pendence of B/A parameter on the composition and structure for the pathological tissue. it 14th ICA, 1992; I3～4

4 W. N. Cobb. J. Acoust. Soc. Am., 1983; 73: 1525

5 X. F. Gong, Z. M. Zhu, et al. J. Acoust. Soc. Am., 1989; 86: 1

6 ZHAHG Ruiquan, FENG Shaosong. The propagation of a large amplitude plane wave in layered media. Proc. of 14th ISNA 1996; 165

7 冯绍松. “对大振幅平面声波的反射和折射(1)——一维情况”一文的修正, 声学学报, 1997

平面分层不均匀介质中声场方程组的级数解

唐应吾

(中国科学院声学研究所　北京 · 100080)

1　引　言

声波在平面分层不均匀介质中的传播问题, 一直受到人们的重视。但其中的声场方程组[1], 仅仅只对少数几种特殊的声速分布才能求出其严格解。对于一般的声速分布, 人们常使用 WKB 方法来求其近似解。因此求出其声场方程组在一般情况下的精确解是有意义的。

本文将 Bremmer[2,3] 级数推广到声学中来, 寻求声场方程组的函数项级数解。文中利用此级数解的每一项的物理意义, 导出了平面分层不均匀介质中声反射系数的近似表式, 并就一个特例进行了计算。

2　声场方程组的级数解

我们假设平面分层不均匀介质中的声速 $c(z)$ 是坐标 z 的徐变函数, 介质的密度 ρ 为一常数, 这时二维空间 (x, z) 中的声场方程组为

$$\begin{cases} \partial P/\partial t = -\rho c^2(\partial V_x/\partial x + \partial V_z/\partial z) \\ \partial V_x/\partial t = -[\rho]^{-1}\partial P/\partial x \\ \partial V_z/\partial t = -[\rho]^{-1}\partial P/\partial z \end{cases} \tag{1}$$

这里 P 为声压, t 为时间, V_x 与 V_z 为声波中质点的速度分量, c 为声速。设方程(1)的解为

$$\begin{cases} P = [\beta(z)]^{-1/2}\{x_1(z)\exp[i\int_0^z\beta(z)dz] \\ \quad + x_2(z)\exp[-i\int_0^z\beta(z)dz]\}\exp(i\nu x) \\ V = (\nu/\omega\rho)P \\ V = [\beta(z)]^{1/2}[\omega\rho]^{-1}\{x_1(z)\exp[i\int_0^z\beta(z)dz] \\ \quad - x_2(z)\exp[-i\int_0^z\beta(z)dz]\exp(i\nu x.) \end{cases} \tag{2}$$

式中 $\beta(z) = \sqrt{k^2(z) - \nu^2}$; $\nu = k(z)\sin\theta$; $k(z) = \omega/c(z)$; ω 为声波的角频率; θ 为平面声波的入射角; $i = \sqrt{-1}$; $x_1(z)$ 与 $x_2(z)$ 为两个待定函数, 当它们为两个常数时, 表达式(2)就是方程组(1)的 WKB 解。

把(2)式代入(1)式可见, 要使式(2)为式(1)的解, 两个待定函数 $x_1(z)$ 与 $x_2(z)$ 必须满足方程组:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(z)}{dz} &= [2\beta(z)]^{-1}x_2(z)\frac{d\beta(z)}{dz}\exp[-i\int_0^z\beta(z)dz] \\ \frac{dx_2(z)}{dz} &= [2\beta(z)]^{-1}x_1(z)\frac{d\beta(z)}{dz}\exp[-i\int_0^z\beta(z)dz] \end{aligned} \tag{3}$$

为了讨论的方便, 我们把(3)式改写为[1]

$$\begin{aligned} dx_1(z)/dz &= \epsilon R(z)\cdot x_2(z) \\ dx_2(z)/dz &= \epsilon S(z)\cdot x_1(z) \end{aligned} \tag{3'}$$

这里 ϵ 是个很小的参量。设方程组(3)的级数解为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + \epsilon x_1^{(1)} + \epsilon x_1^{(2)} + \cdots\cdots \\ x_2 &= x_2^{(0)} + \epsilon x_2^{(1)} + \epsilon x_2^{(2)} + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

这里 $x_1^{(0)}$ 与 $x_2^{(0)}$ 为两个任意的常数, 其它各级校正项由方程组(5)给出。

$$\begin{aligned} dx_1^{(l+1)}(z)/dz &= R(z)\cdot x_2^{(l)}(z) \\ dx_2^{(l+1)}(z)/dz &= S(z)\cdot x_1^{(l)}(z) \end{aligned} \tag{5}$$

因此, 有 $x_1^{(1)}(z) = \int_{-\infty}^{z}R(z)\cdot x_2^{(0)}(z)dz$, $x_1^{(l+1)}(z) = \int_{-\infty}^{z}R(z)\cdot x_2^{(l)}(z)dz$, $x_2^{(l)}(z) = \int_{-\infty}^{z}S(z)\cdot x_1^{(0)}(z)dz$, $x_2^{(l+1)}(z) = \int_{-\infty}^{z}S(z)\cdot x_1^{(l)}(z)dz$, 把求出的各校正项代入(4)式, 再把(4)式代入(2)式中, 得出声场方程组的级数解。

容易看出, 声场方程组的函数项级数解的第一项相应于 WKB 解, 相继的项表示在平面分层不均匀介质内的反射波。例如, 含有 $\epsilon x_2^{(1)}$ 的项相应于沿负 z 方向传播的一次反射波, 它是由沿正 z 方向传

播的“前进波”——含有 $x_1^{(0)}$ 的项——所激发的。余此类推。这样,声场方程组的函数项级数解的每一项的物理意义就很清楚了。

3 平面分层不均匀介质中的声反射系数

二维声场方程组的级数解的一个重要应用,就是用来计算分层不均匀介质中的声反射系数。因该级数的第一项相应于 WKB 解,第二项相应于一次反射波。若假设高于一次的反射波极为微弱,可以忽略,则平面分层不均匀介质中声反射系数可近似表为:

$$V(z_0) = \epsilon x_2^{(1)}(z_0)/x_1^{(0)} \qquad (6)$$

这里声反射系数 $V(z_0)$ 表示在 $z = z_0$ 平面上的声反射系数。从方程(5)可以解得

$$x_2^{(1)}(z) = \int_\infty^z \left[\frac{1}{2\epsilon\beta(z)}\right]^{-1}\frac{d\beta(z)}{dz}\cdot \exp\left[2i\int_0^z\beta(t)\,dt\right]dz\cdot x_1^{(0)} \qquad (7)$$

式中积分限如此选取,是表示 z 从 z_0 到∞范围内皆有 $x_1^{(0)}$ 的反射波到达 $z = z_0$ 这一平面上来。把(7)式代入(6)式令 $\gamma = [1/2\beta(z)][d\beta(z)/dz]$ 得

$$V(z_0) = \int_\infty^{z_0}\gamma(z)\exp\left[2i\int_0^z\beta(t)\,dt\right]dz \qquad (8)$$

式(8)与布列霍夫斯基赫[1]所确定的声反射系数的 Ricatti 型方程 $V' = -2i\beta V + \gamma(1-V^2)$ 的一级近似解相同。这样,式(8)是在半空间(z_0,∞)内被反射的各个波在 $z = z_0$ 处以各自所经历的相移迭加起来之和[1]。这时,直射波的振幅被设为1,它从 $z = z_0$ 向着 $z = \infty$ 的方向传播,并在途中“衍生”出各个反射波。

4 计算声反射系数的一个实例

设平面分层不均匀介质在平面 $z = 0$ 上与均匀介质交界,且 $z \le 0$ 时,$k(z) = k_0$,$z \ge 0$ 时,$k(z) = k_0\exp(\alpha z)$,$(0 \le \alpha \le 1)$,据此,我们令 $z_0 = 0$ 且有

$$\beta(z) = k_0\cos\theta\exp(\alpha z) \qquad (9)$$

$$\gamma = \alpha/[2\cos^2\theta] \qquad (10)$$

因 $\alpha \ll 1$,可知入射角 $\theta(z)$ 为 z 的徐变函数。故 $\cos\theta(z)$ 可用 $\cos\theta(0)$ 来代替而不会引起明显的误差。以后用 $\cos\theta_0$ 代替 $\cos\theta(0)$ 把式(9)和(10)代入(8)中,得

$$V = [-\alpha/(2\cos^2\theta_0)]\cdot\int_0^\infty\exp\{(2ik_0\cos\theta_0/\alpha)[\exp(\alpha z)-1]\}dz \qquad (11)$$

完成积分可得

$$V(0) = (1/2\cos^2\theta_0)\cdot\exp[-2i(k_0/\alpha)\cos\theta_0]\,E_i(2ik\cos\theta_0/\alpha) \qquad (12)$$

这里 $E_i(x)$ 为 x 的积分指数函数。

要注意,由于我们在完成积分(11)时,用到了 $\theta(z) = \theta(0) = \theta_0$ 这一关系,这就限制了 θ_0 不能接近于 $\pi/2$。在小掠射角的情况下,利用 $E_i(-x)$ 的渐近表式,则表达式(12)可近似地写为

$$V(0) = [i\alpha/4k_0\cos^3\theta_0] - [\alpha^2/8k_0\cos^4\theta_0] \qquad (13)$$

当上式右边的第二项甚小于第一项时,取其绝对值,有

$$V(0) = [\alpha/4k_0\cos^3\theta_0] \qquad (14)$$

若以分贝表出,有 $-20\log V(0) = 40\log 2 + 20\log(k_0/\alpha) + 60\log\cos\theta_0$,这与文献[4]中的结果相同。

参考文献

1 .M. 布列霍夫斯基赫 . 分层介质中的波 . 科学出版社, 1960: 159～162; 170～181

2 Bremmer, H., Physica, 1949; 15: 593

3 程 路 . Bremmer 级数之推广 . 物理学报, 1965; 21: 414～442

4 Heller, G. S., J. A. S. A., 1953; 25: 1104～1106