

考虑压电效应时压电陶瓷圆形振子的耦合振动

林书玉

(陕西师范大学应用声学研究所 西安·710062)

在考虑压电效应的情况下,本文对压电陶瓷圆形振子的耦合振动进行了研究。根据压电陶瓷圆形振子的运动方程及压电方程,通过引入振子不同振动模式之间的机械耦合系数,分析了振子轴向及径向振动之间的耦合关系,得出了振子耦合振动的电导纳表达式,并导出了共振频率方程。与一维理论的结果相比,由本文理论得出的振子共振频率与实际测量值更加符合。

关键词:压电效应,耦合振动,共振频率,电导纳,机电耦合系数,机械耦合系数。

Coupled vibration of piezoelectric ceramic circular vibrators as the piezoelectric effect considered

LIN Shuyu

(Applied Acoustics Institute, Shanxi Teachers University, Xian)

The coupled vibration of piezoelectric ceramic disks was studied when the piezoelectric effect is considered. Based on the piezoelectric and motion equations, introducing the mechanical coupling coefficient the electric admittance and the frequency equation were derived, the relation between the axial and radial vibrations was analyzed. The resonant frequencies of the vibrators were computed. Compared with the measured frequencies the computed results of this paper are better those computed by one dimensional theory. Keywords: Piezoelectric effect, coupled vibration, resonant frequency, electric admittance, electro-mechanical coupling coefficient, mechanical coupling coefficient.

1 引言

对于圆形压电陶瓷振子,当振子的半径与厚度相比很大或很小时,其振动常常可看成是径向或纵向振动模式,可利用传统的一

维理论进行设计^{[1][2]}。当振子的半径与厚度比较接近时,纵向振动模式与径向振动模式之间产生较强的相互作用,形成所谓的耦合振动,此时,振子的振动模式是非常复杂

收稿日期:93-7-21;修回日期93-11-6

的, 一维理论不再适用, 必须发展新的理论。

对于压电陶瓷圆形振子的耦合振动, 许多研究者曾利用不同的方法进行研究^{[3]-[6]}, 但理论分析都很复杂, 且结果都是近似的。本文在忽略振子的剪切应力及形变的条件下, 通过引入振子的轴向振动模式与径向振动模式之间的机械耦合系数, 把振子的振动分解为径向与轴向两个分振动的耦合, 用解析法研究了圆形振子的耦合振动, 整个理论不很复杂, 但却能较好地反映压电振子实际振动的物理过程, 且所得结果与实验符合很好。

2 压电陶瓷圆形振子耦合振动的频率方程

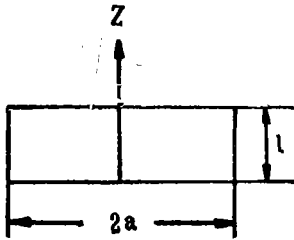


图1 压电陶瓷圆形振子

图1为压电陶瓷圆形振子的示意图, 其半径及高度分别为 a 和 l , 极化方向沿 Z 轴, 振子的上下端面涂电极, 激励电压加在上下电极上。由于外加电场的方向与极化方向平行, 因此, 振子的剪切振动可以忽略。对于振子的轴对称振动, 在极坐标下可得以下压电方程及运动方程:

$$S_r = S_{11}^E T_r + S_{12}^E T_c + S_{13}^E T_z + d_{31} E_3 \quad (1)$$

$$S_c = S_{12}^E T_r + S_{11}^E T_c + S_{13}^E T_z + d_{31} E_3 \quad (2)$$

$$S_z = S_{13}^E T_r + S_{13}^E T_c + S_{33}^E T_z + d_{33} E_3 \quad (3)$$

$$D_3 = d_{31} T_r + d_{31} T_c + d_{33} T_z + \epsilon_{33}^T E_3 \quad (4)$$

$$\rho \partial^2 \xi_r / \partial t^2 = \partial T_r / \partial r + (T_r - T_c) / r \quad (5)$$

$$\rho \partial^2 \xi_z / \partial t^2 = \partial T_z / \partial Z \quad (6)$$

式中, S_r , S_c , S_z 及 T_r , T_c , T_z 为径向、切向及轴向的正应变及应力, S_{ij}^E 为恒电场下弹性柔顺常数, d_{31} 和 d_{33} 为压电常数, E_3 和 D_3 为电场强度及电位移, ϵ_{33}^T 为恒应力时的介电常数, ξ_r 及 ξ_z 为径向及轴向的位移分量, ρ 为材料密度, 由于忽略了剪切应力、剪切应变以及电场的边界效应, 故 E_1 , E_2 , D_1 , D_2 , T_{rc} , T_{rz} , T_{cz} , S_{rc} , S_{rz} 以及 S_{cz} 都不存在, 此时, 应变与位移的关系为,

$$S_r = \partial \xi_r / \partial r, S_c = \xi_r / r, S_z = \partial \xi_z / \partial Z \quad (7)$$

由(1), (2)两式可得,

$$S_r - S_c = (S_{11}^E - S_{12}^E)(T_r - T_c) \quad (8)$$

$$S_r + S_c = (S_{11}^E + S_{12}^E)(T_r + T_c) + 2d_{31} E_3 + 2S_{13}^E T_z \quad (9)$$

令 $n = T_z / (T_r + T_c)$ 称为不同振动模式之间的机械耦合系数, 代入(9)式可得,

$$S_r + S_c = (S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n)(T_r + T_c) + 2d_{31} E_3 \quad (10)$$

由(8)式及(10)式求出 $(T_r - T_c)$ 以及 $(T_r + T_c)$ 后相加可得

$$T_r = \left(\frac{S_r - S_c}{S_{11}^E - S_{12}^E} + \frac{S_r + S_c - 2d_{31} E_3}{S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n} \right) / 2 \quad (11)$$

把 T_r 及 $(T_r - T_c)$ 的表达式代入(5)式, 利用(7)式, 考虑到电极面为等势面, 即 $\partial E_3 / \partial r = 0$, 可把(5)式化为:

$$\rho(\partial^2 \xi_r / \partial t^2) / E_r = \partial^2 \xi_r / \partial r^2 + (\partial \xi_r / \partial r) / r - \xi_r / r^2 \quad (12)$$

式中,

$$E_r = \frac{S_{11}^E + S_{13}^E n}{(S_{11}^E - S_{12}^E)(S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n)}$$

称为径向等效弹性常数, 对于简谐振动,

$$\begin{aligned} \xi_r &= \xi_{r0} \exp(j\omega t), \text{ 代入(12)式可得} \\ d^2 \xi_{r0} / dr^2 + (d\xi_{r0} / dr) / r - \xi_{r0} / r^2 + k_r^2 \xi_{r0} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $k_r = \omega / V_r$, $V_r = (E_r / \rho)^{1/2}$ 。令 $k_r a$

为自变量, (13)式可化为一阶贝塞尔方程, 其解为:

$$\xi_{r0} = A_r J_1(k_r r) + B_r Y_1(k_r r) \quad (14)$$

式中, $J_1(k_r r)$ 及 $Y_1(k_r r)$ 分别为一类及二类贝塞尔函数, 由于 $Y_1(k_r r) |_{r \rightarrow 0} \rightarrow \infty$, 故 $Y_1(k_r r)$ 不满足振子的实际情况, 因此, $B_r = 0$, 所以

$$\xi_{r0} = A_r J_1(k_r r) \quad (15)$$

当振子的圆周边界自由时, 外力为零, 即

$$T_r |_{r=a} = 0 \quad (16)$$

把(15)式代入 T_r 的表达式(11), 可得待定常数 A_r :

$$A_r = \frac{(S_{11}^E - S_{12}^E) d_{31} E_3}{k_r J_0(k_r a) (S_{11}^E + S_{13}^E n) - J_1(k_r a) (S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n) / a} \quad (17)$$

另外, 由(4)式可得, $D_3 = (d_{31} + nd_{33})(T_r + T_c) + \epsilon_{33}^T E_3$ (18)

把 $(T_r + T_c)$ 的表达式代入上式可得

$$D_3 = \frac{d_{31} + nd_{33}}{S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n} A_r k_r J_0(k_r r) + \epsilon_{33}^T E_3 - \frac{2d_{31} E_3 (d_{31} + nd_{33})}{S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n} \quad (19)$$

设流过振子的电流为 I_{31} , 振子两端的电压为 V_{31} , 则 $V_{31} = \int_0^1 E_3 dz = E_3 l$ (20)

$$I_{31} = j\omega 2\pi \int_0^a D_3 r dr \quad (21)$$

把(19)式代入(21)式, 利用 A_r 的表达式(17), 经过一系列运算, 可得

$$I_{31} = j\omega \pi a^2 \epsilon_{33}^T E_3 \left[1 - \frac{k_p'^2 + k_p'^2}{k_r a J_0(k_r a) (S_{11}^E + S_{13}^E n) - J_1(k_r a) (S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n)} \right] \quad (22)$$

式中, $k_p'^2 = 2d_{31} (d_{31} + nd_{33}) / [(S_{11}^E + S_{12}^E + 2S_{13}^E n) \epsilon_{33}^T]$, k_p' 为考虑到不同振动模式之间的耦合后振子的平面机电耦合系数, 可进一步化为:

$$k_p'^2 = k_p^2 \frac{1 - n / \lambda_{31}}{1 - 2\nu_{13} n / (1 - \nu_{12})} \quad (23)$$

式中, $k_p^2 = 2d_{31}^2 / [\epsilon_{33}^T (S_{11}^E + S_{12}^E)]$, k_p 为理想振子的平面机电耦合系数, $\lambda_{31} = -d_{31} / d_{33}$,

$\nu_{12} = -S_{12}^E / S_{11}^E$, $\nu_{13} = -S_{13}^E / S_{11}^E$ 。由此可得振子径向振动的电导纳 Y_{31} ,

$$Y_{31} = \frac{I_{31}}{V_{31}} = \frac{j\omega \pi a^2 \epsilon_{33}^T}{1} \left[1 - \frac{k_p'^2 + k_p'^2}{k_r a J_0(k_r a) (1 - \nu_{13} n) - J_1(k_r a) (1 - \nu_{12} - 2\nu_{13} n)} \right] \quad (24)$$

以上讨论的是耦合振动振子在 r 方向的等效径向振动, 下面进一步讨论振子在 Z 方向的等效轴向振动, 由(3)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_z &= S_{13}^T (\mathbf{T}_r + \mathbf{T}_c) + S_{33}^E \mathbf{T}_z + d_{33} \mathbf{E}_3 \\ &= (S_{33}^E + S_{13}^E/n) \mathbf{T}_z + d_{33} \mathbf{E}_3 \end{aligned} \quad (25)$$

另外, 由(4)式可得

$$\mathbf{E}_3 = [\mathbf{D}_3 - (d_{33} + d_{31}/n) \mathbf{T}_z] / \varepsilon_{33}^T \quad (26)$$

把(26)式代入(25)式可得 \mathbf{T}_z 的表达式:

$$\mathbf{T}_z = \mathbf{E}_z (S_z - d_{33} \mathbf{D}_3 / \varepsilon_{33}^T) \quad (27)$$

式中, $\mathbf{E}_z = [S_{33}^E + S_{13}^E/n - d_{33} (d_{33} + d_{31}$

$/n) / \varepsilon_{33}^T]^{-1}$ 称为轴向等效弹性常数, 把(27)

式代入振子在 Z 方向的运动方程(6), 利用

$\mathbf{S}_z = \partial \xi_z / \partial z$, 考虑到电荷守恒, 即 $\partial \mathbf{D}_3 / \partial z = 0$, 可得

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1}{\varepsilon_{33}^T} \left\{ \mathbf{D}_3 - (d_{33} + d_{31}/n) \mathbf{E}_z \frac{d_{33} \mathbf{D}_3}{\varepsilon_{33}^T} [\cos(k_z z) - \frac{\cos(k_z l) - 1}{\sin(k_z l)} \sin(k_z z) - 1] \right\} \quad (32)$$

令 I_{33} 为流过振子的电流, V_{33} 为振子两端的电压, 可得

$$I_{33} = j\omega \mathbf{D}_3 \pi a^2 \quad (33)$$

$$V_{33} = \int_0^l \mathbf{E}_3 dz \quad (34)$$

把(32)式代入(34)式积分后, 可得

$$\begin{aligned} V_{33} &= \mathbf{D}_3 l / \varepsilon_{33}^T [1 + (d_{33} + d_{31}/n) \mathbf{E}_z d_{33} / \varepsilon_{33}^T - (d_{33} \\ &\quad + d_{31}/n) \mathbf{E}_z d_{33} / \varepsilon_{33}^T \operatorname{tg}(k_z l/2) / (k_z l/2)] \end{aligned} \quad (35)$$

由此可得振子在 Z 轴方向振动时的电导纳:

$$\begin{aligned} Y_{33} &= \frac{I_{33}}{V_{33}} \\ &= \frac{j\omega \pi a^2 \varepsilon_{33}^T}{l} \frac{1 - k'_{33}{}^2}{1 - k'_{33}{}^2 \operatorname{tg}(k_z l/2) / (k_z l/2)} \end{aligned} \quad (36)$$

式中, $k'_{33}{}^2 = (d_{33} + d_{31}/n) / [\varepsilon_{33}^T (S_{33}^E + S_{13}^E/n)] = k_{33}{}^2 (1 - \lambda_{31}/n) / (1 - \nu_{31}/n)$,

$$\rho (\partial^2 \xi_z / \partial t^2) = \mathbf{E}_z (\partial^2 \xi_z / \partial z^2) \quad (28)$$

在简谐振动的情况下, $\xi_z = \xi_{z0} \exp(j\omega t)$, 上式可化为:

$$d^2 \xi_{z0} / dz^2 + k_z^2 \xi_{z0} = 0 \quad (29)$$

式中, $k_z = \omega / V_z$, $V_z = (\mathbf{E}_z / \rho)^{1/2}$, (29)式的解为:

$$\xi_{z0} = A_z \sin(k_z z) + B_z \cos(k_z z) \quad (30)$$

当振子的上下端面自由时, 外力为零, 即 $\mathbf{T}_z |_{z=0} = \mathbf{T}_z |_{z=l} = 0$, 利用(27)式, 可求出待定常数 A_z 及 B_z , 代入(30)式可得

$$\begin{aligned} \xi_{z0} &= \frac{d_{33} \mathbf{D}_3}{\varepsilon_{33}^T k_z} [\sin(k_z z) \\ &\quad + \frac{\cos(k_z l) - 1}{\sin(k_z l)} \cos(k_z z)] \end{aligned} \quad (31)$$

把(27)式及(31)式代入(26)式, 可得

k'_{33} 及 k_{33} 为耦合振动振子及理想振子的纵

向机电耦合系数, $k_{33}{}^2 = d_{33}{}^2 / (S_{33}^E \varepsilon_{33}^T)$,

$\nu_{31} = -S_{13}^E / S_{33}^E$ 。令 V_3 及 I_3 为振子电极间的总电压及电流, 很显然:

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_{31} = \mathbf{V}_{33}, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_{31} + \mathbf{I}_{33} \quad (37)$$

由此可得振子耦合振动的总导纳为:

$$Y = Y_{31} + Y_{33} = \frac{j\omega\pi a^2 \epsilon_{33}^T}{1} \left[\frac{1 - k'_{33}{}^2}{1 - k'_{33}{}^2 \operatorname{tg}(k_z l/2)/(k_z l/2)} + 1 - k'_{33}{}^2 \right. \\ \left. + k'_{33}{}^2 \frac{(1 + \nu_{12})J_1(k_r a)}{k_r a J_0(k_r a)(1 - \nu_{13}n) - J_1(k_r a)(1 - \nu_{12} - 2\nu_{13}n)} \right] \quad (38)$$

当 $Y = \infty$ 时, 可得振子的共振频率方程:

$$1 - k'_{33}{}^2 \operatorname{tg}(k_z l/2)/(k_z l/2) \quad (39)$$

$$k_r a J_0(k_r a)(1 - \nu_{13}n) - J_1(k_r a)(1 - \nu_{12} - 2\nu_{13}n) = 0 \quad (40)$$

在(39)式及(40)式中, 包含 ω 及 n 两个未知数, 由于上述两式为超越方程, 因此其解析解很难求出, 必须利用数值法。在求解方程组(39)和(40)的过程中, 我们发现当振子的材料及几何尺寸给定后, 对应一定的振动模式(基频时, 取方程(39)和(40)的第一个根), 方程组具有两组解, 分别记为 (n_1, f_1) 及 (n_2, f_2) , 结合振子的实际情况, 可以看出, 这两组解分别对应振子两种不同的振动模式, 即轴向振动模式及径向振动模式, 频率 f_1 及 f_2 就是振子的径向及厚度振动的共振频率, 由计算结果可以看出, 由(39)式和(40)式得出的振子的径向和轴向共振频率与按照一维理论得出的理想振子的径向及厚度振动频率是不一致的, 这是很显然的, 因为本理论考虑了振子不同振动模式之间的相互作用, 而一维理论则忽略了这种相互作用。从这里我们也可以得出一条结论, 即对于任何实际振子, 其振动都是多模式的, 都存在两种或两种以上的共振频率, 然而在一定的条件下, 例如圆形振子的半径远大于其厚度, 振子的径向与厚度共振频率相差较大, 振子的径向振动模式与厚度振动模式之间的耦合比较弱, 此

时, 振子的振动可以近似看成是纯粹的径向振动或厚度振动。在有些情况下, 振子的尺寸不满足一维理论的要求, 必须利用耦合振动理论进行计算。方程(39)和(40)的数值法求根步骤如下: (1) 给定某一个 n 值, 由(39)式和(40)式可求出两个频率 f_1' 和 f_2' ; (2) 改变 n 的值, 寻找使 $f_1' = f_2'$ 的 n 值, 此时, 与该 n 值对应的频率便是振子的径向或轴向的共振频率。利用上述步骤, 便可求出与振子实际振动模式对应的两组根, 即 (n_1, f_1) 及 (n_2, f_2) 。

3 数值计算及实验测试

为了验证本文理论, 我们加工了一些圆形压电陶瓷振子, 其材料为PZT-4, 具体指标采用标准的参数值^[1], 振子的几何尺寸见附表。利用扫频仪测量了振子的径向及厚度共振频率, 测量结果见附表, 表中 f_r, f_z 为由方程(39)和(40)利用数值法计算出的振子共振频率, f_{r_m}, f_{z_m} 为实测值。 f_{1r}, f_{1z} 为按照一维理论的计算结果。另外, 为了简化计算, 本文仅研究了耦合振动的基频情况。至于频率测量的误差来源, 我们认为主要有以下两点: (1) 材料参数的取值与实际值有差异。(2) 本文理论中, 假设机械耦合系数 n 是一个常数, 仅与振子的材料、振动模式及几何尺寸有关, 实际上, 对于振子中的各个位置, n 值可能会有差异。

附表 振子共振频率的计算及测试值

l(mm)	a(mm)	f_r (Hz)	f_z (Hz)	f_{1r} (Hz)	f_{1z} (Hz)	f_{r_m} (Hz)	f_{z_m} (Hz)
2	30	38213	1030711	38243	1005581	37147	1018431
6	30	38039	346258	38243	335194	36946	341619
8	30	37897	260510	38243	251395	36625	256331

4 结论

(1) 本文研究了有限尺寸压电陶瓷圆形振子的耦合振动, 得出了振子的共振频率方程, 由此可以得出振子的径向共振频率, 还可求出振子的轴向振动共振频率。

(2) 本文在研究振子耦合振动的共振频率时, 计算较简单, 物理意义明确。

(3) 本文得出的结果与频率的实际测试值基本符合。

(4) 任何实际振子的振动都是多模式的, 都存在多个共振频率, 振子的单纯振动模式仅是忽略振子的多模式振动耦合的一种近似。

(5) 在本文的理论分析中, 当振子的材料、振动模式及几何尺寸给定后, 假设机械耦合系数 n 是一个常数。

1 张沛霖, 张仲渊. 压电测量. 北京: 国防工业出版社, 1983; 178~205.

2 栾桂冬, 张金铎, 王仁乾. 压电换能器和换能器阵. 上册, 北京: 北京大学出版社, 1990; 137~169

3 Seiji Ikegami, et al. Frequency spectra of resonant vibration in thick plates of PhTiO_3 piezoelectric ceramics. J. Acoust. Soc. Am., 1974; 55:339

4 Shaw, E.A.G. On the resonant vibration of thick barium-titanate disks. J. Acoust. Soc. Am., 1956; 28:38~50.

5 N. Guo, P. Cawley. Measurement and prediction of the frequency spectrum of piezoelectric disks by modal analysis. J. Acoust. Soc. Am., 1992; 92:3379.

6 Y. Kagawa, T. Yamabuchi. Finite element approach for a piezoelectric circular rod. IEEE Trans. Sonics Ultrason, SU-1976; 23(7):379~385.



简评《自适应有源噪声控制》

由陈克安 马远良所著《自适应有源噪声控制》已由西北工业大学出版社于1993年7月出版了。

自30年代提出有源消声的概念以来, 随着电子技术的飞速发展, 其中特别是计算机技术的突飞猛进, 这一学科已经跨入了蓬勃发展的时代, 在国际上已经出现了以从事有源消声产品开发为主的公司。有关的学术论文大量发表。该书正是在这样的背景下应运而生的。作者多年从事这方面的理论和实验研究, 积累了丰富的经验和成果, 为此书的内容提供了第一手的资料。

该书以讲述自适应有源噪声控制的基本原理及工程应用中需要解决的一系列问题为主, 理论分析简

明扼要, 算法的建立兼顾系统性能与实时处理的要求。全书共分七章: 前三章讲述基本原理, 随后的第四、五、六三章讲述自适应算法和系统实现方法并讨论了控制器与声场的相互作用, 最后第七章给出了一些应用实例。全书体例清新, 行文流畅, 逻辑严密, 是一本集学术性和实用性为一体, 反映有源噪声控制最新进展的专著, 是从事噪声控制, 信号处理及自动控制等工作的专业人员、高等院校教师和研究生的一本良好的参考书。但为了更好地发挥参考作用, 希望再版时能增编一向为我国出版物忽视的主题词索引。

冯绍松