

是 PZT 材料组成的压电陶瓷,中心频率约 36.9kHz。

### 3 实验数据和分析

利用上述实验系统,我们分别对  $\text{LiNbO}_3$  晶体和

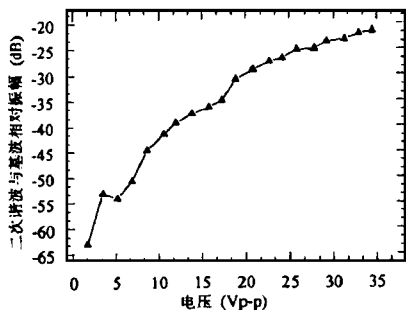


图 4 在不同输入信号电压下电流的二次谐波与基波之比(Langevin 型换能器)

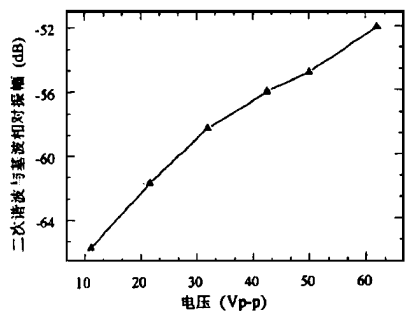


图 5 在不同输入信号电压下电流的二次谐波与基波之比( $\text{LiNbO}_3$  单晶自由振子)

Langevin 型换能器进行了测量,结果如图 4、图 5 所示。由图可见,Langevin 型换能器和  $\text{LiNbO}_3$  晶体的二次谐波都随输入电压而增加,Langevin 型换能器在输入信号电压峰-峰值  $V_{p-p} = 30\text{V}$  左右时,二次谐波与基波之比为  $-20\text{dB}$  左右,与[1]中所给出的结果相似;而  $\text{LiNbO}_3$  晶体处于自由振动状态下,在输入信号  $V_{p-p} = 62\text{V}$  时,二次谐波与基波之比小于  $-52\text{dB}$ 。说明  $\text{LiNbO}_3$  晶体处于自由振动状态下本身的振动非线性比 Langevin 型换能器小得多,由图 4 和图 5 对比可知,在同样的较大输入电压下,可小一个数量级以上。且当输入电压改变时,Langevin 型换能器的共振频率发生偏移现象。 $\text{LiNbO}_3$  晶体这一效应并不明显。当  $\text{LiNbO}_3$  晶体处于换能器工作状态下,在输入电功率为  $20\text{W}$  左右时,二次谐波与基波之比小于  $-65\text{dB}$ ,这说明在一般的测量中,由  $\text{LiNbO}_3$  晶体材料制作的换能器本身振动非线性可以忽略。另外,我们对  $\text{LiNbO}_3$  在自由振子状态下的非线性进行了理论计算,结果和实验相符。

在本工作的材料制备、测试设备及分析过程中得到了姜文华、林靖波、王顺娣等同志的帮助,在此表示感谢。

#### 参考文献

- 1 D. Guyonar, N. Aurelle, C. Richard, P. Gonnard and L. Eyraud. Proc. of Ultrasonics Symposium, 1994; 925 ~ 928

## 多孔介质-弹性固体复合管中轴对称导波<sup>①</sup>

杜光升 王耀俊 袁忆丰 乔文孝<sup>②</sup>

(南京大学声学研究所 近代声学国家重点实验室 南京·210093)

### 1 引言

在管道运输工程中,随着使用时间的增长,管道内部经常结垢,其厚度不断变大,最后有可能导致管道阻塞,而结垢层通常为具有不同孔隙度的一类多孔介质。因此了解管内结垢层的厚度及孔隙度等参数在管道运输工程中倍受人们的关注。声导波检测技术具有快捷、方便和无损等特点,有可能用于管道结垢层的检测中。所以,人们必须知道柱状多孔复合结构中声导波的传播特性。本文的研究目的在于求

得这类复合结构中轴对称导波的相速度与多孔介质层的厚度和孔隙度等参数之间的关系。

### 2 理论

#### 2.1 多孔介质的等效弹性模量

设结垢层这类多孔介质由固体骨架和填满孔隙的流体组成,骨架固体的体变模量、切变模量和密度分别为  $K_m$ 、 $\mu_m$  和  $\rho_m$ ,孔隙内流体的体变模量和密度分别为  $K_f$ 、 $\rho_f$ ,  $\beta$  为孔隙度。按复合媒质简化模型<sup>[1,2]</sup>,多孔介质的等效体变模量  $K_c$ 、等效切变模量

① 国家自然科学基金资助课题

② 通讯地址:石油大学(华东)资源系(山东,257062)

$\mu_e$  和等效密度  $\rho_e$  可分别表示为:

$$K_e = K_m + \frac{\beta(K_i - K_m)}{1 + (1 - \beta)(K_i - K_m)/(K_m + 4\mu_m/3)} \quad (1)$$

$$\mu_e = (-B + \frac{B^2 - AC}{A}); \quad \rho_e = \rho_m(1 - \beta) + \rho_i\beta$$

$$\rho_e = \rho_m(1 - \beta) + \rho_i\beta$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } A = & -8(4 - 5\nu_m)\eta_1\beta^{10/3} + 2(63\eta_2 - 2\eta_1\eta_3)\beta^{7/3} \\ & - 252\eta_2\beta^{5/3} + 25(7 - 12\nu_m + 8\nu_m^2)\eta_2\beta + 4(7 \\ & - 10\nu_m)\eta_2\eta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & 2(1 - 5\nu_m)\eta_1\beta^{10/3} - 2(63\eta_2 - 2\eta_1\eta_3)\beta^{7/3} \\ & + 252\eta_2\beta^{5/3} - 75(3 - \nu_m)\eta_2\nu_m\beta \\ & + (3/2)(15\nu_m - 7)\eta_2\eta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & 4(7 - 5\nu_m)\eta_1\beta^{10/3} + 2(63\eta_2 - 2\eta_1\eta_3)\beta^{7/3} \\ & - 252\eta_2\beta^{5/3} + 25(7 - \nu_m^2)\eta_2\beta - (7 + 5\nu_m)\eta_2\eta_3 \end{aligned}$$

而  $\eta_1 = -(49 - 25\nu_m) + 35(1 - \nu_m)$ ,  $\eta_2 = 8$ ,  $\eta_3 = 7 - 5\nu_m$ ,  $\nu_m$  为骨架固体的泊松比。图 1 给出  $K_e/K_m$  和  $\mu_e/\mu_m$  随  $\beta$  的变化曲线。计算中取骨架固体的纵、横波波速和密度分别为  $V_p = 3.46\text{km/s}$ ,  $V_s = 2.00\text{km/s}$  和  $\rho = 2000\text{kg/m}^3$ 。由图 1 知  $K_e/K_m$  和  $\mu_e/\mu_m$  均随  $\beta$  的增加而减小。

## 2.2 双层柱状复合结构中的轴对称导波

设一双层复合管的内层介质为多孔介质(记为媒质 2), 外层为均匀各向同性固体(记为媒质 3), 管腔内部充以流体, 忽略复合管外部环境的影响, 并设外界面为自由界面。各层媒质半径分别为  $R_1, R_2$  和  $R_3$ 。假设声波沿轴向传播。用  $\phi$  表示流体 1 中的标量势,  $\Phi, \Psi_i (i = 2, 3)$  分别表示固体媒质 2、3 中的标量势和矢量势。对于轴对称声导波模式, 只需考虑矢量势函数的  $\theta$  分量(以  $\psi_i$  表示)。流体和固体中的势函数都应满足波动方程:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{V_{p1}^2 \partial t^2} \quad (2)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{V_{pi}^2 \partial t^2}; \quad \nabla^2 \Psi_i = \frac{\partial^2 \Psi_i}{V_{si}^2 \partial t^2} (i = 2, 3) \quad (3)$$

其中  $V_{pi}, V_{si} (i = 2, 3)$  分别表示固体媒质 2、3 中纵波和横波波速(媒质 2 中纵波和横波波速必须由  $K_e, \mu_e$  和  $\rho_e$  计算),  $V_{p1}$  为流体中声波波速,  $\nabla^2$  为 Laplace 算符。注意到轴对称导波模式的势函数与变量  $\theta$  无关, 方程(2)和(3)的通解可写为<sup>[3,4,5]</sup>:

$$\phi = B_1 Z_0(\bar{\alpha}_i r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (4)$$

$$\phi_i = [A_i W_0(\bar{\alpha}_i r) + B_i Z_0(\bar{\alpha}_i r)] e^{i(kz - \omega t)} (i = 2, 3)$$

$$\Psi_i = [C_i W_1(\bar{\alpha}_i r) + D_i Z_1(\bar{\alpha}_i r)] e^{i(kz - \omega t)} \quad (5)$$

其中  $\bar{\alpha}_{i1} = \sqrt{k^2 - \omega^2/V_{p1}^2}$ ,  $\bar{\alpha}_{i2} = \sqrt{k^2 - \omega^2/V_{s2}^2}$ ,  $k = \omega/c_e$ ,  $c_e$  为沿轴向传播的声导波的相速度,  $\omega$  为声波的角频率,  $B_1, A_i, B_i, C_i, D_i (i = 2, 3)$  为待定常数, 而

$W_n, Z_n (n = 0, 1)$  由下式给出:

$$W_n(\bar{\alpha}_i r) = \begin{cases} K_n(\bar{\alpha}_i r); & c_e < V_{ji} \\ Y_n(\bar{\alpha}_i r); & c_e > V_{ji} \end{cases} \quad (6)$$

$$Z_n(\bar{\alpha}_i r) = \begin{cases} I_n(\bar{\alpha}_i r); & c_e < V_{ji} \\ J_n(\bar{\alpha}_i r); & c_e > V_{ji} \end{cases}$$

其中  $J_n, Y_n$  分别为第一类、第二类  $n$  阶贝塞耳函数,  $I_n, K_n$  分别为第一类、第二类  $n$  阶变型贝塞耳函数(上式中  $j = p, i = 1, 2, 3; j = s, i = 2, 3$ )。

根据势函数与固体和流体媒质中的位移和应力(压强)之间的关系, 可写出各层固体和流体媒质中位移和应力分量(或压强)的表达式。本问题的边界条件为:  $r = R_1$  处法向位移和法向应力(流体中为压强负值)分别连续, 而轴向应力为零;  $r = R_2$  处法向位移、切向位移、法向应力、切向应力均连续;  $r = R_3$  处法向应力和轴向应力均为零。利用这些边界条件, 可得  $B_1, A_i, B_i, C_i$  和  $D_i$  为未知数的齐次线性方程组。要使此线性方程组有非零解, 其系数行列式必须为零, (为节省篇幅, 略去矩阵元  $b_{ij}$  的具体公式。)即

$$|b_{ij}|_{9 \times 9} = 0 \quad (7)$$

式(7)即为双层复合管(腔内充以流体)中轴对称声导波的广义色散方程。用数值方法解该方程便可得双层复合管中轴对称声导波的相速度与频率之间的关系(即色散曲线)。

较为简单的柱状复合结构中轴对称导波模式的色散方程可以从式(7)简化而得。例如: 令腔内流体的密度趋近于零, 式(7)便变为腔壁为自由界面时双层复合管中轴对称声导波的色散方程; 令  $R_1 = 0$  可得双层复合棒中轴对称声导波的色散方程。很显然, 当  $R_1 = R_2$  时, 式(7)变为单层管中的轴对称声导波的色散方程; 当  $R_1 = 0, R_2 = R_1$  时, 式(7)变为均匀棒中的轴对称声导波的色散方程。

## 3 数值计算结果

为了具体考察结垢层对双层复合管中轴对称声导波的影响, 我们首先数值计算了双层复合管(腔壁为自由界面或腔内充以水)中轴对称导波的色散曲线。计算结果如图 2 所示。数值计算时, 所取的固体和流体的弹性参数见表 1, 复合结构径向线度为:  $R_1 = 7\text{cm}, R_2 = 8\text{cm}, R_3 = 8.5\text{cm}$ 。

表 1 固体和流体参数表

	纵波波速 (km/s)	横波波速 (km/s)	密度 (kg/m <sup>3</sup> )
钢	5.90	3.29	7800
结垢层骨架	3.46	2.00	2000
水	1.50	...	1000

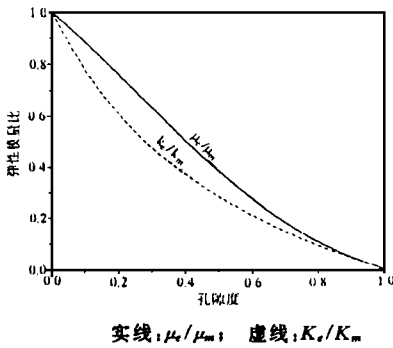
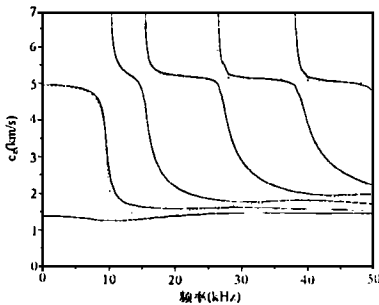


图1 多孔介质的  $K_e/K_m$  和  $\mu_e/\mu_m$  与  $\beta$  之间的关系。

由图2可以看出: (1)腔内充水时,复合管中存在相速度低于水中声速的轴对称导波模式(称为低阶  $S_0$  模式),而腔壁为自由界面时不存在该导波模式,表明  $S_0$  轴对称导波模式与腔内流体的性质密切相关; (2)当腔壁为自由界面时,双层复合管中轴对称声导波模式比较简单( $f < 50\text{kHz}$  时仅存在一种高阶模式),而腔内充水时,在相同的频率范围内,存在较多的高阶轴对称声导波模式,并且高阶轴对称导波模式都存在截止频率; (3)小于第一高阶模式( $S_2$ )截止频率时,对腔内充水的复合管,存在2种低阶模式,对腔壁为自由界面的复合管,仅存在一种低阶模式,它们的相速度与管内结垢层的弹性参数、孔隙度和线度密切相关,这说明低频轴对称导波模式对管内结垢层的声学检测可能非常有用。



虚线:腔壁为自由界面; 实线:腔内充水

图2 双层柱壳中轴对称导波的色散曲线

为了解结垢层厚度和孔隙度对导波速度的影响,我们数值计算了双层复合管(内层为多孔介质,内壁为自由界面)中低阶轴对称导波模式  $S_1$  的相速度与多孔介质层厚度和孔隙度  $\beta$  之间的关系。计算时设外壳层的内外半径不变( $R_2 = 8\text{cm}$ ,  $R_3 = 8.5\text{cm}$ ),取声波的频率为  $5\text{kHz}$ 。计算结果如图3、4所示。计算时仍取表1中的参数。由图3可以看出,当管内结垢层的厚度增加时,复合管中  $S_1$  轴对称导

波模式相速度减小。图4表明,复合管中  $S_1$  轴对称导波模式相速度随结垢层的孔隙度增大而升高。

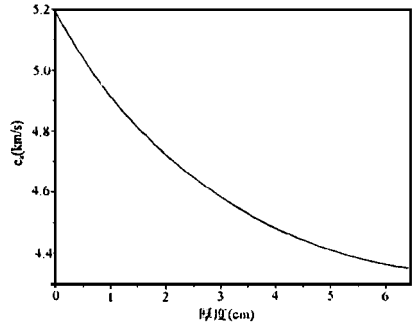


图3 轴对称导波模式  $S_1$  相速度与结垢层厚度之间的关系(取结垢层孔隙度  $\beta = 0.2$ )

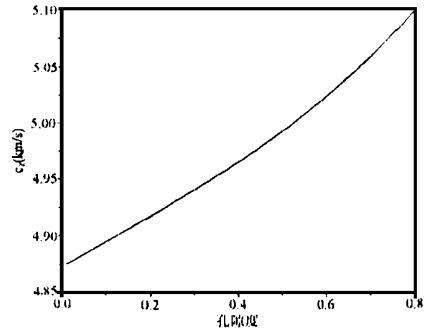


图4 轴对称导波模式  $S_1$  相速度与结垢层孔隙度之间的关系(取  $R_1 = 7\text{cm}$ )

## 4 结束语

本文的研究表明,多孔介质-弹性固体复合管中低阶轴对称导波的相速度与多孔介质层厚度和孔隙度密切相关。因此,有可能通过测量低阶轴对称声导波模式的相速度,了解管道中结垢情况。但是,本文的结果是初步的,因为我们没有考虑孔隙内流体与腔体中流体的相互作用。利用 Biot-Stoll 多孔介质理论<sup>[6,7]</sup>,考虑多孔介质与腔体中流体之间的边界条件,研究这类复合结构中声导波传播特性,将是我們下一步的工作。

## 参考文献

- 1 R. M. Christensen. Mechanics of Composite Materials. John Wiley & Sons Inc., 1979: 47
- 2 王耀俊. 物理学报, 1992; 41: 37 ~ 45
- 3 A. E. Armenakas. AIAA Journal, 1967; 5: 740 ~ 744.
- 4 L. Dwyann Lafleur, F. Douglas Shields. J. Acoust. Soc. Am., 1995; 97: 1435 ~ 14545
- 5 J. Lai et al. J. A. S. A., 1971; 49: 220 ~ 228
- 6 R. D. Stoll. Acoustic waves in saturated sediments. Physics of sound in marine sediment, edited by Loyd-Hampton, 1974; 19 ~ 39
- 7 R. D. Stoll. J. A. S. A., 1979; 68: 1150 ~ 1160