

圆锯片振动模式的计算

章力 沈保罗

(同济大学声学研究所)

本文从理论上分析了圆锯片的振动模式,得到了振动位移和固有频率的表达式,讨论了存在阻尼时的情况,计算结果与实验数据符合良好。由对锯片振动的分析得出抑制高速旋转锯片哨叫声的一些措施。

一、引言

木工圆锯机噪声较高,特别是当高速旋转锯片产生哨叫声时可使圆锯机空载噪声高达90dB(A)以上^[1]。论文[1]研究表明这种哨叫声来源于锯片横向振动的谐振,因此为了抑制哨叫声,对锯片振动特性进行研究极其必要。本文仅对圆锯片的振动作一些理论上的初步分析。

二、振动方程的建立

圆锯片的振动显然是以本身劲度而不是以张力为恢复力的,故可把锯片视为薄板。由于锯齿很小,近似考虑不计及齿的影响,于是锯片被视为半径为b的薄圆板,而实用时又被半径为a的钢夹盘所钳定。振动区域为半径r在[a, b]之间的环,可写出其横向振动方程:

$$\frac{e^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{k^4} \nabla^4 \eta + \frac{1}{h\rho} [F_F + F_R + F_r] \quad (1)$$

式中 η 为振动位移, ω 为振动圆频率,而参数k的定义为

$$k^4 = \frac{12 \omega^2 \rho (1 - \sigma^2)}{E h^2} \quad (2)$$

其中E为锯片材料的杨氏模量, ρ 为密度, σ 为泊松比, h为锯片厚度。

F_F 为锯片所受的强迫外力, F_R 为锯片

本身的机械阻尼力, F_r 为声场的反作用力。正是由于这三个力使锯片得以振动,它们的具体含义见下。

强迫外力 F_F 包括:(i)锯片高速旋转时产生的空气湍流对锯片的作用力,包含锯齿拍打空气所产生的湍流,这是一个宽带的激发力;(ii)锯片及支撑机械系统的动平衡不好而引起的横向强迫力。设锯片表面上各点所受的强迫外力是均匀的,于是有(采用极坐标较为方便):

$$F_F = F_0 e^{j\omega t} \quad (3)$$

式中 F_0 为力的振幅。

第二种力 F_R 来源于板本身的机械阻尼,可写为:

$$F_R = -R_m \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4)$$

式中 R_m 为阻尼系数,与锯片材料性质有关。

第三种力 F_r 是由于锯片振动向外辐射声波,从而所受到的声场的反作用力。它可表示为:

$$F_r = -R_r \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (5)$$

式中 R_r 为辐射阻尼, R_r 愈大表示向外辐射的声波愈强。

设振动位移 η 可表示为简谐解:

$$\eta(t, r, \phi) = \eta_A(r, \phi) e^{j\omega t} \quad (6)$$

式中 $\eta_A(r, \phi)$ 为位移振幅, 是锯片表面位置的函数。于是(1)式可改写成:

$$\nabla^4 \eta_A - \left[1 - j \frac{R_m + R_r}{h\rho\omega}\right] \cdot k^4 \eta_A = \frac{k^4}{h\rho\omega^2} F_0 \quad (7)$$

一般地对于小振幅, 三种作用力数值之间存在

$$F_F \gg F_R > F_r \quad (8)$$

这样, 我们可忽略机械阻尼和辐射阻尼的影响, 仅考虑强迫外力 F_F 的作用。方程(7)可简化成:

$$\nabla^4 \eta_A = k^4 \left[\eta_A + \frac{F_0}{h\rho\omega^2} \right] \quad (9)$$

方程(9)就是本文所要讨论的振动方程。

三、方程的解

对方程(9), 可得到其解为:

$$\eta_A(r, \phi) = \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \cdot \left\{ A_1 J_m(kr) + A_2 Y_m(kr) + A_3 I_m(kr) + A_4 K_m(kr) \right\} - \frac{F_0}{h\rho\omega^2} \quad (10)$$

式中 J_m, Y_m, I_m, K_m 分别为 m 阶贝塞尔函数、诺依曼函数、双曲贝塞尔函数和双曲诺塞曼函数。 $m=0, 1, 2, 3 \dots$ 而 $m=0$ 时取 $\cos m\phi$, $m \neq 0$ 时取 $\sin m\phi$ 。 A_1, A_2, A_3, A_4 分别为待定常数。

边界条件是在半径 $r=a$ 处锯片被钳定, 而在 $r=b$ 处为自由, 所以有:

$$\left. \begin{aligned} \eta_A \Big|_{r=a} &= 0, & \frac{\partial \eta_A}{\partial r} \Big|_{r=a} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \eta_A}{\partial r^2} \Big|_{r=b} &= 0, & \frac{\partial^3 \eta_A}{\partial r^3} \Big|_{r=b} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

因此, 四个待定常数分别为:

声学技术

$$A_i = \frac{F_0}{h\rho\omega^2} \cdot \frac{D_i}{D}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} Y'_m(ka) & I'_m(ka) & K'_m(ka) \\ Y''_m(kb) & I''_m(kb) & K''_m(kb) \\ Y'''_m(kb) & I'''_m(kb) & K'''_m(kb) \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} J'_m(ka) & I'_m(ka) & K'_m(ka) \\ J''_m(kb) & I''_m(kb) & K''_m(kb) \\ J'''_m(kb) & I'''_m(kb) & K'''_m(kb) \end{vmatrix} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} J'_m(ka) & Y'_m(ka) & K'_m(ka) \\ J''_m(kb) & Y''_m(kb) & K''_m(kb) \\ J'''_m(kb) & Y'''_m(kb) & K'''_m(kb) \end{vmatrix} \\ D_4 &= \begin{vmatrix} J'_m(ka) & Y'_m(ka) & I'_m(ka) \\ J''_m(kb) & Y''_m(kb) & I''_m(kb) \\ J'''_m(kb) & Y'''_m(kb) & I'''_m(kb) \end{vmatrix} \\ D &= \begin{vmatrix} J_m(ka) & Y_m(ka) & K_m(ka) \\ J'_m(ka) & Y'_m(ka) & I'_m(ka) & K'_m(ka) \\ J''_m(kb) & Y''_m(kb) & I''_m(kb) & K''_m(kb) \\ J'''_m(kb) & Y'''_m(kb) & I'''_m(kb) & K'''_m(kb) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

最后得到振动位移的解为:

$$\eta(t, r, \phi) = \frac{F_0}{h\rho\omega^2} \cdot \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \cdot \left\{ \frac{D_1 J_m(kr) + D_2 Y_m(kr) + D_3 I_m(kr) + D_4 K_m(kr) - D}{D} \right\} \cdot e^{j\omega t} \quad (15)$$

四、锯片的固有频率

由于在方程(9)中已略去了锯片振动的机械阻尼力和辐射阻尼力, 因此在(15)中满足

$$D = 0 \quad (16)$$

时有 $\eta \rightarrow \infty$, 实际上正是(16)式决定了锯片

在自由振动时的简正方式，它表明锯片自由振动时只能以其固有频率 f_{mn} 进行振动。由(16)式解出 ka 值，并由(2)式可得出 f_{mn} 的值为：

$$f_{mn} = \frac{\mu_{mn}^2 \cdot h}{4 \pi a^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\sigma^2)}} \quad (17)$$

($m=0, 1, 2, 3\cdots; n=0, 1, 2, 3, \dots$)

式中 $\mu = ka$ ， μ_{mn} 为方程(16)的一系列根值，下标 m 代表锯片振动时的节直径个数， n 为节圆个数(不包括 $r=a$ 固定端)。

当外加强迫力频率与锯片固有频率相吻合时，锯片产生共振，振动位移极大，若无阻尼则 $\eta \rightarrow \infty$ ，所以固有频率又称共振频率。

以锯片外径 b 与内径 a 的关系 $b=3a$ 为例，代入(16)式，用电算技术解得一系列 μ_{mn} 值，如表1中所列。

表1. μ_{mn} 计算值 ($b=3a$)

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0	0.808	2.250	3.874	5.460	7.039	8.615
1	0.803	2.286	3.915	5.482	7.057	8.631
2	0.912	2.401	3.985	5.550	7.113	8.679
3	1.189	2.598	4.128	5.662	7.207	8.758
4	1.525	2.884	4.331	5.822	7.338	8.870
5	1.864	3.196	4.589	6.027	7.507	9.014
6	2.203	3.554	4.897	6.277	7.714	9.189
7	2.542	3.925	5.236	6.560	7.950	9.391
8	2.878	4.303	5.613	6.896	8.236	9.635

对2mm厚钢圆锯片的固有频率 f_{mn} 进行了计算，并与实测值[2]进行了比较，其值如表2所示。计算值与实验值符合较好，表明所建立的锯片振动模型是合适的。

表2. 厚2mm钢圆锯片固有频率 f_{mn} 值

($a=0.0505m, b=0.150m, h=0.00177m$)

$\rho=7.8 \times 10^3 kg/m^3, E=21 \times 10^{10} N/m^2, \sigma=0.28$

$f_{mn}(Hz)$	f_{20}	f_{30}	f_{40}	f_{50}
实 测 值	143	243	411	631
计 算 值	143.4	243.7	400.8	598.8
计算值-实测值 实测值	0.28%	0.29%	-2.48%	-5.10%

f_{11}	f_{21}	f_{31}	f_{41}	f_{80}	f_{51}
831	988	1208	1510	1552	1904
400.7	993.6	1163.3	1433.5	1427.6	1760.5
8.39%	0.57%	-3.70%	-5.07%	-8.02%	-8.02%

f_{61}	f_{22}	f_{32}	f_{71}	f_{42}	f_{81}
2372	2590	2853	2903	3188	3492
2176.9	2737.0	2936.9	2655.2	3232.9	3191.2
-8.23%	-5.68%	2.94%	-8.54%	1.41%	-8.61%

五、阻尼的影响

由于忽略了阻尼的影响，所以会出现振动位移 $\eta \rightarrow \infty$ 的情况，若计及阻尼，则当发生共振时振动位移只能达到极大、而不会趋于无穷大。具体的位移大小可求解方程(7)来得到，其解与(10)式类似，但这时参数 K 应由 K' 来替代：

$$K' = K^4 \left(1 - j \frac{R}{h\rho\omega}\right) \quad (18)$$

式中

$$R = R_m + R_r \quad (19)$$

阻尼除了能降低振动位移外，对共振频率也有影响。共振频率是由(16)式所决定的，由 $ka = \mu$ 得到 f_{mn} 的表示式(17)，由于这时 K 需用 K' 来替代，则近似地由 $|k'a| = \mu$ 来决定，故存在阻尼时的固有频率由下列决定：

$$\left[\frac{12\rho(1-\sigma^2)\omega_{mn}^2}{Eh^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot a \cdot \left[1 + \frac{R^2}{h^2\rho^2\omega_{mn}^2} \right]^{\frac{1}{8}} = \mu_{mn} \quad (20)$$

如果阻尼不太大, 有 $\frac{R^2}{h^2\rho^2\omega_{mn}^2} \ll 1$, 则可得到:

$$F_{mn} = f_{mn} \cdot \left[1 - \frac{R^2 a^2}{2\mu^2 h^2} \sqrt{\frac{3(1-\sigma^2)}{E}} \right] \quad (21)$$

式中 F_{mn} 为计及阻尼 R 时的振动固有频率, f_{mn} 为无阻尼时的固有频率。

一般地, 阻尼 $R = R_m + R_r$ 为频率的函数, 且频率越高, 阻尼 R 越大, 由 R 值可求得固有频率 F_{mn} 。

我们实测了两种不同锯片的固有频率, 测量数据如表3所列。表3中的 f_{mn} 为 2.8mm 厚锯片的固有频率, 而 F_{mn} 为两块 1.4mm 厚的锯片用薄阻尼层粘合在一起时的固有频率。从中看出, F_{mn} 与 f_{mn} 差别甚大, 这表明阻尼较大时应计及阻尼对固有频率的影响。

表3. 锯片阻尼对其固有频率的影响

(m, n)	(0, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(2, 1)	(3, 1)	(8, 1)
f_{mn} (Hz)	205	253	414	1629	2001	4889
F_{mn} (Hz)	82	114	197	712	882	2617

六、几点结论

通过上述分析, 可得到如下结论:

1) 圆锯片可视为一环形薄板。在内径被钳定、外径处自由的边界条件下的薄片横向振动, 锯齿的影响可被忽略。如果需要进一步提高精度, 可使用有限元法等数值方法来处理齿的影响。

2) 由圆锯片的振动方程, 可解得其振动位移和固有频率。在阻尼极小时, 分别见(15)和(17)式。各固有频率对应的振动模式(振型)可用物理方法如激光全息术拍摄下来[2], 与理论结果的一致性较好。

3) 对阻尼较大的锯片, 必须计及阻尼的影响。阻尼使振动位移大大削弱, 而使固有频率明显下降。

4) 圆锯片在高速旋转时会产生哨叫声, 为抑制哨叫声可采取一些措施: I) 减小外力振幅 F_0 。一般 F_0 为频率的函数。可设法使哨叫声频率附近的 F_0 值减小, 如干扰空气湍流并尽力避免机械性能不好引起动平衡不良而造成的影响等。II) 增加阻尼。 $R = R_m + R_r$ 一般也是频率的函数, 所以应重点增大哨叫声频率附近的阻尼系数(这里通常指 R_m 机械阻)。III) 破坏振型。有意识地对圆锯片作某些处理, 以破坏那个发生哨叫声频率的振型。

基于上述结论, 新近由我们研制的低噪声木工圆锯机, 在锯片线速度为 47.1 米/秒时, 1 米包络面处空载的平均 A 声级低达 63.5 db(A)[3]。

本文的实验工作得到苏州大学物理系姜锦虎、陈炳泉老师的大力协助, 特此深表谢意。

参考文献

- [1] 沈保罗、全晓明、章力。抑制高速旋转圆锯片哨叫声的探讨。16th International Conference on Noise Control Engineering. B7-3. September 15-17, 1987, Beijing.
- [2] 姜锦虎、沈保罗、陈炳泉。圆锯片振动及其辐射噪声的实验研究(待发表)
- [3] 沈保罗、全晓明一种新颖的低噪声木工圆锯机(待发表)。