

# 半无限域中结构体辐射声场计算

汪鸿振 冯革楠

(上海交通大学振动、冲击、噪声研究所·200030)

本文从半无限域 Helmholtz 积分方程入手,用边界元法(BEM)计算任意形状结构体辐射声场,对用 BEM 计算声场时出现的奇异积分、特征频率、边角点处法向不连续、高频段计算误差较大等问题进行了有效、简便的处理,并用理论算例验证了这些方法有较高精度。

关键词: 半无限域 辐射声场

## Calculation of structural radiation sound field in a semi-infinite region

WANG Hongzhen FENG Genan

(Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong Univ · 200030)

In this paper, based on the Helmholtz integral equation in a semi-infinite region, the radiated sound field of an arbitrary shaped structure is calculated with Boundary Element Method (BEM). Problems of singular integration, characteristic frequencies, normal noncontinuity at edges and corners, large error in high frequency bands that associated with the using of Boundary Element Method are treated effectively and conveniently. Theoretic numerical calculations are also given to show the high accuracy of these methods.

Key words: semi-infinite region, radiation sound field

### 1 理论公式

计算半无限域中结构体辐射声场一般采用下列半无限域 Helmholtz 积分方程(1)和(2):

$$C(P)\phi(P) = \int_{S_0} \phi(Q) \frac{\partial \psi_H}{\partial \gamma}(P, Q) - \psi_H(P, Q) \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}(Q) ds(Q) \quad (1)$$

式中:  $P$  为参考点,  $Q$  为结构体表面任一点,  $\phi$  为速度势,  $\gamma$  为表面  $Q$  点处的外法线方向(如图 1),  $\psi_H$  为半无限域 Green 函数,  $R_P$  为反射面反射系数:  $\psi_H = e^{-jkR(P, Q)}/R(P, Q) + R_P e^{-jkR(P', Q)}/R'(P', Q)$ ,  $C(P)$  为与结构体表面形状有关的因子, 表面光滑点处  $C(P) =$

$2\pi$ , 结构体内的点  $C(P) = 0$ , 结构体外的点  $C(P) = 4\pi$ , 结构体表面不光滑点处,  $C(P)$  因子为:

$$C(P) = 4\pi + \int_{S_0} \frac{\partial(1/R)}{\partial \gamma} dS_0 \quad (2)$$

由(1)式我们可以求出已知结构体表面速度势时的结构体表面声场和外部声场。

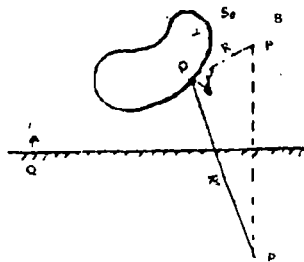


图 1 计算半无限域中结构体声场示意图

## 2 BEM 数值离散

为了求(1)式的数值解,现采用BEM。考虑到等参八节点四边形形函数较六节点三角形形函数精度高,同时引入两个形函数计算工作量增加,在用BEM数值离散时只引入等参八节点形函数<sup>[1]</sup>,在对结构体表面划分单元时,有些区域不可避免要用三角形单元,对这些单元计算时采用“退化单元”技术,将三角形的某一节点分成三个节点,这样三角形单元也可以用等参八节点四边形单元一样处理,计算工作量较小。

下面引用四边形八节点形函数 $N_a$ ,于是单元内任一点的坐标、速度势可用单元八个节点处的坐标、速度势值表示为:

$$\begin{aligned} X_M(\zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\zeta) X_{ma} \\ Y_M(\zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\zeta) Y_{ma} \\ Z_M(\zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\zeta) Z_{ma} \\ \phi(\zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\zeta) \phi_{ma} \\ \frac{\partial \phi}{\partial Y}(\zeta) &= \sum_{a=1}^8 N_a(\zeta) \frac{\partial \phi_{ma}}{\partial Y} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $X_{ma}, Y_{ma}, Z_{ma}, \phi_{ma}, \frac{\partial \phi_{ma}}{\partial Y}$ 分别为单元 $m$ 上各节点处的坐标值、速度势值及速度势法向导数值。

将边界积分方程(1)离散化,在边界单元 $S_I$ 上的 $\phi$ 值为:

$$\begin{aligned} -C_I \phi_I + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \phi(\zeta) \frac{\partial \psi_H}{\partial Y} dS \\ = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \psi_H \frac{\partial \phi_j}{\partial Y}(\zeta) dS \end{aligned} \quad (4)$$

将(3)式代入(4)式,对第 $I$ 个单元上第 $i$ 个节点有:

$$\begin{aligned} -C_I \phi_i + \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \sum_{a=1}^8 N_a \phi_{aj} \frac{\partial \psi_H}{\partial Y} dS \\ = \sum_{j=1}^n \int_{s_j} \sum_{a=1}^8 N_a \alpha_j \frac{\partial \psi_{aj}}{\partial Y} \phi_H dS \end{aligned} \quad (5)$$

令:

$$H_{aj}(i) = \int_{s_j} N_a(\zeta) \frac{\partial \psi_H}{\partial Y} dS$$

声学技术

$$\begin{aligned} &= \int_{s_j} \sum_{a=1}^8 N_a \frac{\partial \psi_H}{\partial Y} |J| d\zeta \\ G_{aj}(i) &= \int_{s_j} N_a(\zeta) \psi_H ds \\ &= \int_{s_j} \sum_{a=1}^8 N_a \phi_H |J| d\zeta \end{aligned} \quad (6)$$

式中:

$|J|$ 是直角坐标化为无量纲坐标的JACOBI行列式。

对所有 $I$ 个节点,可列出 $I$ 个线性方程,将它们写成矩阵形式:

$$[H][\phi]^T = [G][\frac{\partial \phi}{\partial Y}]^T \quad (7)$$

在已知表面法向速度时, $\frac{\partial \phi}{\partial Y}$ 为已知,根据(7)式就可求出 $\phi$ ,这些边界上所有量均为已知,用上面同样方法可求出外场点 $\phi$ 值。

## 3 BEM 计算声场时几个问题的处理

象其它数值方法一样,用BEM计算声场也会出现一些问题,对这些必须作适当的处理,才能保证精度。

### (1) 特征频率处理

对特征频率处理通常采用CHIEF方法<sup>[4]</sup>和GHIEF方法<sup>[2]</sup>,CHIEF方法的主要缺点是当选用的CHIEF点在结构体内部驻波节面时该方法无效,而GHIEF方法主要缺点是处理过程中出现高阶奇异积分。

本文采用改进的CHIEF方法,对CHIEF法增加一个精度控制因子 $K$ 来判断选择的CHIEF点是否合适,当计算的结构体表面 $\phi$ 和 $\frac{\partial \phi}{\partial Y}$ 满足

$$\begin{aligned} \int_{s_0} \phi(Q) \frac{\partial \psi_H}{\partial Y}(P, Q) - \psi_H(P, Q) \\ \cdot \frac{\partial \phi}{\partial Y}(Q) dS(Q) < K \end{aligned} \quad (8)$$

时,就认为所选择的CHIEF点满足计算精度要求,否则必须重新选择CHIEF点,该方法克服了CHIEF方法不能判断CHIEF点选择合适与否的缺陷。

## (2) 边角点处理

用 BEM 对任意形状结构体进行辐射声场计算, 必然会碰到边、点问题, 在边、角点处除了式(1)中  $C(P)$  因子不连续, 这些点处的外法向不连续, 须分别处理。

当结构体与无限大反射面不接触时,  $C(P)$  因子由(3)式给出, 但对结构体置于无限大刚性反射面时(如图 2),  $C(P)$  因子需作修正<sup>[2]</sup>, 这种情况下

$$C(P) = \begin{cases} 4\pi + \int_{S_0+S_c} \frac{\partial(1/R)}{\partial \gamma} dS & P \text{ 点在 } S_0 \text{ 面上但不在 } S_P \text{ 面上} \\ 4\pi + 2 \int_{S_0+S_c} \frac{\partial(1/R)}{\partial \gamma} dS & P \text{ 点在 } S_0 \text{ 面上且在 } S_P \text{ 面上} \end{cases} \quad (9)$$

对边、角点处外法线方向不连续, 本文采用重节点法处理。如图 3 中节点 a 为角点, 为 3 个单元所共有, 这里将 a 点用坐标相同, 但在 3 个不同单元外法向不同的  $a_1, a_2, a_3$  3 点表示, 这样对每个单元来说  $a_1, a_2, a_3$  3 点不再是角点, 而是有唯一外法向的一般节点。

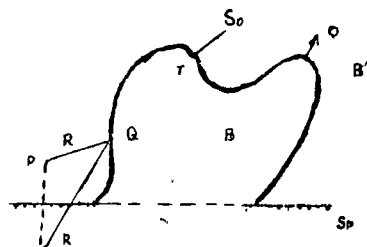


图 2 结构体置于刚性反射面时示意图

(3) 奇异积分处理和高频近似处理(另文发表)

## 4 理论算例

这里我们给出几个理论算例的计算结果。对图(1)结构体与反射面分离这种情况下, 计算了脉动球(半径为  $a$ , 球心与  $S_P$  面距离为  $3a, k_a=1$ ),  $S_P$  面反射系数  $R_p=+1$  时的辐射声场, 结果如图 4, 用重节点法计算了立方体(边长为  $2a$ , 重心到  $S_P$  面距离为  $3a, R_p=1$ ) 在半无限域中的辐射声场, 计算结果

如图 5 所示。对图 2 的情况, 计算了半球(半径为  $a, k_a=1$ ) 置于无限大刚性反射面时的辐射声场, 计算结果如图 6 所示。

由上面几个计算结果可以看出本文用 BEM 计算半无限域中结构体辐射声场有较高精度。

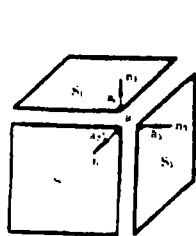


图 3 边角点处理示意图

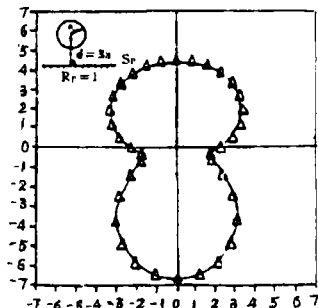


图 4 结构体与反射面分离时脉动球的辐射声场

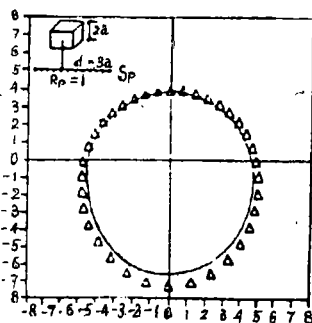


图 5 立方体在半无限域中的辐射声场

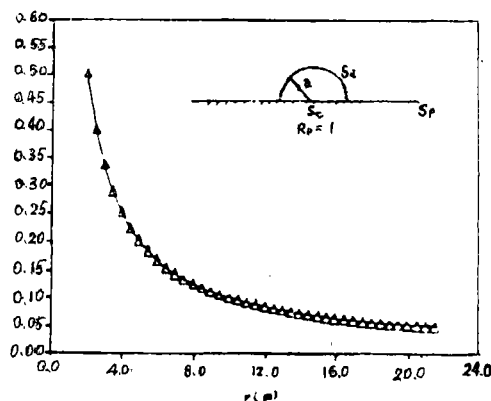


图 6 置于无限大刚性反射面上半球的辐射声场  
(下转 63 页)

$$\begin{array}{cccc} \frac{a}{vt_1} & 0 & \cos\alpha & \lambda + \cos\alpha \\ 0 & \frac{a}{vt_1} & \cos\beta & \mu + \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & \frac{vt_1}{a} & \frac{v(t_1 + \Delta t_1)}{a} \\ \lambda + \cos\alpha & \mu + \cos\beta & \frac{vt_1}{a} + \frac{v\Delta t_1}{a} & \frac{vt_1}{a} + \frac{2v}{a}\Delta t_1 + \frac{v}{a}\frac{\Delta t_1^2}{t_1} \end{array} = \frac{2\cos\alpha}{t_1}\lambda\Delta t_1 + \frac{2\cos\beta}{t_1}\mu\Delta t_1 - \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{t_1^2}\Delta t_1^2 - \mu 2\sin^2\alpha$$

$$- \lambda^2 \sin^2\beta - 2\lambda\mu\cos\alpha\cos\beta \quad (\text{附 2.4}).$$

在  $\triangle POA$ 、 $\triangle POB$ 、 $\triangle POC$  中应用三角形不等式, 可得

$$vt_2 < vt_1 + a < vt_1 + \sqrt{a^2 + b^2}, vt_3 < vt_1 + b < vt_1 + \sqrt{a^2 + b^2}, vt_4 < vt_1 + \sqrt{a^2 + b^2}, \text{于是便有}$$

$$\frac{t_i}{t_1} < 1 + \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{vt_1}, \quad (i=2, 3, 4),$$

由于在实际问题中总有  $vt_1 > \sqrt{a^2 + b^2}$ , 故有

$$t_i/t_2 < 2 \quad (\text{附 2.5}).$$

注意到  $\lambda$  及  $\mu$  之表达式及(附 2.5)式, 可知不论  $t_1$  有多大(即不论目标  $P$  离基阵有多远), (附 2.4)式右端各项都是有界量与  $\Delta t_i$  之高次项的乘积, 因而当各  $|\Delta t_i|$  很小时, 可以忽略不计。这说明在  $P'$  的两个可能位置中, 必有一个使  $\phi \approx 0$ , 即  $\angle POP' \approx 0$ 。若再注意到矩形基阵的对称性, 还必有  $\angle PAP' \approx 0$ ,  $\angle PBP' \approx 0$ ,  $\angle PCP' \approx 0$ 。这样, 我们便可断定, 当各  $|\Delta t_i|$  很小, 目标  $P$  离基阵并不十分远, 定位结果  $P'$  就一定落在  $P$  之近旁。这就是所要证明的结果。

### 参考文献

1 郑兆宁、向大威. 水声信号被动检测与参数估计理论. 科学出版社, 1983; 325~490.

2 袁易全、雷家煜、姚治国, 近代声学基阵原理及其应用. 南京大学出版社, 1994; 441~447.

3 L. M. Blumenthal, Theory and applications of distance geometry, 2nd ed, Chelsea, New York, 1970; 98~105.

4 T. F. Havel, T. D. Kuntz and G. M. Crippen, The theory and practice of distance geometry, Bulletin of Mathematical Biology, 1983; 45(5); 665~720.

5 G. M. Crippen, A Novel Approach to the Calculation of Conformation, Distance Geometry, J. Comp. Phys 1977; 24; 96~107.

6 刘宗杰, 袁易全, 电力变压器局部放电超声定位中的等效声速及优化算法. 声学技术, 1995; 14(1); 35~40.

(上接 56 页)

### 参考文献

1 A. F. Seybert, B. Scenarko, F. J. Rizzo and D. J. Shippy. An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in Three-Dimensions. J. A. S. A, 1985; 77(2); 362~368.

2 冯革楠, 汪鸿振. 半无限域中结构体声辐射研究第二届全国水声学术交流会 1990

3 A. J. Burton and G. F. Miller The Application of integral equation method to the solution of some exterior boundary-value problems proc. R. Ser. A 323 1970; 201~210

4 H. A. Schenck. Improved integral fomulation for acoustic radiation problems J. A. S. A, 1968; 44(1); 41~58