

用边界元法计算声辐射时高次奇异积分的处理方法*

汪鸿振 郭 芃

(上海交通大学振动冲击噪声研究所 · 200030)

边界元法应用于计算辐射声场时,由于奇异积分的存在,会影响到计算结果的精度。本文描述了处理带有 $1/r$ 奇异积分和 $1/r^2$ 二次奇异积分的处理方法,包括数学证明和数值积分方法。计算结果表明这种方法能提高精度。

关键词: 边界元法, 声辐射, 奇异积分

A method of treating high-order singular integration in calculation of sound radiation with BEM

WANG Hongzhen GUO Peng

(Shanghai Jiao Tong University · 200030)

The singular integration will affect the precision of the result while the Boundary Element Method (BEM) is used in calculating sound radiation. The methods of treating singularities in $1/r^2$ as well as singularities in $1/r$ were presented, which include mathematical proof and numerical integration method. The calculating results show this method can improve the precision of the results.

Key words: boundary element method, sound radiation, singular integration

1 前言

边界元法是 70 年代发展起来的一种新的数值计算方法。它与区域型解法相比,具有数据量少,精度高等优点。在边界元法发展的初期,由于划分边界单元时多采用常单元,二次奇异积分项为零,一次奇异积分也可求出精确的解析解。

但随着高次、多节点单元的引入,奇异积分往往不能求出解析解,而必须通过数值积分来处理。奇异积分的处理也变得复杂起来。目前国内外对奇异积分的处理多停留在对一次奇异积分项的计算上,如文献[1~3],即通过在单元上的坐标变换,由直角坐标系变为

极坐标系,然后消去分母在参考点上的零点,使积分变为普通的二重积分。对二次奇异积分的处理,目前方法还不多。本文以使用边界元法计算封闭壳体的辐射声场过程中出现的二次奇异积分为例,从理论上给出消除其奇异性的证明,并为方便上机计算提出了相应的数值积分方法。

2 对带有 $1/r$ 奇异积分的处理

在求解封闭壳体的辐射声场过程中,由 Helmholtz 方程利用 Green 公式可推导出边界积分方程:

$$C_i \Phi + \int_s \Phi \mu^* ds = \int_s \Phi^* \mu ds \quad (1)$$

* 收稿日期: 95-11-9

式中 Φ 为速度势; $\mu_1^* = \partial\mu_1 / \partial n_s$; $\mu_1 = e^{ikr} / 4\pi r$; $\Phi^* = \partial\Phi / \partial n_s$; n_s 为壳体外法线方向; k 为波数; s 为封闭曲面。

若用几个单元离散曲面, 每个单元有 K 个节点, 并用单元上的节点值来插值单元上相应的变量。则(1)式为:

$$C_p^a \Phi_p^* + \sum_{j=i}^n \sum_{s_j, a=i}^K M^a \Phi_j^* \mu_1^* ds = \sum_{j=1}^n \sum_{s_j, a=1}^K M^a \frac{\partial\Phi_j^*}{\partial n_s} \mu_1 ds \quad (2)$$

式中: a 为某单元的第 a 个节点; p, j 分别为第 p, j 单元; M^a 为单元上 a 节点的形函数。令:

$$H_j^a(P(a)) = \int_{s_j} M^a \mu_1^* ds \quad (3. a)$$

$$G_j^a(P(a)) = \int_{s_j} M^a \mu_1 ds \quad (3. b)$$

(2)式变为:

$$C_p^a \Phi_p^* + \sum_{j=ln=1}^n \sum_{ln=1}^K H_j^a(P(a)) \cdot \Phi_j^* = \sum_{j=1a=1}^n \sum_{j=1a=1}^K G_j^a(P(a)) \frac{\partial\Phi_j^*}{\partial n_s} \quad (4)$$

当 $p = j$ 时, 即 $H_j^a(P(a)), G_j^a(P(a))$ 均在本单元上进行积分时, 积分将出现奇异性。

$$\text{其中 } G_p^a(P(a)) = \int_{s_j} M^a \frac{e^{ikr}}{4\pi r} ds \quad (4. a)$$

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_j} M^a \frac{e^{ikr}(ikr-1)}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n_s} ds \quad (4. b)$$

可见, (4. a) 式是关于 $1/r$ 的奇异积分, (4. b) 式是关于 $1/r^2$ 的奇异积分。讨论(4. a)式的一般数值计算方法时, 为简单起见在二维情况下, 以八节点曲边单元为例来说明。

如图 1, 经等参变换, 曲边单元(a)被变换到 $\zeta_1 O \zeta_2$ 坐标系中的标准八节点单元(b)。设节点 3 为奇异点。以 3 为极点, 如图(b), 将直角坐标系变为极坐标系。

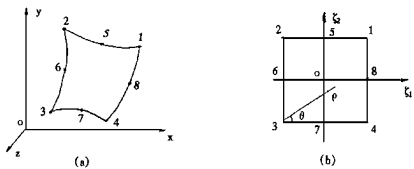


图 1 八节点单元及坐标变换

$$\zeta_1 = \rho \cos \theta - 1 \quad \zeta_2 = \rho \sin \theta - 1 \quad (5)$$

则(4. a)式变为:

$$G_p^a(P(a)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} \frac{M^a e^{ikr}}{4\pi r} \rho J d\rho d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{2}{\sin \theta}} \frac{M^a e^{ikr}}{4\pi r} \rho J d\rho d\theta \quad (6)$$

J 为等参变换的 Jacobian 行列式由于 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = [(\sum M^a x^a)^2 + (\sum M^a y^a)^2 + (\sum M^a z^a)^2]^{1/2}$ 。又因等参变换有连续性, 故:

$$r = \rho f(\rho, \theta) \quad (7)$$

其中: 当 $\rho = 0$ 时, $f(\rho, \theta) \neq 0$ 将(7)代入(6)式便可消去积分中的奇异性。

$$G_p^a(P(a)) = \int_{s_p} \frac{M^a e^{ikr}}{f(\rho, \theta)} J d\rho d\theta \quad (8)$$

(8)式中, 积分不再具有奇异性。但在一般情况下(8)式对 ρ, θ 不能精确积分, 可采用高斯二维数值积分公式来计算。类似的, 若节点 2 为奇异点, 通过相同的手段处理, 也可消去积分核的奇异性化为普通积分。

3 对带有 $1/r^2$ 奇异积分的处理

3.1 理论证明

由(4. b)式:

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_p} M^a \frac{e^{ikr}(ikr-1)}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial n_s} ds \quad (9)$$

(9)式为关于 $1/r^2$ 的奇异积分。下面以八节点曲边单元为例来讨论该奇异积分的处理方式。

首先在三维空间中将坐标原点移到奇异点(仍设为第 3 点), 如图 2(a)。再将曲边单元 S_p 变换到 $\zeta_1 O \zeta_2$ 平面上变为标准八节点单元。然后以奇异点为极点建立极坐标系, 如图 2(b) 所示。

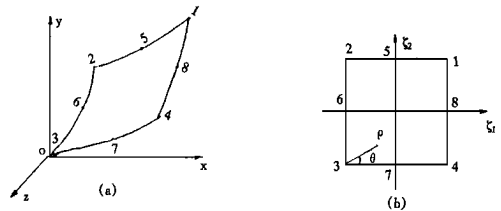


图 2 坐标变换

令: $N = M_a e^{ikr}(ikr-1) / 4\pi$ (9)式可写为:

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_p} N \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_s} ds \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_s} = \frac{\partial}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial}{\partial z} \cos \gamma \quad (11)$$

α, β, γ 分别为曲面外法向与 x, y, z 轴的夹角。在新的坐标系中, (10) 式可写成:

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_p} N \frac{J_1x + J_2y + J_3z}{r^3} d\zeta d\zeta \quad (12)$$

式中: $J_1 = \partial(y, z) / \partial(\zeta, \zeta)$; $J_2 = \partial(z, x) / \partial(\zeta, \zeta)$; $J_3 = \partial(x, y) / \partial(\zeta, \zeta)$ 。

由上节的推论可知, $N \cdot 1/r d\zeta d\zeta$ 经坐标变换后可消除奇异性。现在观察 $(J_1x + J_2y + J_3z)/r^2$ 这一项。

$$\text{令: } A = [J_1x + J_2y + J_3z] / r^2 \quad (13)$$

经坐标变换后, $r^2 = \rho^2 F(\rho, \theta)$, 且当 $\rho = 0$ 时, $F(\rho, \theta) = 0$ 。

$$\text{令: } \eta_1 = \zeta - 1, \quad \eta_2 = \zeta + 1 \quad (14)$$

$$\text{则: } \eta_1 = \rho \cos \theta, \quad \eta_2 = \rho \sin \theta \quad (15)$$

下面以八节点曲边单元为例, 来证明 $J_1x + J_2y + J_3z$ 中不含有 η_1, η_2 的一次项及常数项。下式为八节点曲边单元的形函数:

$$\begin{aligned} M_1^k &= (\zeta + 1)(\zeta + 1)(\zeta + \zeta - 1) / 4 \\ M_2^k &= (\zeta - 1)(\zeta - 1)(\zeta - \zeta + 1) / 4 \\ M_3^k &= (1 - \zeta)(\zeta - 1)(\zeta + \zeta + 1) / 4 \\ M_4^k &= (\zeta + 1)(\zeta - 1)(\zeta - \zeta + 1) / 4 \\ M_5^k &= (\zeta + 1)(1 - \zeta^2) / 2 \\ M_6^k &= (\zeta + 1)(1 - \zeta^2) / 2 \\ M_7^k &= (\zeta - 1)(\zeta^2 - 1) / 2 \\ M_8^k &= (1 - \zeta)(\zeta^2 - 1) / 2 \end{aligned} \quad (16)$$

将(14)式代入(16)式并展开, 然后各式分别对 η_1, η_2 求导后再代入(13)式可得:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{r^2} & \left[\sum_1^K b_e Y_e \left(\sum_1^K c_e Z_e \cdot \sum_1^K a_e X_e - \sum_1^K c_e X_e \cdot \sum_1^K a_e Z_e \right) \right. \\ & + \sum_1^K b_e Z_e \left(\sum_1^K c_e X_e \cdot \sum_1^K a_e Y_e - \sum_1^K c_e Y_e \cdot \sum_1^K a_e X_e \right) \\ & \left. + \sum_1^K b_e X_e \left(\sum_1^K c_e Y_e \cdot \sum_1^K a_e Z_e - \sum_1^K c_e Z_e \cdot \sum_1^K a_e Y_e \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

式中: a_e, b_e, c_e 为有关 η_1, η_2 的多项式。经推导化简后可得:

$$A = \frac{1}{r^2} [P_3(\eta_1, \eta_2) + \eta_1 \cdot \bar{m}] \quad (18)$$

上式中 $P_3(\eta_1, \eta_2)$ 为关于 η_1, η_2 的二次及二次以上项的多项式, 一次项仅与 η_1 有关。

将(17)式作如下的组合:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{r^2} & \left[\sum_1^K c_e Z_e \left(\sum_1^K b_e Y_e \cdot \sum_1^K a_e X_e - \sum_1^K b_e X_e \cdot \sum_1^K a_e Y_e \right) \right. \\ & + \sum_1^K c_e Y_e \left(\sum_1^K b_e X_e \cdot \sum_1^K a_e Z_e - \sum_1^K b_e Z_e \cdot \sum_1^K a_e X_e \right) \\ & \left. + \sum_1^K c_e X_e \left(\sum_1^K b_e Z_e \cdot \sum_1^K a_e Y_e - \sum_1^K b_e Y_e \cdot \sum_1^K a_e Z_e \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{同样可得: } A = \frac{1}{r^2} [L_3(\eta_1, \eta_2) + \bar{n} \cdot \eta_2] \quad (20)$$

式中 $L_3(\eta_1, \eta_2)$ 为关于 η_1, η_2 的二次及二次以上的多项式。 \bar{n} 为常数。比较(18), (20)式得:

$$P_3 = L_3(\eta_1, \eta_2) = L_3(\eta_1, \eta_2) \quad (21)$$

$$\bar{m} = \bar{n} = 0 \quad (22)$$

至此, 证明(13)式中, 分子展开成 η_1, η_2 的多项式后, 不再含有 η_1, η_2 的一次项及常数项, 在经过极坐标变换后从(13)式的分子与分母中的 ρ^2 因子相约去, (13)式将不再有奇异性。综上所述, 二次奇异积分可通过适当的数学变换化为普通积分。

3.2 二次奇异积分的数值计算方法。

从上分析中可以看出, 如果将积分核展开成 η_1, η_2 的多项式, 再化为极坐标, 消去奇异性之后进行数值积分, 其运算量十分庞大, 用于实际计算也不太现实。由式(12)得:

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_p} N(\rho, \theta) \frac{J_1x + J_2y + J_3z}{\rho^3 G(\rho, \theta)} \rho d\rho d\theta \quad (23)$$

式中: $\rho = 0$ 时, $G(\rho, \theta) = 0$ 将积分核中分子写成(17)式内中括号中的形式, 并令:

$$\bar{a}_e = \begin{cases} a_e & e = 2, 4, 7, 8 \\ a_e + \eta_2 / 2 & e = 2 \\ a_e + \eta_1 / 2 & e = 4 \\ a_e - 2\eta_2 & e = 7 \\ a_e - 2\eta_1 & e = 8 \end{cases} \quad (24. a)$$

$$\bar{b}_e = \begin{cases} b_e & e = 4, 8 \\ b_e + 1/2 & e = 4 \\ b_e - 2 & e = 8 \end{cases} \quad (24. b)$$

$$\bar{c}_e = \begin{cases} c_e & e = 2, 7 \\ c_{e+1}/2 & e = 2 \\ c_{e-2} & e = 7 \end{cases} \quad (24.c)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}(S) &= -\eta_2 S_2/2 - \eta_1 S_4/2 + 2\eta_2 S_7 + 2\eta_1 S_8 \\ B(S) &= -S_4/2 + 2S_8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$C(S) = -S_2/2 + 2S_7$$

因已证明(17)式等式右边方括号内的多项式中不含 η_1 、 η_2 的一次项及常数项,在经极坐标变换后,可得到如下的表达式:

$$J_{1x} + J_{2y} + J_{3z} = \rho^2 M(\rho, \theta) \quad (26)$$

上式中, $M(\rho, \theta)$ 为关于 ρ 、 $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ 的整式。代入(23)式,可得:

$$H_p^a(P(a)) = \int_{s_p} N(\rho, \theta) \frac{M(\rho, \theta)}{G(\rho, \theta)} d\rho d\theta \quad (27)$$

(27)式是关于 ρ 、 θ 的普通积分式,在一般情况下,可采用二维数值积分法求解。

4 计算实例

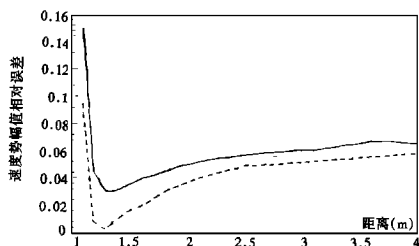


图 3(a) 均匀脉动球速度势幅值相对误差

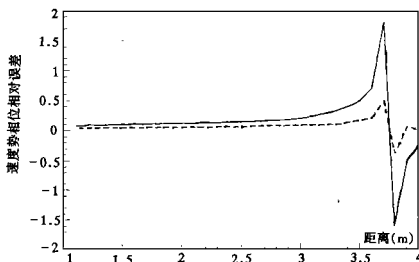


图 3(b) 均匀脉动球速度势相位相对误差
——不处理奇异积分的方法,本文方法

本文以均匀脉动球为例,计算了其辐射声场,结果示于图3。边界单元为六节点三角形单元和八节点四边形单元,脉动球半径为1m,振动频率为100Hz。可见采用本方法的计算结果精度有明显提高。

5 结论

(1) 本文给出带有 $1/r$ 奇异积分处理方法,并推导了带有 $1/r^2$ 奇异积分的处理方法。

(2) 在处理二阶奇异积分时给出了精确的、便于程序化的计算方法和积分公式。

(3) 计算结果表明,采用本文方法,能提高计算精度。

参考文献

1. Tells, J. C. & Brebbia, C. A., The boundary element method in plasticity, in *New Developments in Boundary Element Methods*, (Ed. Brebbia), Butterworths, 1980.

2. Cristescu, M. & Loubignac, G., Gaussian quadrature formuluss for functions with singularities in $1/r$ over triangles and quadrangles, in *Recent advances in boundary element method*, (Ed. Brebbia), Pentech Press, 1978.

3. 李文龙, 张相麟. 弹塑性边界元法中带有 $1/r$ 奇异体积分的一种有效的数值积分方法. 计算结构力学及其应用, 1986; 11

4. 徐利沿, 周蕴明. 高维数值积分. 科学出版社, 1980

5. Seybert, A. F., Soenarko, B., Rizzo, F. J., Shippy, D. J., An advanced computational method for radiation and scattering of acoustic waves in three dimensions. *J. A. S. A.* 1985; 77(2)