项来近似, 并将(7)式带入后得

$$R_{y_0}(\tau) \approx \frac{2}{\pi} \sigma_{x_0}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2\sigma_{x_0}^2} R_{x_0}^2(\tau) + \frac{1}{4! \sigma_{x_0}^4} R_{x_0}^4(\tau) \right] \quad (8)$$

将(8)式进行付氏变换即得到  $y_0(t)$  的功率谱密度函数  $S_{y_0}(\omega)$ 。因为  $R_{x_0}(\tau)$  的付氏变换为

$x_0(t)$ 的功率谱密度函数, 记为:

$$R_{x_0}(\tau) \xrightarrow{F} S_{x_0}(\omega)$$

根据付氏变换的卷积定理, 有:

$$R_{x_0^2}(\tau) \xrightarrow{F} S_{x_0}(\omega) * S_{x_0}(\omega) \stackrel{\Delta}{=} P(\omega) \quad (9)$$

同理:

$$R_{x_0^4}(\tau) \xrightarrow{F} P(\omega) * P(\omega) \stackrel{\Delta}{=} Q(\omega) \quad (10)$$

上式中, “\*”表示卷积。

将(8)式两边进行付氏变换, 并将(9), (10)式带入, 并除去由直流电平引起的右边第一项, 得到 $y_0(t)$ 的交变功率谱密度的表达式:

$$\begin{aligned} S_{y_0x}(\omega) &= \frac{1}{\pi\sigma_{x_0^2}} P(\omega) + \frac{2}{4! \pi\sigma_{x_0^6}} P(\omega) * P(\omega) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma_{x_0^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_0}(u) S_{x_0}(\omega-u) du + \frac{2}{4! \pi\sigma_{x_0^6}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(u) P(\omega-u) du \quad (11) \end{aligned}$$

因为检波器后接的积分器的频带很窄, 在计算它的输出功率谱时, 可近似地用输入功率谱在零频时的值带入。因此只计算 $S_{y_0x}(\omega)|_{\omega=0}$

$$S_{y_0x}(0) = \frac{1}{\pi\sigma_{x_0^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_0}(u) S_{x_0}(-u) du + \frac{1}{4! \pi\sigma_{x_0^6}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(u) P(-u) du \quad (12)$$

$S_{x_0}(\omega)$ 的谱形如下图

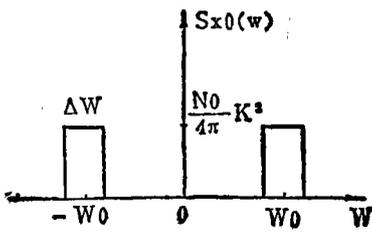


图2  $x_0(t)$ 的功率谱

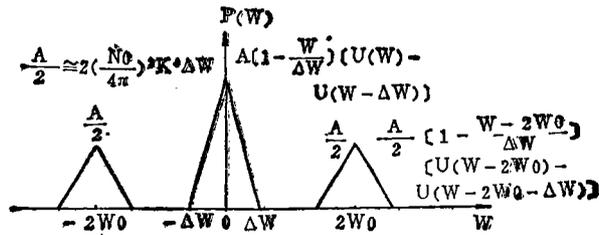


图3  $P(\omega)$ 波形图

利用卷积的图解法得<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_0}(u) S_{x_0}(\omega-u) du \\ &= \begin{cases} \left(\frac{N_0}{4\pi}\right)^2 K^4 [\Delta\omega - |\omega + 2\omega_0|] & -2\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq -2\omega_0 + \Delta\omega \\ 2 \left[\frac{N_0}{4\pi}\right]^2 K^4 [\Delta\omega - |\omega|] & -\Delta\omega \leq \omega \leq \Delta\omega \\ \left(\frac{N_0}{4\pi}\right)^2 K^4 [\Delta\omega - |\omega - 2\omega_0|] & 2\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq 2\omega_0 + \Delta\omega \end{cases} \end{aligned}$$

图形如下图3所示。

显然有:

$$P(0) = 2 \left[\frac{N_0}{4\pi}\right]^2 \Delta\omega K^4 = \sigma_{x_0^4} / 2\Delta\omega \quad (13)$$

从图 3 可知:  $P(\omega) = P(-\omega)$  所以有:

$$Q(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) P(-\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(\omega) d\omega$$

$P^2(\omega)$  的图形显然是图 3 波形的平方, 即:

$$\begin{aligned} Q(0) &= 2 \int_0^{\Delta\omega} A^2 \left(1 - \frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2 d\omega + 4 \int_{2\omega_0}^{2\omega_0 + \Delta\omega} \frac{A^2}{4} \left[1 - \frac{\omega - 2\omega_0}{\Delta\omega}\right]^2 d\omega \\ &= A^2 \Delta\omega = \sigma_{x_0}^2 / 4 \Delta\omega \end{aligned} \quad (14)$$

将(13)、(14)式带入(12)式, 得:

$$S_{y_0\text{交}}(\omega) \doteq 1.042 \frac{\sigma_{x_0}^2}{2\pi\Delta\omega} \quad (15)$$

积分器的输出方差为<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_{z_0}^2 &\doteq S_{y_0\text{交}}(0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = S_{y_0\text{交}}(0) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1+zRC\omega} \right|^2 d\omega \\ &= S_{y_0\text{交}}(0) / 2RC = 1.042 \sigma_{x_0}^2 / 4\pi RC \Delta\omega \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $|H(\omega)|$  为 RC 积分器的传输函数。

由于积分器的直流传输函数  $H(0) = 1$  则积分器输出均值为

$$E[z_0] = H(0)E(y_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_{x_0} \quad (17)$$

因为任一分布形式的噪声通过时常数较大的积分器后均为高斯分布, 所以白噪声通过系统后的输出  $z_0(t)$  是高斯分布的, 其均值与方差由(16)、(17)两式确定。

### 三、目标信号通过测距系统

当目标信号来到时, 系统的输入为信号与噪声的叠加:

$$r(t) = S(t) + n(t) = f(t) \cos\omega_0 t + n(t) \quad (18)$$

由于窄带滤波器是线性系统, 可将信号与噪声分别处理。信号引起的输出为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} x_S(t) &= [f(t) * h_L(t)] \cos[\omega_0 t + \theta(\omega_0)] \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) H_L(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \cos[\omega_0 t + \theta(\omega_0)] \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $H_L(\omega)$  为  $H_B(\omega)$  的等效低通传输函数,  $F(\omega)$  为  $f(t)$  的频谱。  $F(\omega)$  为 sinc 函数, 如图 4 所示。

(19) 式的求解是麻烦的。在实际的系统中满足如下条件:

$$\Delta\omega \gg \frac{2\pi}{T}$$

从图 4 中可知, 上面的条件表示信号的绝大部分频谱均落在滤波器的通频带内, 可近似地有:

$$F(\omega) \cdot H_L(\omega) \doteq KF(\omega) \quad (20)$$

令(19)式中的固定相移  $\theta(\omega_0) = 0$ , 对问题的分析无影响, 将(20)式代入, 得到:

$$x_S(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} KF(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \cos\omega_0 t = Kf(t) \cos\omega_0 t \quad (21)$$

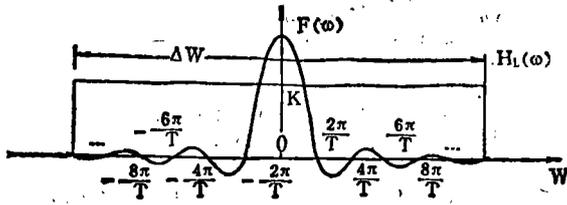


图4  $F(\omega)$ 与 $H_L(\omega)$

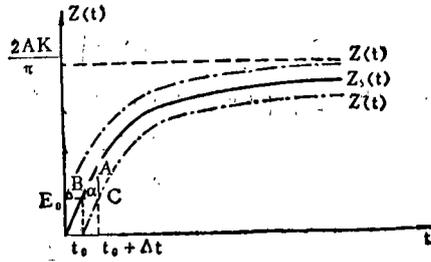


图5 积分器输出波形前沿

说明在上述的近似条件下，信号被认为无畸变地通过了带通滤波器。

噪声通过滤波器后的结果已在(2)及(3)式中给出。

因此，检波器的输入为：

$$x(t) = x_s(t) + x_0(t) = Kf(t)\cos\omega_0 t + x_0(t) = \rho_x(t)\cos[\omega_0 t + \theta_x(t)] \quad (22)$$

式中， $\rho_x(t)$ 为信号加噪声的包络，根据条件(5)大信噪比输入的假设，它的概密函数近似地为高斯分布<sup>[5]</sup>。

$$f(\rho_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left\{-\frac{(\rho_x - KA)^2}{2\sigma_0^2}\right\} \quad \rho_x > 0, 0 \leq t \leq T$$

$x(t)$ 通过绝对值检波器后的输出为：

$$\begin{aligned} y(t) &= \rho_x(t) |\cos[\omega_0 t + \theta_x(t)]| \triangleq \rho_x(t) |\cos W_{\theta_x} t| \quad W_{\theta_x} t = \omega_0 t + \theta_x(t) \\ &= \rho_x(t) \left| \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} \cos k W_{\theta_x} t \right| \end{aligned} \quad (23)$$

经过积分器后，上式中的所有调制项均将被滤除，只考虑右边第一项即可，令：

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \rho_x(t)$$

则有：

$$E[u(t)] = \frac{2}{\pi} KA, \quad D[u(t)] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sigma_{x_0}^2$$

此时积分器的输入信噪比为：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_u = \frac{E^2[u]}{D[u]} = \frac{K^2 A^2}{\sigma_{x_0}^2} \quad (24)$$

可得积分器的输出信噪比为<sup>[1]</sup>：

$$\left(\frac{S}{N}\right)_z = 2TW \left(\frac{S}{N}\right)_u = 4RC\Delta\omega K^2 A^2 / \sigma_{x_0}^2 \quad (25)$$

式中： $T=2RC$ 为积分器的等效积分时间， $W=\Delta\omega$ 为系统的等效带宽。注意到信号的功率在零频上，通过积分器后无损失。即积分器输出的信号功率为 $P_{zs} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 K^2 A^2$ 。代入(25)式，后得到噪声功率为：

$$\sigma_z^2 = P_{zs} / \left(\frac{S}{N}\right)_z = \frac{\sigma_{x_0}^2}{\pi^2 RC \Delta\omega} \quad (26a)$$

且有：

$$E[z] = E[u] = \frac{2}{\pi} KA \quad (26b)$$

#### 四、系统的测距误差

积分器输入端信号的包络可表示为:

$$u_s(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} KA & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

通过积分器后,其前沿斜率变小,即上升沿变得平坦,门限对上升沿进行判决,利用线性电路知识及拉氏变换,得到积分器输出的象函数为:

$$Z_s[S] = u_s(S)H(S) = \frac{2AK}{\pi} \cdot \frac{1}{S(1+SRC)} [1 - e^{-\frac{T}{RC}}]$$

经过反变换后得积分器的输出为(仅有信号时):

$$z_s(t) = \begin{cases} \frac{2AK}{\pi} [1 - e^{-\frac{t}{RC}}] & 0 \leq t \leq T \\ \frac{2AK}{\pi} [e^{\frac{T}{RC}} - 1] e^{-\frac{t}{RC}} & t > T \end{cases} \quad (27)$$

只需考虑 $z_s(t)$ 在 $(0, T)$ 内的前沿表示式。这是无噪声情况下得出的结果,实际的输出应有噪声叠加其上,如图5所示:

图5中,实线表示无噪声影响时输出波形前沿,点划线表示叠加噪声以后可能出现的与信号波形离差最大的包络形状。实际的输出波形是在两条点划线间随机变化的。显然,在门限电平 $E_0$ 的判定下得到的目标的到达时间也是随机变化的。有一随机测时误差 $\Delta\tau(t)$ 。

做小三角形 $\triangle ABC$ (如图5),其中, $AB$ 为无噪声时输出波形的一小段,近似为直线。 $AC$ 为随机包络 $Z(t)$ 在某时刻的取值,是一随机变量, $BC$ 表示随机时间变量 $\Delta\tau(t)$ , $E_0$ 为幅度判决门限电平。显然有如下关系:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{z(t)}{\Delta\tau(t)} \quad (28)$$

从图上可知:

$$\operatorname{tg} \alpha = z_s'(t) |_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{2AK}{\pi} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \right]_{t=t_0} = \frac{2AK}{\pi RC} e^{-\frac{t_0}{RC}} \quad (29)$$

再根据:

$$E_0 = \frac{2AK}{\pi} (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}})$$

得到:

$$t_0 = -RC \ln \left[ 1 - \frac{E_0 \pi}{2AK} \right] \quad (30)$$

上式满足条件(图5所示):

$$E_0 < \frac{2AK}{\pi}$$

将(30)式代入(29)式,整理后得:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\pi RC} [2AK - E_0 \pi] \triangleq \mu \quad (31)$$

则有:

$$\Delta\tau(t) = z(t)/\mu = \frac{1}{\mu}z(t) \quad (32)$$

式中 $\mu$ 为常量, $z(t)$ 为高斯变量,显然 $\Delta\tau(t)$ 亦为高斯变量,其方差为,

$$\sigma_{\Delta\tau}^2 = D[\Delta\tau] = \frac{1}{\mu^2}\sigma_z^2 \quad (33)$$

则测距误差为:

$$\Delta S = C_A \Delta\tau(t) \quad C_A \text{ 为声速} \quad (34)$$

它的方差为:

$$\sigma_{\Delta S}^2 = C_A^2 \sigma_{\Delta\tau}^2 = \frac{C_A^2}{\mu^2} \sigma_z^2 \quad (35)$$

将(26)式及(31)式代入上式,得:

$$\sigma_{\Delta S}^2 = \frac{C_A^2 K^2 RC}{(2AK - E_0\pi)^2} \cdot \frac{\sigma_n^2}{2\pi\Delta f_n} \quad (36)$$

显然,测距误差 $\Delta S$ 也是一高斯变量。

至此,导出了本系统在背景噪声影响下的测距误差,对(36)式分析,可得出以下结论:

### 1. 测距误差与积分器积分时间成正比。

从物理意义上看是易于理解的。积分时间越长输出波形的前沿上升就越缓慢,其斜率变小,从(33)式可知, $\Delta\tau(t)$ 增大,从而引起测距误差增加,当积分时间大到一定程度后较小的噪声也会引起较大的测距误差,将积分器降低噪声方差的好处完全抵消了。因此在系统设计中,在满足滤除载频的情况下,时常数 $RC$ 应尽量选得小一些。

### 2. 检测门限过高使测距误差增大

这是由于输出包络在电平较高的地方斜率较小,在噪声的影响下,得到的测时误差较大,引起测距误差增加,因此,必须尽量降低检测门限电平。

### 2. 测距误差与带通滤波器的带宽无关

这是因为积分器的带宽远小于带通滤波器的带宽,带通滤波器对噪声的抑制作用完全被积分器所代替了。使用它的主要原因是为了消除其它频率的干扰对本机工作的影响。

### 4. 输入信噪比的增加使测距误差下降

从(36)式看出,由于分母的平方关系,信号幅度增加使测距误差大大下降,而噪声功率降低亦使测距误差减小。因而在其它参数不能变动的情况下,增加输入信噪比是减小测距误差的较好的办法。但这需要增加发射的功率。

## 五、结 束 语

上文中导出了测距误差的方差,分析了测距误差产生的原因和影响它的因素。并提出了由减小积分时间和降低判决门限的方法来改善测距精度。但这二个方法带来了新的问题,即采用它们后均会使系统的虚警概率上升。为解决系统的测距精度和虚警概率的矛盾,提高接收机性能,我们在实际的定位声纳测距系统中采用了比较新颖和实用的“双重判决系统”来代

(下转第44页)

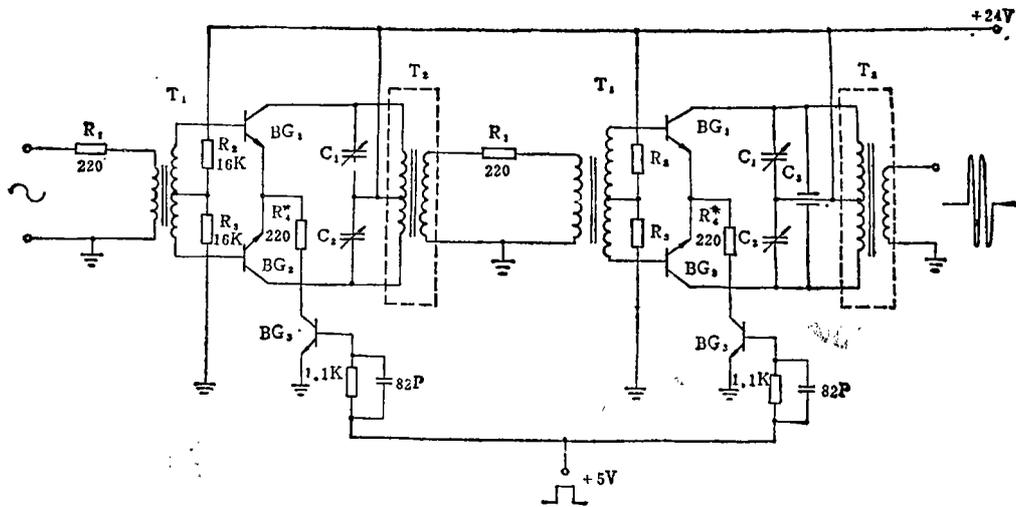


图 2

利用上述电路，我们获得了在1~20 MHz频率范围内、载波频率可任意调节的r.f.脉冲。在很宽的频率范围内，当频率变动时，载波波形，可保持很好的正弦波形，而载波的幅度也不会有很大的起伏。这是振铃电路很难做到的。r.f.脉冲的宽度由调制脉冲的宽度决定，实际最小脉宽是1μs。r.f.脉冲的峰—峰幅度超过20V。本电路的另一个优点是r.f.脉冲里的载波频率可准确测量，这是振铃电路做不到的。

图3是我们采用双平衡调制电路后，由回波重合法得到的熔石英样品两个r.f.脉冲

回波的重合波形图，从图中可看出，r.f.脉冲的波形还是满意的。

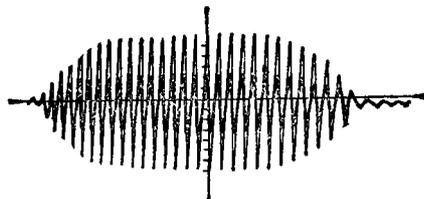


图 3

### 参 考 文 献

[1] 王积方等 物理14.373(1985)

(上接第24页)

替本系统中单纯的幅度门限判决，从而使系统的测距误差和虚警概率均大大降低，这拟在另一篇文章中介绍。

### 参 考 文 献

[1] 郑兆宁，向大威著《水声信号被动检测与参数估计理论》科学出版社  
 [2] 数学手册编写组编《数学手册》人民教育出版社 1979  
 [3] E. O. 布赖姆著《快速付里叶变换》  
 [4] K. K. 克拉克等著《通信电路：分析与设计》  
 [5] 靳德航等著《信号检测理论导论》