

逆散射微扰论及其超声断层技术应用

陆 振 球
(南开大学物理系)

本文给出逆散射微扰论及其在 Born 和 Rytov 变换下的高阶近似重建公式。其目的是解决超声衍射断层技术中出现的中等散射问题从而提高断层图的分辨率。

本文给出的二阶重建公式，形式简单，和传统的一阶 Born 和 Rytov 近似重建算法公式相同。

一、引 言

本文讨论透射衍射断层术，它是一种逆散射问题。所谓衍射断层术就是由波成象物体外部的散射场的观测值来重建该物体的一个或几个参数，其中必须考虑到衍射效应。超声透射断层术使用频率约在 3MHz 左右，其在水中的波长为毫米数量级，因而衍射效应显著。迄今为止，绝大多数的工作都假定散射体与其周围介质的声学特性相差很小，讨论的是弱散射情况，因而可用一阶微扰近似处理。这只有当物体尺寸与折射率偏差之积，即声程差很小时才适用。一些计算表明，在 Rytov 一级近似下，相对折射率差为 4×10^{-2} 时，断层图的失真较小； 8×10^{-2} 时，失真较大；达到 10^{-1} 时，失真非常大^[1]。因此，要减少失真，就必须研究中等的和强散射时的重建算法。一种办法是采用一般变换，寻求一种减少失真的最佳变换^[1]；另一种办法是考虑高阶微扰。当散射体与周围介质的折射率差较大时，反射及多重散射效应就十分显著，必须考虑高阶微扰。

本文利用 Jost 和 Kohn^[2]提出的而后由 Moses 和 Prosser^[2-6]等人发展的逆散射微扰论，由此解决以几何参数-旋转参数为补偿的逆散射问题，得出高阶微扰近似重建公式。

二、逆散射微扰法及重建公式

今讨论 n 维结构物体在平面波激发下的重建问题，二维和三维物体的重建是应用的特例^[7]。

设 $\psi(\mathbf{x})e^{i\omega_0 t}$ 是圆频率为 ω_0 的 n 维空间中的波动场(声压)，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是 n 维位置矢量， T 表示转量，则有

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + K^2(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

其中 $\nabla^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为 n 维空间的拉普拉斯算符，而

$$K(\mathbf{x}) = \begin{cases} K_0 & \mathbf{x} \in D^* \\ K(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D \end{cases}$$

D 和 D^* 分别为物体空间和周围空间; $K_0 = \omega_0/C_0, K(\mathbf{x}) = \omega_0/C(\mathbf{x})$; $C(\mathbf{x}), C_0$ 分别为 D 和 D^* 中的声速, 令 n 为折射率, 则有

$$K/K_0 = C_0/C = n/n_0$$

K, C, n 为复函数, 其虚部表征介质的吸收. 令 $f(\mathbf{x}) = (n/n_0)^2 - 1$

$$\text{则方程(1)化为 } \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + K_0^2 \psi(\mathbf{x}) = -K_0^2 f(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \quad (2)$$

引入广义变换^[1] $\chi(\mathbf{x}) = \psi_0 g(\alpha), g(1) = 0, \alpha = \psi/\psi_0$

$$\text{则(2)式化为 } \nabla^2 \chi + K_0^2 \chi = -K_0^2 f \psi_0 \frac{dg}{d\alpha} \alpha + \psi_0 \frac{d^2 g}{d\alpha^2} (\nabla \alpha)^2 \quad (3)$$

χ 称为广义散射波场^[7], 若取 $g(\alpha) = \alpha - 1$, 便得Born变换

$$\chi = \psi - \psi_0 = \psi_s, \nabla^2 \psi_s + K_0^2 \psi_s = -K_0^2 f \psi \quad (4)$$

若取 $g(\alpha) = L n \alpha$ 便得Rytov变换

$$\chi = \psi_0 L n \frac{\psi}{\psi_0} = \psi_0 \delta \varphi$$

$$\nabla^2 \chi + K_0^2 \chi = -K_0^2 f \psi_0 + \psi_0 (\nabla \ln \alpha)^2 = -K_0^2 f \psi_0 + \psi_0 \left(\nabla \frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \quad (5)$$

其中 $\varphi = L n \psi, \varphi_0 = L n \psi_0, \delta \varphi = \varphi - \varphi_0$ 为复位相场。

现在引入物体的旋转参数. 设 \mathbf{x}' 表示通过坐标系旋转而得的另一个坐标系下的坐标矢量

$$\mathbf{x} = R \mathbf{x}'$$

其中 R 为 $n \times n$ 正交矩阵, 即其逆等于其转置矩阵 $R^{-1} = R^T$. 再让物体作旋转(其中令坐标 x'_j ,

$j = 3, 4, \dots, n$ 固定),

$$\mathbf{x}'' = \Theta(\theta) \mathbf{x}'$$

其中 \mathbf{x}'' 为物体旋转以后点的位置坐标, 而

$$\Theta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & & \\ & & \theta & \\ & & & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

I_{n-2} 为 $(n-2) \times (n-2)$ 单位矩阵(见图1)。

当物体取向为 θ 角时, 方程(4)和(5)分别为

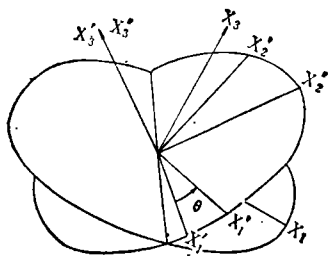


图1 旋转 \mathbf{x} 坐标系得 \mathbf{x}' 坐标系; 令 $x'_j, j=3, \dots, n$ 固定, 旋转物体

$$\nabla^2 \psi_s(\theta, \mathbf{x}) + K_0^2 \psi_s(\theta, \mathbf{x}) = -K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}) \psi(\theta, \mathbf{x}) \quad (6)$$

$$\nabla^2 \chi(\theta, \mathbf{x}) + K_0^2 \chi(\theta, \mathbf{x}) = -K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}) \psi_0(\mathbf{x}) + \psi_0(\mathbf{x}) \left[\nabla \frac{\chi(\theta, \mathbf{x})}{\psi_0(\mathbf{x})} \right]^2 \quad (7)$$

考虑索墨菲辐射条件后, (6)(7)两式分别化成积分方程

$$\begin{aligned} \psi_s(\theta, \mathbf{x}) &= \int G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) [-K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}') \psi(\theta, \mathbf{x}') d^n \mathbf{x}' \\ &= G(|\mathbf{x}|) \mathbf{x}_s [-K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}') \psi(\theta, \mathbf{x}')] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \chi(\theta, \mathbf{x}) &= \int G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \left\{ -K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}') \psi_0(\mathbf{x}') + \psi_0(\mathbf{x}') \left[\nabla \frac{\chi(\theta, \mathbf{x}')}{\psi_0(\mathbf{x}')} \right]^2 \right\} d^n \mathbf{x}' \\ &= G(|\mathbf{x}|) \otimes_x \left\{ -K_0^2 f(R\Theta R^{-1} \mathbf{x}') \psi_0(\mathbf{x}') + \psi_0(\mathbf{x}') \left[\nabla \frac{\chi(\theta, \mathbf{x}')}{\psi_0(\mathbf{x}')} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 \otimes_x 表示对矢量变量 \mathbf{x} 求卷积,

$$G(\chi) = \frac{K_0^{\frac{n}{2}-1}}{4(2\pi\chi)^{\frac{n}{2}-1} i^{n-1}} H_{-(\frac{n}{2}-1)}^{(1)}(K_0\chi) \quad (10)$$

为 n 维自由空间中的格林函数^[8], $H_{-(\frac{n}{2}-1)}^{(1)}(K_0\chi)$ 为第一类 $-(\frac{n}{2}-1)$ 阶汉克尔函数, $d^n\mathbf{x}' = dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n$.

对方程(8)就变量 $\mathbf{x}_s = (x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ 实行 $(n-1)$ 维傅立叶变换, 亦即求其平面波角谱^[9], 根据卷积和调制定理有

$$\begin{aligned} \Psi_a(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) &= -K_0^2 \int G_a(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) T_a(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) d\mathbf{x}'_1 \\ &= -K_0^2 G_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) \otimes_{x_1} T_a(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) \end{aligned} \quad (11)$$

$$T_a(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) = \int f_a(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s) T_a(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}'_s) d^{n-1}\mathbf{v}'_s = f_a \otimes \mathbf{v}_s \psi_a \quad (12)$$

$$\text{其中, } \Psi_{sa}(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) = \int \psi_s(\theta, \chi) e^{-i2\pi\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}} d^{n-1}\chi_s \quad (13)$$

$$\text{而 } G_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) = \frac{e^{i2\pi\sqrt{\bar{K}_0^2 - \mathbf{v}_s^2 + i0} |\mathbf{x}_1|}}{4\pi i \sqrt{\bar{K}_0^2 - \mathbf{v}_s^2 + i0}} \quad (14)$$

是奇异型广义函数(见[7]的附录3) f_a 和 ψ_a 分别为 $f(R\Theta R^{-1})$ 和 $\psi(\theta, \chi)$ 的平面波角谱; $\mathbf{v}_s = (v_2, v_3, \dots, v_n)^T$, $\bar{K}_0 = \frac{K_0}{2\pi} = \frac{1}{\lambda_0}$; $\otimes \mathbf{v}_s$ 表示对空间频率矢量求卷积; 下标 a 表示角谱。显然

$$f_a(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) = \int F(R\Theta R^{-1}\mathbf{v}) e^{i2\pi\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}} d\mathbf{v}_1 \quad (15)$$

其中 F 为 f 的傅立叶变换, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$

将(15)代入(12)和(11)便得

$$\begin{aligned} \psi_{sa}(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) &= -K_0^2 \int d\mathbf{x}'_1 d^n G_{a, \mathbf{x}'_1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) e^{i2\pi\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1} \\ &\quad \cdot F(R\Theta R^{-1}(\mathbf{v}'_1 + (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s))) \psi_n(\theta, \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s = (v'_1, v_2 - v'_2, \dots, v_n - v'_n)^T$

+ 表示直接和。显然有

$$\psi_{sa}(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) = \psi_a(\theta, \mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s) - \psi_{sa}(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_s)$$

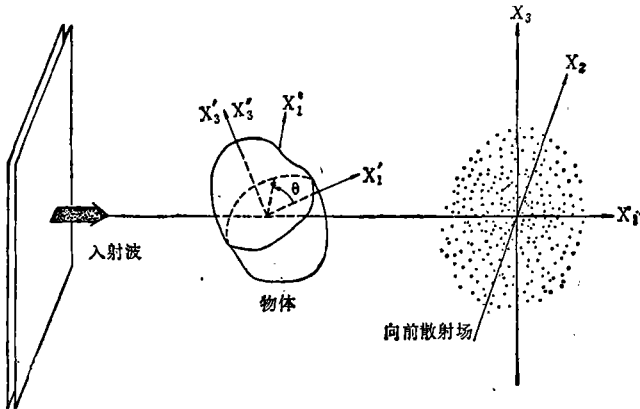


图2 沿 x_1 方向传播的入射波和绕 x_3 轴旋 θ 角的物体

$$L = \Gamma F = -K_0^2 \int d\mathbf{x}'_1 d^n \mathbf{v} G_a(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, \mathbf{v}_s) e^{i2\pi\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{x}'_1} F[R\Theta R^{-1}(\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}'_s))] \quad (18)$$

其中 Γ 为自由空间传播算符。

ψ_{sa} 为 $\psi_a(\mathbf{x})$ 的平面波角谱。

迄今为止, 并没有对入射波的波形作任何限制, 它可以是平面波、球面波或高斯波束。若入射波是沿 x_1 方向的平面波(见图2)

$$\psi_0(\mathbf{x}) = A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}_1}$$

则 $\psi_{sa} = A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}_1} \delta(\mathbf{v}_s)$

δ 为狄拉克函数, 于是有

$$(I - L)\psi_a = A e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}_1} \delta(\mathbf{v}_s) \quad (17)$$

其中 L 为线性积分算符

现再引入微扰参数 ε , 令 $F = \sum_{m=1}^{\infty} F_m \varepsilon^m$, 代入(17)式, 于是有 $\psi_{s0} = A \Gamma F_1 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s)$

$$(19)$$

$$\sum_{m=1}^m \sum_{j=1}^n \prod_{j=1}^n (\Gamma F_{m_1}) e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) = 0 \quad m \geq 2 \quad (20)$$

(19)式就是方程(6)的一阶微扰近似

$$\begin{aligned} \psi_{s0}(\theta, x_1, \mathbf{v}_s) &= A \Gamma F_1 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) \\ &= \frac{-K_0^2 e^{i2\pi \sqrt{\bar{K}_0^2 - v_s^2 + i0} x_1}}{4\pi i \sqrt{\bar{K}_0^2 - v_s^2 + i0}} F_1 (R\theta R^{-1}(\mathbf{v} - \bar{K}_0)) \Big|_{v_1} \end{aligned} \quad (21)$$

这里已假定 $x_1 > x'_1$, 即接收阵所在位置 x_1 位于被成象物体的左方。由公式(21)便可得物体在空域和频域中的一阶Born近似下的重建公式。

由公式(20)可得高阶Born近似重建公式, 特别当 $m=2$ 时有

$$[\Gamma F_2] + (\Gamma F_1)^2 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) = 0 \quad (22)$$

即只需将一阶微扰近似重建公式中的规一化角谱 ψ_{s0}/A 代之以 $-(\Gamma F_1)^2 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s)$ 便得二阶微扰重建公式。

对于Rytov变换情况, 可以得到类似的逆散射微扰方程,

$$(I - Z)\chi_0 = A \Gamma F e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) \quad (23)$$

其中 Z 为一非线性积分算符。

如果令 $F = F_1 + F_2$, 其中 F_1 和 F_2 各满足

$$\chi_0 = A(\Gamma F_1) e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) \quad (24)$$

$$A(\Gamma F_2) e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) + Z\chi_0 = 0 \quad (25)$$

公式(24)便是Rytov变换下的近似公式。同样地, (25)式不能提供高阶近似算法。类似于Born近似情况, 若将(24)代入(25), 可得Rytov变换下的二阶近似公式

$$(\Gamma F_2) e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s) + AZ[\Gamma F_1 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s)] = 0 \quad (26)$$

Rytov变换下的更高阶的近似比公式(26)还要复杂, 在此不再推导了。

三、结 论

根据逆散射微扰理论, 本文给出了以旋转角为补偿参数的高阶近似重建公式。方程式(22)和(26)表明, 二阶近似重建公式和一阶近似重建公式在形式上很相象, 即在一阶近似公式中规一化散射场角谱分别代之以 $-(\Gamma F_1)^2 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s)$ 和 $-AZ[\Gamma F_1 e^{ik_0 x_1} \delta(\mathbf{v}_s)]$ 便得Born和Rytov二阶近似重建公式。

本文只给出了重建算法公式, 进一步的数值计算, 二阶近似适用条件以及二种重建算法的比较将在以后提出。

本工作得到国家教育委员会的赞助, 对此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] M. Kaveh, M. Soumekh, Z. Q. Lu, R. K. Mueller and J. F. Greenleaf, "Further Results on Diffraction Tomography Using Rytov's Approximation," in Acoustical Imaging, Vol. 12, E. A. Ash and K. Hill,

非线性声参量测量中的衍射修正*

孙永臣 董彦武
(陕西师范大学应用声学所)

在超声传播参数的测量中,衍射效应会给测量引来假象。本文结合前文^[1]中的实验问题,讨论了衰减及非线性声参量 B/A 测量中的衍射修正问题。证明加入此修正后的测得值更加可靠。

引言

在前文^[1]中,我们研究了生物组织的非线性声参量 B/A 。在测量的过程中,由于收发换能器之间的衍射效应,会使测得的结果不很准确。因此需要对衍射带来的影响做修正,以及对介质衰减的影响给出一个恰当的评价。再者由于换能器的非理想情况(厚薄不均,极化不均匀,边缘不圆,无穷大刚性障板的条件不能满足等),使得在讨论衍射问题时,不能得到很好的结果,因此也需要对这种非理想条件影响做出评价。

本文结合前文^[1]中的实验,讨论了发射、接收换能器同样大小时,基波、二次谐波的

衍射修正,以及换能器半径的测量对超声传播参数测量的影响。

一、基波的衍射修正

在半径为 a 的发射器发射声波的理想情

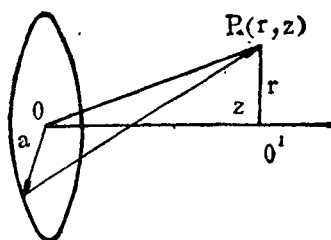


图1 换能器发射示意图

* 中国科学院科学基金资助的课题。

Eds. New York: Plenum, 1982

- [2] R. Jost and W. Kohn, "Construction of a potential from a phase shift," Phys. Rev. Vol. 87, No. 6, PP. 977-994, Sept. 1952
- [3] H. Moses, "Calculation of the Scattering Potential from Reflection Coefficients," Phys. Rev. Vol. 102, No. 2, PP. 559-567, Apr. 1956
- [4] R. T. Prosser, "Formal Solutions of Inverse Scattering Problems I," J. Math. Phys. Vol 10, No. 10, PP. 1819-1822, Oct. 1969
- [5] R. T. Prosser, "Formal Solutions of Inverse Scattering Problems II," J. Math. Phys. Vol. 17, No. 10, PP. 1775-1779, Oct. 1976
- [6] R. T. Prosser, "Formal Solutions of Inverse Scattering Problems III," J. Math. Phys. Vol 21, No. 11, PP. 2648-2653, Nov. 1980
- [7] Z. Q. Lu, "Multidimensional Structure Diffraction Tomography for Varying Object Orientation through Generalized Waves," Inverse Problems, Vol. 1, No. 4, PP. 339-356, Nov. 1985
- [8] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Vol. 1, New York: Academic, 1953
- [9] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, New York: McGraw-Hill, 1968