

$$= \begin{cases} \frac{t^2}{ik} \left(\frac{t}{2ik} + (y, k) - (y, k) + (x, k)^2, x > y \right. \\ \left. \frac{t^2}{ik} \left(\frac{t}{2ik} + (x, k) - (x, k) + (y, k)^2, x < y \right) \right. \end{cases} \quad (5)$$

利用这一结果最终可以证明当

$$4(t_e(k) - t(k))^* / t \quad 1, a, e \text{ 时} \quad (6)$$

Steepest descant gradient method 收敛。

2.2 二维海洋声波中的简正波偶合及逆问题

海洋中由于各种物理海洋动力学将导致声速剖面的变化,例如内波,锋面的存在都会直接影响声速剖面。Munk 在 70 年代末期提出利用测量声传播时间的变动测量声速剖面的变化,监测海洋内部诸多变化过程的 Acoustic Tomography 设想^[2,3]。当前的主要问题之一是:如何反演二维海洋声波中的声速剖面的局部扰动。从二维 Helmholtz 方程

$$\Delta^2 + \left[\frac{k^2}{c_0^2(z)} + k^2 \left(\frac{1}{c^2(x, z)} \right) \right] = 0 \quad (7)$$

将波函数按简正波展开后,可将上述二维转化为一个联立二阶常微分方程系

$$d^2 A(x) / dx^2 + (K^2 + V)A(x) = 0 \quad (8)$$

这里 $A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x), \dots), K^2 \text{ diag}(k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2, \dots)$, 矩阵型势函数定义如下

$$[V(x)]_{nm} = \begin{cases} < 2 < m(z), \left(\frac{1}{c(z)^2} \right)_{n(z)} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

同上 Schrodinger 方程的处理方法类似,我们定义其散射矩阵 $T(\cdot)$ 。利用泛函 Frechet 微分

$$[T_{+c}(\cdot) - T_{+c}(\cdot)]_{nm} = - \frac{1}{R^2} T_{+c} \left[\frac{1}{k} F - (-k)^T \cdot F_+(k) \right] T_{+c} \frac{1}{c^2(x, z)} dx dz \quad (10)$$

传播时间扰动为

$$\Delta t_{mn} = - \frac{r_{AD}(mn, V(y))_{mn} / V(y)}{r_{AD}(mn, V(y))_{mn}} V(y) dy^2 \quad (11)$$

式中的下标 (m, n) 区分不同的简正波, mn 代表简正波 m 入射时,由于局部扰动导致的简正波偶合所产生的第 n 号简正波的 Athanassoulis 等定义的 arrival

pattern 传输时间的变动⁴¹。式中的所有量都可以利用散射矩阵 $T(\cdot)$ 及入射波型因子给出。方程(11)是一个线性反演方程,也是第一类 Fredholm 方程,利用这一方程及常用的正则化处理可以反演矩阵型势函数(9)及声速剖面扰动。

3 问题点及今后发展

除上述二例外,我们还对分层介质中的弹性 p-SV 波的横/纵波速密度剖面介质参数同时反演问题;三维 Helmholtz 方程利用散射幅度反演介质参数问题^[5],利用上述方法进行讨论。上述方法有两点优点:(1)方法系统推导简明;(2)容易推广到一般非线性反演问题。然而目前只有一维 Schrodinger, Dirac 方程的逆问题,借助于 Gelfand-Levitan-Marchenko 理论可以对解的唯一性,Steepest descant gradient method 求解的收敛域给予部分结果外,其他问题的唯一性及其 Steepest descant gradient method 求解的收敛域都难以给出理想的结果,有待于进一步研究。另外线性反演公式同时可用于介质参数含有随机扰动成分时,反演参数随机扰动成分的各阶相关函数^[5]。

参考文献

- 1 Shadan K. and Sadatier P. C. Inverse problem in quantum scattering theory. second edited, Springer-Verlage, New York; 1989
- 2 W. Munk et.al. JASA 1994; 96(4): 2327 ~ 2469
- 3 Shang, E.C. Ocean acoustic thermometry and tomography. J. Ocean University of Qindao, 1997; 17(1): 1 ~ 15 (overview)
- 4 G. A. Athanassoulis and E. K. Skarsoulis. JASA, 1995; 97(6): 3575 ~ 3588
- 5 王宁等. 随机介质散射(I)广义 Born 近似反演. 青岛海洋大学学报

有限声束的二阶积累声场

邓明晰 (重庆后勤工程学院物理教研室 重庆·630042)

吕霞付 蔡绍哲 (重庆大学生物工程研究院 重庆·630044)

1 引言

在实际应用中,用于激发声波的换能器辐射面

总是有限宽的,因此,研究有限声束在介质中的声传播性质就具有重要的实际意义^[1]。当有限声束在介

质中传播时,介质的非线性导致有限声束的二次谐波发生。最近 10 余年来,在人们广泛感兴趣的界面非线性声反射问题的研究过程中,最初是将入射与反射声波都作为无限宽的平面波处理,后来又考虑到入射波的宽度影响,得到二阶声波具有横向积累性质的结论,这是界面非线性声反射理论研究的一大进展^[2,3],但在理论分析过程中未考虑到有限声束的衍射特性。鉴于此,本文拟对有限声束传播过程中的二次谐波发生问题进行较全面的探讨。基本方法是:将有限声束分解为一系列平面波,该一系列平面波可视为组成有限声束的部分波,利用二阶微扰方法并结合初始条件,研究这一系列部分波的非线性相互作用,最终得出二次谐波的积累声场表达式。

2 理论

空间有限声束可视为平面波穿过图 1 所示障板上狭缝所引起,声束几何边界用虚线表示。为简便起见,设所研究对象是二维问题,即障板上狭缝无限长,其他有关尺寸见图 1, $z > 0$ 区域为非色散的流体介质。当缝宽尺寸 $2a$ 远大于波长 λ 时,可假设:(1)在障板背面的声场等于零;(2)在狭缝平面上声场就象障板不存在一样。经障板后声束的位移振幅分布函数为^[1]。

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= u_0, & -a < x < a \\ u(x) &= 0, & x > a, z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

可将有限声束(即活塞型声束)分解为一系列平面波。在 Ox 轴上波数分量为 K 的平面波幅度为^[1]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-a}^a u(x) \exp(-jKx) dx \quad (2)$$

由式(1)和(2),得

$$U = u_0 \sin(ka) / k \quad (3)$$

有限声束在 $z > 0$ 区域 (x, z) 处声场为:

$$u(x, z) = \int_{-a}^a U \exp[j(x + \sqrt{K^2 - k^2}z)] dk \quad (4)$$

式(4)中的 K 为声波在液体介质中的波数; $K = \omega/c$, c 为介质声速, ω 为角频率。当 $\omega > K$ 时, U 对应的平面波沿其传播方向具有衰减特性,在传播一定距离之后,这一部分衰减波可不予考虑,故式(4)变为

$$u(x, z) = \int_{-a}^a U \exp[j(x + \sqrt{K^2 - k^2}z)] dk \quad (5)$$

式(5)表明通过障板后平面声束之波阵面变为不均匀。设式(5)中平面波分量 U 的波矢与 Oz 轴夹角为 α (见图 1),存在关系 $k = K \sin \alpha$, 式(5)可变形为:

$$u(x, z) = \int_{-a}^a U \exp[j2 \sin \alpha (x/l) + 2 \cos \alpha \cdot (z/l)] d\alpha \quad (6)$$

其中 U 是波矢与 Oz 轴夹角为 α 的平面波分量,其

$$\text{幅值为: } U = u_0 \sin(2 \sin \alpha \cdot (l/2)) / \tan \alpha \quad (7)$$

考虑式(6)中的任意两个平面波分量(波数都为 K), 其波矢以 K_1 和 K_2 表示。源于介质的体非线性、由任意两个平面波分量相互作用所产生的二阶驱动项之波矢为:

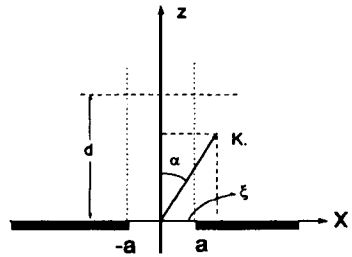
$$K_{1-2} = K_1 + K_2 \quad (8)$$


图 1 对有限声束进行计算所建立的坐标系

一般地, K_{1-2} 之模数并不等于 $2K$, 因此对应的二阶驱动波不发生“共振”,即不具有空间积累性质。通常人们仅对具有积累性质的二次谐波感兴趣,据此,在本文的讨论中,主要考虑式(6)中各个平面波分量的自作用。对于波矢与 Oz 轴夹角为 α 的平面波分量 U , 由于介质是非色散的,其自作用产生的二阶驱动波 $U^{(D)}$ 将发生“共振”,亦即自作用产生的二阶驱动波具有空间积累性质。在平面 $z = 0$ 上的二阶驱动波 $U^{(D)}$ 沿 Ox 轴无积累,由文献[3]可知,二阶驱动波 $U^{(D)}$ 在平行于 $z = 0$ 的平面上是等振幅的。 $U^{(D)}$ 形式上可表示为:

$$U^{(D)} = (1/4)(B/A + 2)K^2 \cdot U^2 \cdot z \quad (9)$$

式(9)中的 B/A 为介质非线性参量,式(9)在形式上满足初始条件。鉴于式(6)中任意两个不同的平面波分量相互作用产生的二阶驱动波不具有积累性质,对于有限声束情形,伴随基波发生的二阶积累波应是式(6)中各个平面波分量自作用产生的二阶积累波的积分,即有

$$u_{(x,z)}^{(D)} = \int_{-a}^a \int_{-a}^a U^2 (B/A + 2) \cdot z/l \cdot U_0^2 / \tan^2 \alpha \cdot \exp[j4 \{ \sin \alpha \cdot (x/l) + \cos \alpha \cdot (z/l) \}] d\alpha \quad (10)$$

至此,伴随有限声束传播所发生的二阶积累波声场在形式上就被完全确定下来。

3 数值分析

对前述所得的有限声束的二阶积累声场式(10)进行数值计算,以对其有关性质进行说明,流体介质以水为例,非线性参量 $B/A = 5.0$, 束宽 $2a = 10$ 。图 2 为有限声束基波和二阶积累波的声场分布灰阶图。

在垂直于声束的横截面上(见图 1), $d=10、20$ 和 30 时的基波、二阶积累波归一化声场分布见图 3。在图 2 和图 3 中, 基波幅度相对于 u_0 , 二阶积累波幅度相对于 u_0^2/l 。

由图 2 可明显看到二阶积累波声场随传播距离的积累性质, 当传播距离增加时, 声束宽度展宽, 二阶声束内的幅度分布显示出较大的复杂性。尽管图 3 (a) 显示出不同截面上基波的归一化声场分布有较大区别, 但相应的二阶积累波归一化声场分布几乎趋于一致。在整个计算过程中, 借助计算机, 由式 (10) 可很方便地得到有限声束的二阶积累声场。

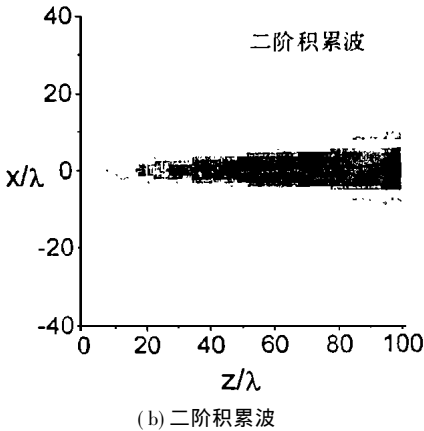
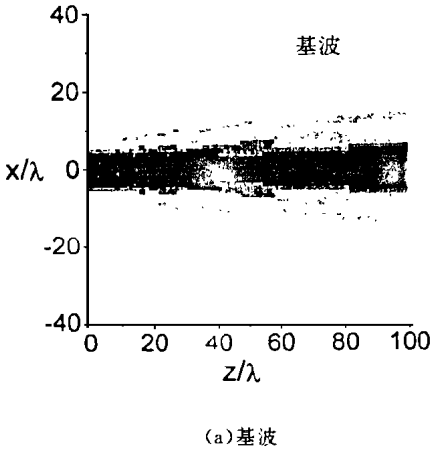
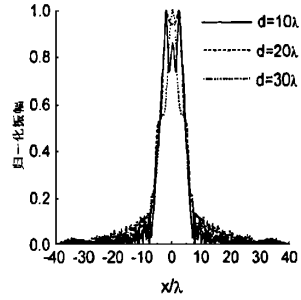
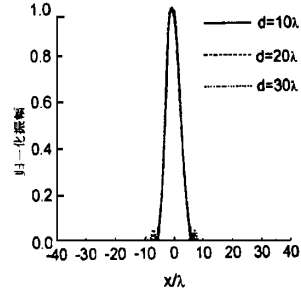


图 2 声场分布灰阶图



(a) 基波



(b) 二阶积累波

图 3 垂直于声束横截面上的归一化声场分布

4 结束语

对有限声束进行傅氏变换, 得到一系列平面波 (将这一系列平面波视为构成有限声束的部分波)。借助于部分波非线性相互作用理论, 得到不同平面波相互作用不产生二阶积累波的结论, 据此可知, 伴随有限声束传播所发生的二阶积累波仅是各个平面波分量非线性自作用的结果。在此基础上, 本文得到的有限声束的二阶积累声场表达式, 其物理实质易于阐明, 计算方便。对于其他种类声束的二次谐波声场研究, 原则上可用类似方法处理。

参考文献

- 1 布列霍夫斯基赫. 分层介质中的波. 第二章. 北京: 科学出版社, 1985 年
- 2 S. Zhou and Y. Shui. J. Appl. Phys, 1992; 72: 5070 ~ 5080
- 3 周盛青. 体声波非线性反射的理论及其应用. 南京大学博士学位论文, 1994: 6