统计能量分析的原理及应用

王 佐 民

(同济大学声学所)

统计能量分析 (Statistical Energy Analysis)是从六十年代初开始发展起来的一种分析方法。R·H·Lyon和P·W·Smith, Jr的早期工作确定了SEA的理论基础。统计能量分析可以用来处理复杂结构的振动、声与振动结构间的相互作用等问题。

按照 Lyon 的解释，SEA“统计”一词表示从统计学角度出发考虑被分析系统中的各随机参量。采用“能量”这个参量是为了消除力学系统与声学系统之间的差异，建立两者间的相互联系。“分析”则是强调SEA是解决问题的一种研究方法，而不是某种技巧。

统计能量分析将所研究的系统分成若干个子系统，并且从统计的观点出发假定在所讨论的频带内，各子系统中每个振动模式都是具有相等的能量。然后列出各子系统中的贮存能、耗散能和这些子系统间能量交换的关系，最后得到所需要的能量平衡方程。由于统计能量分析将一个复杂的系统分成了若干简单的子系统。这样，能量平衡方程中所需要的各种模态密度和损耗因子就比较容易获得了。

一、能量平衡方程

对于最简单的线性耦合双振子系统，可以列出它们所遵循的运动方程组。从这个方程组出发，经过一定的运算，就能精确求得从振子 1 传到振子 2 的时均功率流$\overline{P}_{12}$：

$$\overline{P}_{12}=g(\overline{E}_1-\overline{E}_2)$$

其中，$\overline{E}_1$是振子1的时均总振动能，$\overline{E}_2$是振子 2 的时均总振动能，g是比例系数。

可以看到，能流从能量高的振子传向能量低的振子；传递的能量正比于两振子间的能量差。比例系数g仅是振子系统各参量的函数，与外界策动源无关。

若定义耦合损失因子η_{12}和η_{21}：

$$\eta_{12}\omega_1=g, \qquad \eta_{21}\omega_2=g$$

其中，ω_1，和ω_2分别是振子1和振子2的振动频率。

于是，就可列出双振子耦合系统的能量平衡方程：

$$\overline{P_1}=\omega_1\eta_1\overline{E}_1+\eta_{12}\omega_1(\overline{E}_1-\overline{E}_2)$$

$$\overline{P}_2=\omega_2\eta_2\overline{E}_2+\eta_{21}\omega_2(\overline{E}_2-\overline{E}_2)$$

其中$\overline{P}_1$和$\overline{P}_2$是外界输给振子 1 和振子 2 的时均功率，η_1和η_2是振子1和振子2的损耗因子。

平衡方程的物理意义是，在平衡情况下，由外界输给某个振子的能量$\overline{P}_i$等于该振子本身耗散的能量$\omega_i\eta_i\overline{E}_i$和输给另一个振子2的能量$\eta_{ij}\omega_i(\overline{E}_i-\overline{E}_j)$的总和。

基于同样的思想，可以导出K个子系统的能量平衡方程。假定，在中心频率为ω的△ω带宽内，某一子系统具有 N_i 个振动模式。这时，引入模态平均损耗因子η_i

$$\eta_i=(\sum_{\alpha=1}^{N_i}\eta_{i\alpha})/N_i$$

模态平均耦合损耗因子η_{ij}

$$\eta_{ij}=\Big(\sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}^{N_i,\ N_j}\eta_{i\alpha j\beta}\Big)/Nj$$

模态密度$n_i(\omega)$

$n_i(\omega)=N_i/\triangle\omega$

和模态能量 $\overline{E}_i/n_i$ 等概念。其中$\eta_{i\alpha}$是第i个子系统中第 α个振动模式的损耗因子，$\eta_{i\alpha j\beta}$是第 i 个子系统中第 α个振动模式对第j个子系统中第β个振动模式的耦合损失因子。

于是，可以导得K个子系统的耦合系统的能量平衡方程：

$$\omega\begin{bmatrix}(\eta_1+\sum\limits_{i\neq 1}^{k}\eta_{1i})n_1 & -\eta_{12}n_1 & -\eta_{13}n_1\cdots\cdots-\eta_{1k}n_1\\ -\eta_{21}n_2 & (\eta_2+\sum\limits_{i\neq 2}^{k}\eta_{2i})n_2 & -\eta_{23}n_2\cdots\cdots-\eta_{2k}n_2\\ & & \\ -\eta_{k1}n_k & & (\eta_k+\sum\limits_{i\neq k}^{k}\eta_{ki})n_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{E}_1/n_1\\ \overline{E}_2/n_2\\ \vdots\\ \overline{E}_k/n_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{P}_1\\ \overline{P}_2\\ \vdots\\ \overline{P}_k\end{bmatrix}$$

这个方程成立的条件是，(1)对于耦合损耗因子远小于内损耗因子的弱耦合情况，认为任意两子系统之间的能流传递关系不受所耦合的其他子系统的影响；(2)用每一个子系统未被耦合前的固有频率来代表耦合状态下该子系统的振动模式。并将每一个振动模式都看成为一个简振子；(3)在所讨论的频带△ω内，认为每个子系统中各个振动模式都具有相等的能量($n_i\eta_{ij}=n_j\eta_{ji}$)；(4)从第i个子系统经过耦合传递到第j个子系统的能量正比于这两个子系统之间的能量差，而每个子系统本身的内耗正比于该子系统的能量。

二、SEA的应用实例

统计能量分析是一种相当有用的方法。应用这种方法能够处理许多复杂结构的声辐射、声传递和声响应等问题。

这里列举两个实例以作介绍。

例1，隔墙板的声传递。

对于图1所示的系统，可以分成体积V_1的发声室、表面积A的隔墙板和体积V_2的接收室三个子系统。其相应的SEA参量是：

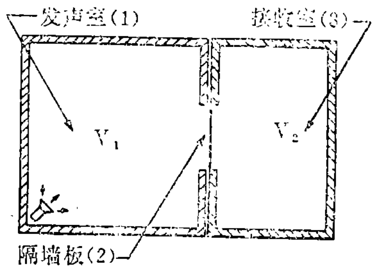

图1 隔墙板的声传递

$$\eta_1=\frac{2.2}{fT_1}$$

$$\eta_3=\frac{2.2}{fT_3}$$ η_2由材料特性决定

$$10\mathrm{Log}_{10}\eta_{13}=-TL+10\mathrm{Log}_{10}\Big(\frac{AC}{4V_1\omega}\Big)$$

$$\eta_{21}=\eta_{23}=\eta_r$$

$$\eta_r=\rho_oC\sigma/\omega m$$

$$n_1\cong\frac{V_1\omega^2}{2\pi^2C^3}$$

$$n_2\cong\frac{1}{2}A(m/B)^{1/2}$$

$$n_3 \cong \frac{V_3\omega^2}{2\pi^2C^3}$$

其中，T是房间的混响时间，T L 是随机入射时由质量定律确定的墙板传递损失，σ是板的辐射系数，m是板的面质量密度，B是板的弯曲刚度，ρ_0是空气密度，C是空气中的声速。

于是，可由能量平衡方程求得频带△ω内的模态能量$\overline{E}_1/n_1$和$\overline{E}_3/n_3$。进一步求得降噪量：

$$A_{tt}=10\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{E_3V_1}{E_1V_3}\right)$$

和墙板的传递损失(或隔声量)

$$R=A_{tt}+10\mathrm{Log}_{10}\left(\frac{ACT_3}{24V_3\ln 10}\right)$$

例2，建筑物内的声传递

在这种例子中，建筑物中顶板是165mm密水泥、外墙是150mm水泥砖、内墙是100mm水泥砖。将每个房间空间和各个壁面都看成一个子系统。共有98个子系统。在讨论中仅考虑墙的弯曲波。这时墙的模态密度

$$n=KS/C_g$$

其中，K是波矢，S墙的表面积，C_g群速度。

两相交墙间的耦合损耗因子

$$\eta_{12}=C_{g1}L_{12}\tau_{12}/\omega\pi S_1$$

其中，L_{12}是相交的棱长，τ传递系数。

对于几种不同的激发源．使用SEA计算了建筑物内每一子系统的声压级和表面速度。计算结果与测量值相比较平均误差为 4 dB。

三、SEA参数的确定

确定SEA参量是用SEA方法分析各类问题时的重要步骤。分析结果的精确程度与SEA参量的选取密切相关。相当的一部分的工作就是在这一方面开展的。目前，许多参量的计算公式或数据均可从相应的文献中查得。下面介绍各种常用的方法。

(1)耦合损耗因子的确定：

对于某些简单的振动系统，可以列出其遵从的运动方程。再从运动方程直接求出所需的η_{ij}表达式。前面介绍的双振子耦合系统问题就属此类。

对于弱阻尼系统，测定系统耦合前后的固有频率，得到固有频率的偏移值。然后，从这个偏移值来求得耦合损耗因子。

在某些情况下，可以导得耦合损耗因子与辐射系数σ、传递系数τ和特征阻抗Z等之间的相互关系。而这些声学量或者可以计算、或者可以测量。

此外，还有一种简接测量法。通过测定两非耦合子系统的损耗因子η_α和η_β，并测定在耦合情况下α子系统被激励时的平衡能$\overline{E}_\alpha$和$\overline{E}_\beta$。然后由公式

$$\eta_{\alpha\beta}=\eta_\beta n_\beta \overline{E}_\beta/(\eta_\beta \overline{E}_\alpha-n_\alpha \overline{E}_\beta)$$

来计算$\eta_{\alpha\beta}$

(2)内耗因子的确定

内耗因子与其他损耗参数，例如品质因子、临界阻尼比、对数衰减率、混响时间和吸收系数等有关。通常可用实验方法来确定这些参数，然后求得内耗因子η_i

在实际测量时又可分成稳态法(例如测定房间的稳态声场)和衰减法(例如测定房间的混响时间)两大类。

(3)模态密度的确定：

定义单位频段(1Hz或1弧度/秒)内，所含的模态数目为模态密度n(f)或n(ω)。

对于几何形状简单的子系统，例如矩形房间，简支矩形平板等，可由振动方程和相应的边界条件求得其模态密度。

对于几何形状较为复杂的结构，可用有限元等数值计算方法求得其在频率ω附近△ω带宽内的振动模式数，获得模态密度。但是，随着ω增高，模态密度增大，计算量明显增加。 (下转第11页)

增大。加之水听器附近还存在端流，与其相关的压力变化能辐射噪声，成为环境噪声的一部分。其属四极子辐射的性质，随传播距离增加很快就衰减掉，影响不到跃层之上，故在浅处低频谱级较为平稳。

3）.在2KHz以上的高频成分，谱随昼夜有上升和下降的明显规律。我们任选一组数据作说明：见图7，从下午四时左右高频谱开始上升直至午夜24时左右达到最大值。，10KHz处的谱级可达70dB。第二天，从零时至凌晨谱级又逐渐下降，直至上午10时，才恢复到头一天傍晚时的谱级（见图8）。

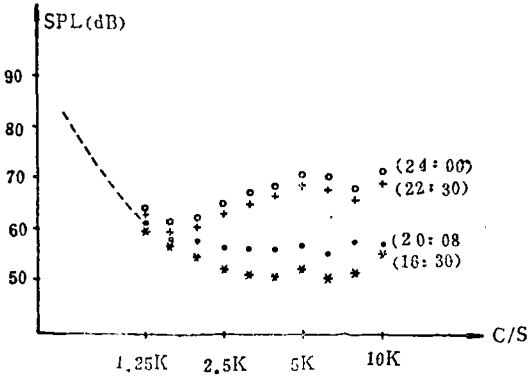

图7　夜的加深，高频谱级上升趋势

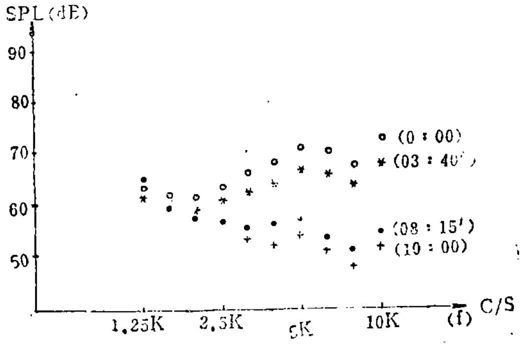

图8　午夜至清晨，高频谱级又渐渐下降

在不同的年份，相同的季节，该海区都有上述的高频谱特征。文献〔5〕指出：在1KHz—10KHz的频率范围内，谱级随日夜有规律的变动量是生物群体发声的结果，是海洋环境噪声的主要组成部分。我们认为，这个论断同样符合我们这个海区的实验结果。

参 考 文 献

〔1〕 Talham J.Robere "Ambient Sea Noise" J.A.S.A Vol.36 No.8(1964)

〔2〕 "水声学"　汪德昭，尚尔昌著，科学出版社

〔3〕 Kuperman W.A. J.A.S.A.V01.67 N0.6(1980)

〔4〕 尤里克《水声学原理》R.J.

〔5〕 Fish M.P. Biological Source of Sustained Ambient Noise in Marine Boi—Acoustics Pergamon Press PP.175—194

（上接第26页）

最后一种方法是实验测量系统的频响曲线，计算频响曲线上的尖峰数，从而确定模态密度。但是，这种测量的精度受到激发点和测量点的位置选取，传感器频响等因素的影响。而且，在高频段频响曲线中尖峰密集难以确定尖峰个数。

上述讨论仅限于弱耦合情况。研究表明，对于任意的耦合强度，SEA都是适用的。即在两个强耦合子系统间，传递的能流仍旧正比于这两个子系统的模态能量的差值。但是，这时的比例系数需要另行确定。有时还将依赖于子系统间的耦合强度。

需要指出，随着讨论频率的降低，各子系统的振动模式减少。这时，应用统计能量分析将会带来明显的误差。然后，直接从运动方程出发来进行分析可能更为有利。此外，统计能量法也难以处理声场指向性、和单频激发复杂结构的声响应之类问题。

参考文献

〔1〕 R·G·White and J·G·Walker, Noise and Vibration, Ellis Horwood, 1982.