计及压电效应时矩形振子*的三维振动研究

林书玉

(陕西师范大学应用声学研究所　西安·710062)

在计及压电效应的情况下，本文利用解析方法对有限尺寸压电陶瓷矩形振子的三维振动进行了研究，推出了振子耦合振动的共振频率方程，并对振子的振动模式进行了分析。理论研究表明，利用本文中的解析法研究振子的耦合振动，计算简单，物理意义明显。与传统的一维理论分析方法及数值方法相比，由于本研究考虑了振子的压电效应以及不同振动模式之间的相互耦合，因此，振子的理论计算频率与测量值更加符合，可以预见，本研究内容在共振器的设计、陶瓷材料的参数测量以及复杂振子的振动模式分析中将获得应用。

关键词：　压电效应，振动模式，共振频率，耦合振动

Study on three dimensional vibration of piezoelectric ceramic rectangular resonators

LIN Shuyu

(Institute of Applied Acoustics, Shanxi Teachers University, Xian · 710062)

An analytical method was presented to study the three dimensional vibration of piezoelectric ceramic rectangular resonators when piezoelectric effect was taken into account. The frequency equation was derived and the vibrational modes of the resonator were analyzed. It is shown that the method is simple and time-saving in the calculation and analysis of the coupled vibration of the resonators. Compared with traditional one dimensional theory and numerical methods, since the piezoelectric effect and the coupling among the longitudinal and transverse vibrations are taken into account in the analysis, the computed resonant frequencies are in good agreement with the measured results. It can be seen that the method and the conclusion will be useful in the design of resonators with large dimension, the measurement of material parameters and the analysis of vibrational mode of complex resonators.

Key words: piezoelectric effect, vibrational mode, resonant frequency, coupled vibration

1. 引　言

在现有的有关压电陶瓷振子的设计理论中，为了简化分析，基本上都假定振子工作于单一模式，忽略了振子不同方向振动模式之间的相互作用，这就要求振子的几何尺寸满足一定的条件，例如薄板或细长条等，以满足一定的性能要求。但是，实际的压电陶瓷振子的几何尺寸总是有限的，其各个方向振动模式之间总是存在不同程度的相互耦合，如果

* 收稿日期：94-9-6；修回日期 95-3-6

几何尺寸设计不当，就会影响振子的性能，例如，灵敏度下降，发射效率降低等。为了提高实际压电陶瓷振子的性能，必须对振子的振动模式进行系统的研究，以便给出明确的设计准则。本文从振子的压电方程出发，在考虑压电效应的情况下，对矩形压电振子的三维振动进行了研究，所得结论对于振子的模式分析及实际设计具有一定的指导意义。

2. 压电陶瓷矩形振子的频率方程

令振子沿 X，Y 及 Z 轴的几何尺寸分别为 l_1，l_2 及 l_3，振子的极化方向沿着 Z 轴，即 l_3 方向，电极面为垂直于 Z 轴的上下两面。由于电场方向平行于极化方向，因此，振子的剪切形变及扭转可以忽略，振子的振动主要是沿其各轴向的伸缩振动，由此可得以下形式的压电方程：

$$S_1=S_{11}{}^ET_1+S_{12}{}^ET_2+S_{13}{}^ET_3+d_{31}E_3 \quad (1)$$

$$S_2=S_{12}{}^ET_1+S_{11}{}^ET_2+S_{13}{}^ET_3+d_{31}E_3 \quad (2)$$

$$S_3=S_{13}{}^ET_1+S_{13}{}^ET_2+S_{33}{}^ET_3+d_{33}E_3 \quad (3)$$

$$D_3=d_{31}T_1+d_{31}T_2+d_{33}T_3+\varepsilon_{33}{}^TE_3 \quad (4)$$

式中 S_1，S_2，S_3 及 T_1，T_2，T_3 分别为振子的轴向应变及应力，$S_{ij}{}^E$ 为短路弹性柔顺常数，d_{31}，d_{33}为压电常数，E_3、D_3 分别为沿 Z 轴的电场强度及电位移，$\varepsilon_{33}{}^T$ 为介电常数，令 $n_1=T_1/T_2$，$n_2=T_2/T_3$，$n_3=T_3/T_1$，n_1，n_2 及 n_3 称为振动耦合系数，代入(1)～(4)式可得，

$$S_1=(S_{11}{}^E+S_{12}{}^E/n_1+S_{13}{}^En_3)T_1+d_{31}E_3 \quad (5)$$

$$S_2=(S_{11}{}^E+S_{12}{}^E/n_1+S_{13}{}^En_2)T_2+d_{31}E_3 \quad (6)$$

$$S_3=(S_{33}{}^E+S_{13}{}^E/n_2+S_{13}{}^En_3)T_3+d_{33}E_3 \quad (7)$$

$$D_3=(d_{33}+d_{31}n_2+d_{31}/n_3)T_3+\varepsilon_{33}{}^TE_3 \quad (8)$$

根据表观弹性法原理，对于本文研究的矩形振子的耦合振动，可化为沿 X，Y 及 Z 轴的 3 个等效的细长棒一维振动，但是它们并不是相互独立的，而是通过振动耦合系数相互耦合，从而构成了矩形振子的三维耦合振动。

2.1 矩形振子沿 X 方向的一维等效横振动分析

由(5)式可得：

$$T_1=(S_1-d_{31}E_3)/S_x \quad (9)$$

式中 $S_x=S_{11}^E+S_{12}^E/n_1+S_{13}^En_3$ 称为 X 方向的等效弹性柔顺常数。类似于一维理想振子的推导过程，可得矩形振子等效横振动的导纳为，

$$Y_1=\frac{j\omega l_1l_2\varepsilon_{33}{}^T}{l_3}\Big[1-\frac{d_{31}(d_{31}+d_{31}/n_1+d_{33}n_3)}{\varepsilon_{33}{}^TS_x}+\frac{d_{31}(d_{31}+d_{31}/n_1+d_{33}n_3)}{\varepsilon_{33}{}^TS_x}\frac{\mathrm{tg}\frac{k_xl_1}{2}}{\frac{k_xl_1}{2}}\Big] \quad (10)$$

利用细长条横向长度振动模式一维理论的导纳表达式，可得考虑耦合后振子的横向机电耦合系数 K'_{31}为，

$$K'^2_{31}=\frac{d_{31}(d_{31}+d_{31}/n_1+d_{33}n_3)}{\varepsilon_{33}{}^TS_x} \quad (11)$$

令$\lambda_{31}=-d_{31}/d_{33}$， $\nu_{12}=-S_{12}{}^E/S_{11}{}^E$，

$\nu_{13}=-S_{13}{}^E/S_{11}{}^E$， $\nu_{31}=-S_{13}{}^E/S_{33}{}^E$

上式可化为，

$$K'^2_{31}=K_{31}{}^2\cdot\frac{1+1/n_1-n_3/\lambda_{31}}{1-\nu_{12}/n_1-\nu_{13}n_3} \quad (12)$$

式中 $K_{31}{}^2=d_{31}{}^2/\varepsilon_{33}{}^TS_{11}{}^E$，$K_{31}$为不考虑耦合时，压电陶瓷细长条的横向机电耦合系数。由(10)式可得，振子在 X 方向的共振及反共振频率方程，

$$\mathrm{tg}\frac{K_xl_1}{2}=\infty \quad (13)$$

$$1-K'^2_{31}+K'^2_{31}\frac{\mathrm{tg}\frac{K_xl_1}{2}}{\frac{K_xl_1}{2}}=0 \quad (14)$$

2.2 矩形振子沿 Y 方向的一维等效横振动分析

根据类似的分析，可得相应各参数的具体表达式为，

$$Y_2=\frac{j\omega l_1l_2\varepsilon_{33}{}^T}{l_3}\Big[1-\frac{d_{31}+(d_{31}n_1+d_{33}/n_2)}{\varepsilon_{33}{}^TS_y}+\frac{d_{31}(d_{31}+d_{31}n_1+d_{33}/n_2)}{\varepsilon_{33}{}^TS_y}\frac{\mathrm{tg}\frac{k_yl_2}{2}}{\frac{k_yl_2}{2}}\Big] \quad (15)$$

$$K'^2_{32}=K_{32}{}^2\,\frac{1+n_1-1/\lambda_{31}n_2}{1-\nu_{12}n_1-\nu_{13}/n_2} \quad (16)$$

式中 $K_{32}{}^2=K_{31}{}^2=d_{31}{}^2/(\varepsilon_{33}{}^TS_{11}{}^E)$，$K_y=\omega/V_y$，$V_y=(1/\rho S_y)^{1/2}$，$S_y=S_{11}{}^E+S_{12}{}^En_1+S_{13}{}^E/$

n，S_y 称为 Y 方向的等效弹性柔顺常数，K_{32}' 为考虑到振子的相互耦合后，振子沿 Y 方向的横向机电耦合系数，此时，振子在 Y 方向的共振及反共振频率方程分别为，

$$\mathrm{tg}\,\frac{k_y l_2}{2}=\infty \tag{17}$$

$$1-K_{32}'^2+K_{32}'^2\frac{\mathrm{tg}\,\frac{K_y l_2}{2}}{\frac{K_y l_2}{2}}=0 \tag{18}$$

2.3 矩形振子沿 Z 方向的一维等效纵振动分析

根据压电陶瓷细长棒一维纵振动的推导过程可得：

$$T_3=(S_3-\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}{}^T}D_3)/S_z \tag{19}$$

式中 $S_z=S_{33}{}^E+S_{13}{}^E n_2+S_{13}{}^E/n_3-\frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}{}^T}(d_{33}+d_{31}n_2+d_{31}/n_3)$，$S_z$ 称为振子 Z 方向的等效弹性柔顺常数。振子在 Z 方向的电阻抗为：

$$Z_3=\frac{l_3}{\mathrm{j}\omega l_1 l_2\varepsilon_{33}{}^T}\left[1+\frac{d_{33}(d_{33}+d_{31}n_2+d_{31}/n_3)}{\varepsilon_{33}{}^T S_z}-\frac{d_{33}(d_{33}+d_{31}n_2+d_{31}/n_3)}{\varepsilon_{33}{}^T S_z}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{k_z l_3}{2}}{\frac{k_z l_3}{2}}\right] \tag{20}$$

由此可得考虑到振子不同方向振动模式的耦合后，振子的纵向机电耦合系数为：

$$K_{33}'^2=K_{33}{}^2\,\frac{1-\lambda_{31}/n_3-\lambda_{31}n_2}{1-\nu_{31}/n_3-\nu_{31}n_2} \tag{21}$$

式中 $K_{33}{}^2=d_{33}{}^2/\varepsilon_{33}{}^T S_{33}{}^E$，$K_{33}$为理想的压电陶瓷长棒的纵向机电耦合系数。由(20)式可得振子在 Z 方向的共振及反共振频率方程：

$$1-K_{33}'^2\frac{\mathrm{tg}\,\frac{K_z l_3}{2}}{\frac{K_z l_3}{2}}=0 \tag{22}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{K_z l_3}{2}=\infty \tag{23}$$

2.4 压电陶瓷矩形振子的三维振动频率方程

由上述分析可以看出，振子在 X 及 Y 方向的共振频率方程与各自的机电耦合系数 K_{31}' 或 K_{32}' 无关，而振子在 Z 方向的共振频率方程则与其机电耦合系数 K_{33}' 有关，这正是振子非刚度模式（又称为横效应振动模式）与刚度模式（纵效应振动模式）的区别之处。根据上述分析得出的结果，可得振子耦合振动的共振频率方程组

$$\mathrm{tg}\,\frac{K_x l_1}{2}=\infty \tag{24}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{K_y l_2}{2}=\infty \tag{25}$$

$$1-K_{33}'^2\frac{\mathrm{tg}\,\frac{K_z l_3}{2}}{\frac{K_z l_3}{2}}=0 \tag{26}$$

$$n_1\cdot n_2\cdot n_3=1 \tag{27}$$

令 $\Delta=(f_p-f)/f_p$，f 及 f_p 分别为振子在 Z 方向的共振及反共振频率，可得以下各式，

$$\frac{K_z l_3}{2}=\frac{\pi}{2}(1-\Delta) \tag{28}$$

$$K_{33}'^2=\frac{\pi}{2}(1-\Delta)\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}\Delta) \tag{29}$$

利用振子的共振频率方程(24)，(25)及(28)3式，对于基频振动，$K_x l_1=\pi$，$K_y l_2=\pi$，根据 K_x，K_y 及 K_z 的表示式，可得，

$$C(1)\Omega^3+C(2)\Omega^2+C(3)\Omega+C(4)=0 \tag{30}$$

其中，$C(1)=\frac{(1-\Delta)^2C_{03}{}^2C_{01}{}^4}{l_1{}^2l_2{}^2l_3{}^2}$；$C(2)=-[\frac{(1-K_{33}{}^2)C_{01}{}^4}{l_1{}^2l_2{}^2}+(1-\Delta)^2C_{03}{}^2C_{01}{}^2(\frac{1}{l_1{}^2l_3{}^2}+\frac{1}{l_2{}^2l_3{}^2})]$；$C(3)=[1-K_{33}{}^2+\nu_{13}(K_{33}{}^2\lambda_{31}-\nu_{31})]\cdot C_{01}{}^2(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2})+\frac{(1-\nu_{12}{}^2)(1-\Delta)^2C_{03}{}^2}{l_3{}^2}$；$C(4)=-(1-K_{33}{}^2)(1-\nu_{12}{}^2)-2\nu_{13}(1+\nu_{12})\cdot(K_{33}{}^2\lambda_{31}-\nu_{31})$；$C_{01}{}^2=1/S_{11}{}^E\rho$；$C_{03}{}^2=-1/S_{33}{}^E\rho$；$\Omega=\pi^2/\omega^2$。(30)式就是决定振子耦合振动的共振频率方程。由此可得 3 个解，分别表示振子在 X，Y 及 Z 方向的横向及纵向共振频率，由于上述分析考虑了振子不同方向上振动模式的耦合，因此，得出的 3 个共振频率与按照一维理论得出的同尺寸的振子的共振频率不同。

4. 实验及结论

为了研究本文所得结论的适用范围，我们加工了一些矩形压电陶瓷振子，利用文中

的频率方程计算了振子的共振基频，并对其进行了实验测量。振子的材料为 PZT－4，其材料参数见文献[1]的附录 5，振子共振频率的计算及测量结果见附表，其中 f_x，f_y，f_z，及 f_{mx}，f_{my}，f_{mz}分别为计算及测量值，f_{xi}，f_{yi}，f_{zi}为忽略压电效应后振子共振频率的计算值，很显然，考虑压电效应得出的结果与测量值更加符合。

附表：压电陶瓷振子共振基频的计算及测量值

l_1(mm)	l_2(mm)	l_3(mm)	f_x(Hz)	f_y(Hz)	f_z(Hz)	f_{xi}(Hz)	f_{yi}(Hz)	f_{zi}(Hz)	f_{mx}(Hz)	f_{my}(Hz)	f_{mz}(Hz)
50.0	14.0	2.5	32767	124493	924518	32768	124612	787010	34191	127038	1012264
14.1	9.8	6.0	110893	163308	438323	111010	164082	371338	113223	166925	402152
20.0	13.9	6.0	78678	122823	408703	78718	123443	346330	80708	121908	397323
24.8	14.1	6.0	64561	119933	405109	64592	120476	343469	65364	118390	393068
29.9	13.9	6.0	54095	12782	403928	54117	121306	342560	55538	126325	396362

总结上述分析，可得以下结论：

（1） 对于压电陶瓷矩形振子，存在 3 个共振基频，其中 1 个是纵向共振基频，另外两个是横向振动基频；

（2） 与数值方法相比，本文方法计算简单，物理意义明显；

（3） 由于文中理论考虑了振动的压电效应，故计算频率与测量值符合很好；

（4） 压电陶瓷振子的理想振动模式，例如细长棒的纵向振动以及薄板的厚度振动都可由本文理论直接得到；

（5） 由于本文理论对振子几何尺寸不加任何限制，因此在测量材料参数时，对样品的尺寸无附加要求，从而避免了传统的压电材料参数测量中的尺寸限制。

参考文献

1 张沛霖，张仲渊．压电测量．北京：国防工业出版社，1983.

2 李　远，秦自楷，周志刚．压电与铁电材料的测量．北京：科学出版社，1984.

3 王矜奉，姜祖桐，石瑞大．压电振动．北京：科学出版社，1989.

会议消息

中国声学会物理声学学术会议将在无锡召开

中国声学会物理声学分会决定在 1995 年 11 月 18 日于江苏省无锡市召开学术会议（本刊 1994 年第 4 期报导于湖南省长沙市现改为江苏无锡市）欢迎广大同行参加。有关详情可与南京大学声学研究所缪国庆同志联系（地址：江苏南京大学声学研究所　邮编：210093）

本刊讯