纵-弯复合系统的振动特性研究

林书玉　张明铎

（陕西师范大学应用声学研究所　西安·710062）*

本文对一种常用的纵-弯复合振动系统进行了研究，该系统由一个弯曲振动工具头及一个纵向振动驱动系统组成，文中对复合振动系统的振动特性进行了理论及实验研究，推出了系统的共振及反共振频率方程，还导出了复合振动系统的机械输入阻抗，并对系统的共振频率随长度的变化规律进行了探讨。实验表明，复合振动系统共振频率的测试值与计算值符合较好，系统的共振频率随振动系统几何尺寸的变化而变化，并且，弯曲振动系统的尺寸变化对频率的影响明显大于纵向振动系统的尺寸变化对系统共振频率的影响。

关键词：纵向振动　弯曲振动　共振频率　输入机械阻抗

Study on the vibrational characteristics of longitudinal -flexural composite systems

LIN Shuyu　ZHANG Mingduo

(Applied Acoustics Institute, Shanxi Teachers University, Xian · 710062)

In this paper, the investigation of vibrational characteristics of longitudinal-flexural composite systems is reported. The resonance and anti-resonance frequency equations are derived, and the effect of the tool on the resonance frequency is also studied. The input mechanical impedance of the composite vibrational system is obtained from theoretical derivation and its dependence on the longitudinal dimension and resonant frequency has been discussed. Experiments and theoretical analysis show that the measured resonance frequencies are in good agreement with the predicted results. They also show the tool in flexural vibration affects the vibrational characteristics of the composite system more obviously than the longitudinal system does.

Key words: longitudinal vibration, flexural vibration, resonance frequency, input mechanical impedance

1　引　言

在现有的功率超声应用技术中，超声振动系统大部分都是利用纵向振动系统，即由处于同一轴线上的换能器-变幅杆-工具系统[1,2]所组成，尽管这种能量传输系统具有设计简单、能量传输效率较高等优点，但由于在这种振动系统中，能量的传输方向不能改变，因而限制了它在一些比较复杂工艺技术中的

* 收稿日期：95-6-20

应用，例如，在超声外科手术，超声洁牙机以及超声塑料焊接等方面，对于纵-弯复合振动系统，由于缺乏比较系统的设计理论，因此，纵-弯复合振动系统要做到合理设计比较困难。在研制超声洁牙机的过程中就曾经发现这种情况：同一个纵向超声振动系统配上不同的工具头（即使这些工具头是同一批产品），复合振动系统的共振频率及阻抗有时差异也很大，由此可见，弯曲振动工具头的材料、形状及尺寸对复合系统的振动特性有很大的影响。为了提高纵-弯复合振动系统的性能，必须从理论上对此系统进行研究，并提供必要的实验数据。

2 纵-弯复合振动系统的共振频率方程

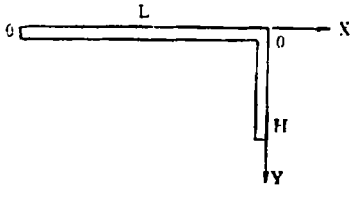

图 1 纵-弯复合系统的几何示意图

图 1 为简化的纵-弯振动系统的几何示意图，其中 L 及 H 分别为纵向振动系统及弯曲振动系统的长度。为简化理论分析，要求纵向及弯曲振动系统的横向尺寸远小于其长度，即本文研究的系统是由细棒组成，另外，假定纵向与弯曲系统由同一材料组成，在这一假设条件下，纵向系统及弯曲系统中的位移分布可表示如下：

$$U(x)=A\cos kx+B\sin kx \tag{1}$$

$$\eta(y)=C\mathrm{ch}\nu y+D\mathrm{sh}\nu y+E\cos\nu y+F\sin\nu y \tag{2}$$

式中，x 及 y 坐标系统的选取见图 1 所示，$k=\omega/c_L$，$c_L=(E/\rho)^{1/2}$，$\nu=\omega/c_f$，$c_f=\sqrt{\omega c_L R}$，c_L 及 c_f 分别为细棒中纵向振动及弯曲振动声速，R 为细棒的横截面回转半径，对于半径为 a 的圆截面棒 $R=a/2$；式中的 A、B、C、D、E、F 为待定常数，可由边界条件决定，对于图 1 所示的情况，其边界条件分别为：

(1) $x=0$ 处，纵向应力 F_L 为零。

$$F_L=-ES\frac{\partial U(x)}{\partial x}=0 \tag{3}$$

(2) $y=H$ 处，弯矩 M 及剪力 F_T 为零

$$M=-ER^2S\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}=0;\quad F_T=ER^2S\frac{\partial^3\eta}{\partial y^3}=0 \tag{4}$$

(3) $x=L$ 或 $y=0$ 处，位移及力连续，弯矩为零。

$$U(x)|_{x=L}=\eta(y)|_{y=0} \tag{5}$$

$$F_L|_{x=L}=F_T|_{y=0} \tag{6}$$

$$M=-ER^2S\frac{\partial^2\eta}{2y^2}|_{y=0}=0 \tag{7}$$

把(1)，(2)两式代入(3)～(7)式，经整理后可得 $B=0$，$C=E$，$2C=A\cos kL$，并有如下关系，

$$C(\mathrm{ch}\nu H-\cos\nu H)+D\mathrm{sh}\nu H-F\sin\nu H=0 \tag{8}$$

$$C(\mathrm{sh}\nu H+\sin\nu H)+D\mathrm{ch}\nu H-F\cos\nu H=0 \tag{9}$$

$$C(2k\mathrm{tg}kL)-D(R^2\nu^3)+F(R^2\nu^3)=0 \tag{10}$$

(8)～(10)式组成了 1 个三元一次方程组，若 C、D、F 有非零解，其系数行列式应为零，由此可得复合系统的共振频率方程为：

$$\mathrm{tg}kL=\sqrt{\frac{\omega R}{c_L}}\cdot(1-\mathrm{ch}\nu H\cdot\cos\nu H)/(\mathrm{sh}\nu H\cdot\cos\nu H-\mathrm{ch}\nu H\cdot\sin\nu H) \tag{11}$$

很显然，频率方程(11)式的特解为。

$$\mathrm{tg}kL=0,\quad \mathrm{ch}\nu H\cdot\cos H=1 \tag{12}$$

(12)式正是两端自由的细长棒纵向振动及弯曲振动的共振频率方程，也就是说，这一振动模式是纵-弯复合系统的振动模式之一，由(11)式可见，振动系统的共振频率与其材料、形状及长度有关，为了研究系统的共振频率随其尺寸的变化规律，利用(11)式进行了一些计算，结果见表 1 及表 2，表中 f 为系统的共振频率。

表 1　共振频率随纵向振动细棒长度 L 的变化规律($H=47.17$mm)

L(mm)	105	110	115	120	125	130	135	140	145
f(Hz)	23240	22320	21470	20700	20000	19360	18770	18230	17744

表 2　共振频率随弯曲振动细棒长度 H 的变化规律($L=125$mm)

H(mm)	27.17	32.17	37.17	42.17	47.17	52.17	57.17	62.17	67.17
f(Hz)	35751	29730	24100	21100	20000	19500	19150	18780	18250

在上述计算中，以 $f=20000$Hz，$H=47.17$mm，$L=125$mm 为参考点，此时，纵向细棒及弯曲细棒分别共振于两端自由的振动模式上，从表中数据可以看出，当 H 一定时，L 增大，频率 f 下降；L 减小时，频率 f 升高。当 L 一定时，H 增大，系统的共振频率降低；H 减小时，频率升高。另外，从表中数据还可以看出，在参考点上下两端，系统的共振频率随着长度 L 及 H 的变化规律是不同的，在下端，弯曲振动细棒的长度变化引起的频率变化明显大于纵向振动细棒长度变化引起的频率变化；而在上端，纵向振动细棒长度变化引起的频率变化大于弯曲振动细棒长度变化引起的频率变化。在实际工作中，这就意味着，随着工具的磨损，系统的频率将升高，并且，系统的频率随着工具长度的缩短而升高的幅度是比较大的。

3　纵-弯复合振动系统的机械输入阻抗

利用系统机械阻抗的定义，可得弯曲振动细棒工具头自由时，其输入端的机械阻抗 Z_f 为：

$$Z_f=\frac{F_T}{V_y}\Big|_{y=0}=-\mathrm{j}\rho s c_f(1-\mathrm{ch}\nu H\cdot\cos\nu H)/\mathrm{sh}\nu H\cdot\cos\nu H-\mathrm{ch}\nu H\cdot\sin\nu H \tag{13}$$

以 Z_f 作为纵向细棒的负载阻抗，利用传输线阻抗转移公式，可得复合系统的输入机械阻抗 Z_i 为，

$$Z_i/Z_1=\mathrm{j}\frac{\mathrm{tg}kL(\mathrm{sh}\nu H\cdot\cos\nu H-\mathrm{ch}\nu H\cdot\sin\nu H)-\sqrt{\omega R/c_L}(1-\mathrm{ch}\nu H\cdot\cos\nu H)}{\mathrm{sh}\nu H\cdot\cos\nu H-\mathrm{ch}\nu H\cdot\sin\nu H+\sqrt{\omega R/c_L}(1-\mathrm{ch}\nu H\cdot\cos\nu H)} \tag{14}$$

式中 $Z_1=\rho c_L S$ 为纵向振动细棒的特性阻抗，由(14)式可见，复合系统的输入机械阻抗与系统的材料、形状、尺寸及频率有关。由(14)式可见，当 $Z_i/Z_1=0$ 时，可得复合系统的共振频率方程(11)式，另外，当 $Z_i/Z_1=\infty$ 时，可得出系统的反共振频率方程，

$$\mathrm{ch}\nu H\cdot\sin\nu H-\mathrm{sh}\nu H\cdot\cos\nu H=\sqrt{\omega R/c_L}(1-\mathrm{ch}\nu H\cdot\cos\nu H) \tag{15}$$

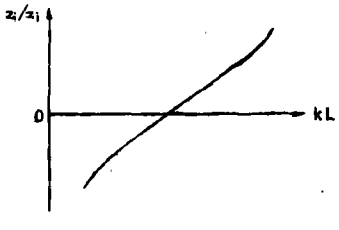

图 2　复合振动系统的输入阻抗与 kL 的关系曲线

根据(14)式，可得复合系统的输入阻抗与系统各部分的尺寸及频率之间的关系曲线如图 2 及图 3。

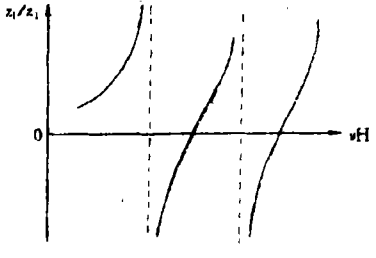

图 3　复合系统的输入阻抗与 νH 的关系曲线

由图中曲线可以看出，复合系统的输入阻抗随着纵向振动细棒长度的变化规律与其随弯曲振动细棒长度的变化规律不同，随着弯曲振动细棒的长度变化，系统的输入阻抗发生复杂的变化，也就是说，弯曲振动细棒长度的变化对系统振动性能的影响是很大的。

(下转 90 页)

槽底和水到达水-气分界面时，声波是垂直入射到水-气分界面。因此，其反射波与入射波会在水中深度方向形成驻波场，致使深度方向的声场分布很不均匀。在斜底式清洗槽中，水面不再与槽底平行，声波不再是垂直入射到水-气分界面。在本文所述的斜底式清洗槽中，声波以 7 度的入射角入射到水-气分界面，其反射波与入射波之间的夹角为 14 度。因而此时反射波与入射波不能再形成驻波场，清洗槽中的声场混响程度增大，深度方向的声场均匀性得到改善。而水平方向的声场分布主要决定于清洗槽底换能器的安装位置[3]。由于两种清洗槽中换能器的安装位置基本相同，因此水平方向的声场分布变化不大。

参考文献

1 应崇福．超声学．科学出版社，1993。

2 程存弟．超声技术．陕西师范大学出版社，1993。

3 方启平，颜忠余，林仲茂．染色法测量空化场的分布．中国声学学会 1995 年青年学术会议论文集，337～339。

（上接 87 页）

4 实 验

为了从实验中探讨纵-弯复合系统的共振频率随几何尺寸的变化规律，加工了一些纵-弯复合系统，其材料为 45 号钢，并对其共振频率进行了测试，测试框图见图 4，其中 T_1 和 T_2 为发射及接收换能器，其共振频率应远离被测系统的共振频率。测试结果见表 3，其

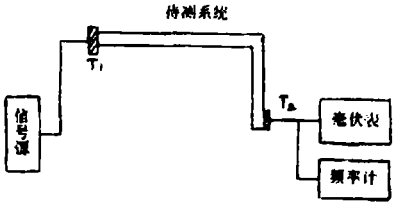

图 4 复合系统共振频率的测试框图

表 3 纵-弯复合系统共振频率的测试结果

编号	L(mm)	H(mm)	f(Hz)	f_m(Hz)	Δ(%)
1	120.0	47.2	20700	19756	4.78
2	130.0	47.2	19360	18690	3.58
3	125.0	47.2	20000	19168	4.34
4	125.0	42.2	21100	19975	5.63
5	125.0	52.2	19500	18742	4.04

中 f 为理论计算频率，f_m 为测试值，$\Delta=|f-f_m|/f_m$。从表中结果可以看出，系统共振频率的测试值与理论值基本符合，并且，系统的共振频率随其尺寸的变化规律与理论预测基本相符。

5 结 论

本文研究了纵-弯复合系统的振动特性，推出了复合系统的共振及反共振频率方程，得出了系统输入机械阻抗的数学表达式，为此可得以下结论。

（1）系统的共振频率与纵向振动细棒及弯曲振动细棒的长度有关，并且，系统的共振频率随着 L 及 H 的变化规律不同，当系统由于磨损而使工具长度缩短时，系统的共振频率将升高，而且，由弯曲振动细棒引起的频率变化明显大于由纵向振动细棒所引起的频率变化。

（2）系统的输入机械阻抗随着纵向振动棒及弯曲振动棒的长度而变化，系统的输入阻抗随弯曲振动棒长度的变化发生较大的变化，出现更多的共振频率，因此，弯曲振动细棒对系统振动性能的影响是很大的。

参考文献

1 俞宏沛．超声换能器变幅杆及其组合的一种计算方法．应用声学，1988；7（4）：30～36.

2 陈桂生．超声换能器设计．北京：海洋出版社，1984.

3 姜健，关中原译．超声波焊接，北京：国防工业出版社，1963