

扭转振动与纵振动的比较

贺西平 程存弟

(陕西师范大学应用声学研究所 西安·710062)

本文首先推导出了扭转振动的声传输线方程,并从应力和力矩方程,变截面杆波动方程、声传输线方程、指数型和阶梯型半波长谐振杆等方面,对扭振型和纵振型进行了比较。发现:描述两者的基本概念、方程等具有可类比性,但具体到设计杆件时,两者并不具有类比性。

用于功率超声的振动系统,现在虽然大多使用的是纵向振动型的,但从功率超声的发展趋势来看,在超声焊接、超声疲劳试验、振动切削、模式转换型超声马达以及其他超声加工及处理的领域内,愈来愈希望得到的是扭转振动型的^[1]。对纵振型系统的研究日趋完善,但扭振型系统研究得还较少,很少见到这方面的研究报道。不过,在实际研究中,我们发现,描述扭转振动的某些基本概念、方程与纵振动具有可类比性,但具体到设计扭振型杆件时,却与纵振动并不完全具有可类比性。这点在实际工作中需特别注意。究其原因,可能是因为函数关系的不同而引起的。本文推导出了扭转振动的声传输线方程,并从应力方程和力矩方程、描述变截面杆的波动方程、声传输线方程、指数型和阶梯型半波长谐振杆等方面,对纵振型和扭振型进行了分析和比较。

1. 变截面杆的纵振动、扭振动波动方程

在简谐振动情况下,变截面杆纵振动的波动方程可以写为:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial s(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + k^2 \xi = 0 \quad (1)$$

其中, $k = \omega/c$, $c = (E/\rho)^{1/2}$

变截面杆扭转振动的波动方程可以写为:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{I_p(x)} \cdot \frac{\partial I_p(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_s^2 \varphi = 0 \quad (2)$$

式中, $k_s = \omega/c_s$, $c_s = (G/\rho)^{1/2}$

比较(1)、(2)两式,有如下的类比关系:

ξ (纵振动位移) \longleftrightarrow φ (扭转角)

s (杆的横截面积) \longleftrightarrow I_p (截面绕x轴的极惯性矩)。

k (纵振波波数) \longleftrightarrow k_s (扭振波波数)

E (杨氏模量) \longleftrightarrow G (切变模量)

事实上,传播纵波需要张应力和压应力,扭转波是一种横波,传播横波需要切应力。波的传播实际上是振动状态的传播。

张应力和压应力的方程可表为:

$$F = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3)$$

切应力的方程可表为:

$$M = GI_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4)$$

因此,将(3)式和(4)式相比较,也可

收稿日期: 93-7-15; 修回日期: 93-9-10

得到上面的类比关系。

2 两类力阻抗具有可类比性

纵振动的力阻抗定义为 $Z = F/V$, 其绝对值等于产生单位振速幅值所需力的大小^[2]; 若某种材料的密度为 ρ , 声速为 c , 截面积为 s , 则其特性力阻抗为 $Z = \rho cs$ 。

同样, 我们可以定义扭转振动的力阻抗为: $Z = M/\dot{\theta}$, 其绝对值等于产生单位角速度所需力矩的大小。若某种材料的密度为 ρ , 波速为 c_t , 截面的极惯性矩为 I_t , 则其扭转特性力阻抗为 $Z_t = \rho c_t I_t$ 。

3 两种振动的声传输线方程具有可类比性

我们说, 纵振动有与其相应的声传输线方程, 扭转振动是否亦有与之相应的声传输线方程呢? 回答是肯定的。

一长为 l , 截面的极惯性矩为 I_t , 特性力阻抗为 $Z_{s1} = \rho c_t I_t$ 的棒, 如图 1 所示。在其 $x=l$ 端加一负载, 一扭转波沿 x 轴正方向传播, 在 $x=l$ 端将发生反射, 从而在 $x=0$ 端到 $x=l$ 端棒中存在有正反两方向传播的扭转波, 即入射波和反射波。

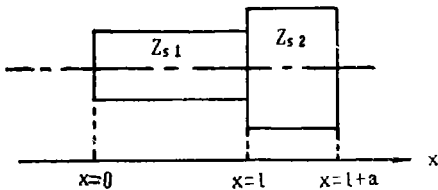


图 1 在长为 l 的棒端加另一负载

扭转入射波(以 i 表示)和反射波(以 r 表示)可分别表示为:

$$M_i = A e^{j(\omega t - k_{s1} x)} \quad (5)$$

$$M_r = B e^{j(\omega t + k_{s1} x)} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{质点的速度为: } \dot{\theta}_i &= M_i / Z_{s1}, \\ \dot{\theta}_r &= -M_r / Z_{s1} \end{aligned}$$

棒中任意一点的力阻抗为:

$$Z_{s,x} = \frac{M_i + M_r}{\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_r} = Z_{s1} \frac{M_i + M_r}{M_i - M_r}$$

将(5), (6)两式代入, 又可得:

$$Z_{s,x} = Z_{s1} \frac{A e^{-jk_{s1} x} + B e^{jk_{s1} x}}{A e^{-jk_{s1} x} - B e^{jk_{s1} x}} \quad (7)$$

若 $x=0$ 处有一角频率为 ω 的谐和力矩作用于棒上, 则棒对此力矩产生的阻抗为:

$$Z_{s,0} = Z_{s1} \frac{A+B}{A-B} \quad (8)$$

在 $x=l$ 处, 力阻抗可表为:

$$Z_{s,l} = \frac{A e^{-jk_{s1} l} + B e^{jk_{s1} l}}{A e^{-jk_{s1} l} - B e^{jk_{s1} l}} \quad (9)$$

由(8), (9)两式, 消去 A, B 得到:

$$Z_{s,0} = Z_{s1} \frac{Z_{s,l} + j Z_{s1} \operatorname{tg} k_{s1} l}{Z_{s,l} + j Z_{s1} \operatorname{tg} k_{s1} l} \quad (10)$$

方程(10)即是扭转振动的声传输线方程。

为了类比, 我们广义地表示这两种振动的声传输线方程如下:

纵振动: 如图 2 (a) 所示, Z_1 是长度为 l 的棒右端的负载阻抗。

$$Z_1 = Z_0 \frac{Z_1 + j Z_0 \operatorname{tg} k_0 l}{Z_0 + j Z_1 \operatorname{tg} k_0 l} \quad (11)$$

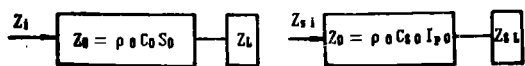
式中, $k_0 = \omega/c$, 为杆中声波波数。

扭转振动: 如图 2 (b) 所示, Z_{s1} 是长度为 l 的棒右端的负载阻抗。由以上推导, 可得

$$Z_{s,1} = Z_{s,0} \frac{Z_{s,1} + j Z_{s,0} \operatorname{tg} k_{s0} l}{Z_{s,0} + j Z_{s,1} \operatorname{tg} k_{s0} l} \quad (12)$$

式中, $k_{s0} = \omega/c_s$, 为杆中扭振波之波数。

(11)、(12)两式的形式完全一样。声传输线方程为等效半波长振子的设计提供了较简捷而又明了的方法。



(a) 纵振声传输线方程的阻抗变换 (b) 扭振声传输线方程的阻抗变换

图 2

4 两种振型的指数型和阶梯型半波长谐振变幅杆的不可类比性^{[3]、[4]}

纵、扭谐振型变幅杆都有指数型和阶梯型，因而我们对两者的某些设计参数分别比较如下：

(1) 指数型杆：如图 3 所示。

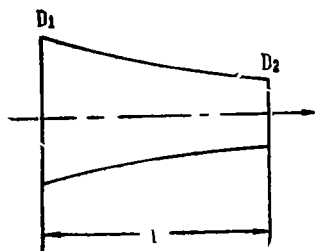


图 3 两种振型的指数型半波长杆的比较

纵振型：

$$\text{形状参数： } D = D_1 e^{-\beta x}, \quad \beta = \frac{\ln N}{L}$$

$$\text{频率方程： } k' L = \pi, \quad k' = (k^2 - \beta^2)^{1/2}$$

$$\text{半波谐振长度： } L = \frac{\lambda}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln N}{\pi}\right)^2}$$

$$\text{振幅放大系数： } M = N$$

$$\text{节点位置： } x_0 = \frac{l}{\pi} \text{ctg}^{-1}\left(\frac{\ln N}{\pi}\right)$$

$$\text{限制条件： } L > \frac{\lambda}{2\pi} \ln N$$

扭振型：

$$\text{形状参数： } D = D_1 e^{-\beta x}, \quad \beta = \frac{\ln N}{L}$$

$$\text{频率方程： } k_s' l = \pi, \quad k_s' = [k_s^2 - (2\beta)^2]^{1/2}$$

$$\text{半波谐振长度： } l = \frac{\lambda}{2} \left(1 + 4\left(\frac{\ln N}{\pi}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\text{角位移放大系数： } M_\theta = N^2, \quad N = D_1/D_2$$

$$\text{节点位置： } x_0 = \frac{l}{\pi} \text{tg}^{-1}\left(\frac{\pi}{2 \ln N}\right)$$

$$\text{限制条件： } L > \frac{\lambda}{\pi} \ln N$$

(2) 阶梯型杆：如图 4 所示：

纵振型：

$$\text{形状参数： } \begin{cases} D = D_1 & 0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4} \\ D = D_2 & \frac{\lambda}{4} < x \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\text{频率方程： } kl = \pi$$

$$\text{半波长谐振长度： } l = \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{振幅放大倍数： } M = N^2$$

$$\text{节点位置： } x_0 = \lambda/4$$

限制条件： 无

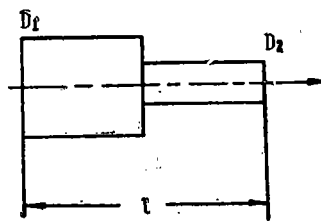


图 4 两种振型的阶梯型半波长杆的比较

扭振型：

$$\text{形状参数： } \begin{cases} D = D_1 & 0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4} \\ D = D_2 & \frac{\lambda}{4} < x \leq \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\text{频率方程： } k_s l = \pi$$

(下转 26 页)

在同样的条件下。我们也观察了牛奶变质后哪些声参量会发生较大的变化。实验发现,牛奶变质后,对超声波衰减增大,其衰减较正常牛奶增加2.0dB以上,而且其谱峰向低频方向漂移可达0.016MHz,比牛奶浓度变化所引起的频漂要显著得多。这主要是由于牛奶变质后,牛奶物质结构发生变化,出现了大的乳状微粒。这些大微粒的存在不仅使其对超声波的衰减增大,主要会使其对超声波的散射增大。而声散射随频率的变化更显著^[7],这是产生频漂的主要因素,因此,变化后的牛奶,其频漂较为显著。

5 结论

超声谱差法测量衰减的方法用于测牛奶浓度的变化是一种非常有效的方法,它可以分辨出牛奶浓度0.15%的变化。因此,用于牛奶掺水鉴别是一种相当有效的方法。当然,用于鉴别牛奶是否变质也是一种可行的方法。这种方法,不但对牛奶适用,对于其它

乳液状食品的鉴别也是具有实用价值的。

参考文献

1. 冯若等. 用脉冲插入取代法研究物质的超声性质. 声学进展, 1983; 2(4):28~31
2. 杨瑞科等. 层软组织超声衰减特性的实验研究. 声学技术, 1992; 11(4):32~34
3. C.Javanud. Applications of ultrasound to food systems. Ultrasonics. 1988; (26):117~123
4. Bhatti. S. S, et al. Ultrasonic testing of milk. Acustica. 1986; (62):96~99
5. D.J.McClelements, et al. Ultrasonic characterization of a food emulsion. Ultrasonics 1990; (28):266~272
6. D.J.McClelements, et al. Ultrasonic analysis of edible fats and oils. Ultrasonics. 1992; (30):383~388
7. J.C.bamber, et al. Acoustic properties of normal and cancerous human liver-I. dependence on pathological condition. Ultrasonidin Med. & Biol. 1981; (7):121~133

(上接23页)

半波长谐振长度: $l = \frac{\lambda}{2}$

角位移放大倍数: $M_{\theta} = N^4$, $N = D_1/D_2$

节点位置: $x_0 = \lambda/4$

限制条件: 无

由以上比较知,对纵振型和扭振型变幅杆来说,虽然对应各有相同形状参数的指数型和阶梯型杆,但在两种振型中,对指数型杆来说,除了频率方程的形式对应相似外,其他参数都不尽相同;对于阶梯型杆来说,

除两者的放大倍数不同外,其他参数均类同。故在具体的换能器设计计算时必须注意。

参考文献

- 1 根本佐久良雄·森荣司. 日本音响学会誌, 1972; 28:117
- 2 何祚镛等. 声学理论基础. 国防工业出版社, 1981:15.
- 3 阮世隄. 应用声学, 1982; 1(4):23~28.
- 4 阮世隄. 应用声学, 1986; 5(2):22~28.