

- 1 G. L. Lamb. Elements of Soliton Theory, John Wiley. New York, 1982
- 2 H. Ono, J. Phys. Soc. Japan, 1972; 32: 332; 1974; 37: 882
- 3 H. Ono, J. Phys. Soc. Japan, 1992; 61: 4336 ~ 4343
- 4 W. S. Duan, B. R. Wang and R. J. Wei. J. Phys. Soc. Jpn. 1996; 65: 501
- 5 J. F. Paquerot and M. Remoissenet. Physics Letter A 1994; 194: 77 ~ 82
- 6 W. S. Duan, B. R. Wang and R. J. Wei. Phys. Rev. E, 1997; 55: 1773 ~ 1778
- 7 W. S. Duan, B. R. Wang and R. J. Wei. Physics Letters A, 1997; 224: 154 ~ 158

$$\omega^2 = k^2 / (1 + k^2) \quad (9)$$

$$V = (k'/k) / (1 + k^2)^2 \quad (10)$$

我们作如下的变换

$$A^{(1,0)} = \frac{2E}{G} \cdot Z \quad (11)$$

$$r = - [H / 2E] T \quad (12)$$

就可以得到 NLS 型的方程

$$iZ_r + \frac{1}{2}Z + Z Z^* + \left[ \ln \left( \frac{E^2 h_0^3}{2 \cdot 2 \cdot \rho R_0} \right) / T \right] Z = 0 \quad (13)$$

如果此方程的最后一项为零,它就变为了著名的非线性 Schrodinger 方程。而当它的最后一项不为零时,它将有 NLS 型的孤子,但是它的振幅与传播速度将随传播的距离而有所改变。

## 参量激励孤子的相互作用问题

王新龙

(南京大学声学研究所 南京 · 210093)

### 1 引言

最新的研究表明,不同物理媒质中的很多非线性共振现象均可由以下带阻尼的参量驱动非线性 Schrodinger (PDNLS) 方程来描述<sup>[1]</sup>

$$i(\partial_t + \partial_x) + \alpha x + (\partial_x^2 + \beta) + \gamma^* = 0 \quad (1)$$

这些现象包括流体力学中的经典 Faraday 共振<sup>[2]</sup>、非线性晶格中的局域化结构<sup>[3]</sup>、颗粒物质中的自局域化结构<sup>[4]</sup>、铁磁和抗铁磁介质中旋波的参量生成<sup>[5]</sup>,等等。众所周知,在 Faraday 长水槽实验中,适当的外部垂直激励会形成所谓的非传播孤子<sup>[6]</sup>。这是一种横波在纵向的非线性局域化调制波包。特别令人感兴趣的是,在一定驱动条件下双孤子会发生类似于经典振子的相互作用<sup>[7]</sup>。这种现象在已知的孤子系统(如 KdV、NLS 和 Sine-Gordon)中是不存在的。Miles<sup>[2]</sup>曾导出了支配水槽孤子的非线性演化方程,即 PDNLS 方程(1)。该方程存在一个稳态的单孤子解。它很好地解释了最早所观察到的单孤子现象<sup>[6]</sup>,但我们要问:(1)这些现象是水槽孤子所特有的?还是具有一定的物理普遍性?(2)PDNLS 方程能否解

释我们所观察到的双孤子现象?

### 2 实验简介

设水槽的长度为  $l$ 、宽度  $b$ 、水深  $h_0$ 。槽在垂直方向因受驱动而作简谐运动:  $z_0 = A \cos(4 \cdot t)$ 。水槽中的两个孤子具有完全相同的强度,但它们的垂直振动的相位既可以相同,也可以相反,即所谓的同极性和反极性<sup>[6]</sup>。这一特点非常类似于正负电子。但是,它们的相互作用行为却正好与电子的相反:同相孤子是相互吸引的,而反相孤子则是相互排斥的,不仅仅如此,孤子的相互作用还有更多有趣的特性。

同相孤子的相互作用最早是由吴君汝观察到的<sup>[6]</sup>。我们最近对这一过程作了更为深入细致的观测<sup>[8]</sup>。我们的结果可以总结为以下几点。(1)在适当的驱动振幅  $A$  和频率  $f$  下,孤子之间将发生周期性的吸引、碰撞和分离。图 1(a) 是  $l \times b \times h = 20 \times 3 \times 2 \text{ cm}^3$ 、 $A = 0.6 \text{ mm}$  和  $f = 4.85 \text{ Hz}$  时双孤子的相互作用过程。(2)这种作用仅存在于一定的驱动参数范围内。(3)在稳定区的下界双孤子将退化成单孤子,而在上界孤子的纵向运动十分微弱,几乎是不动的。

由于排斥力的存在,两个反相孤子排斥到一段距离后在纵向将几乎保持不动<sup>[6,8]</sup>。但我们的实验发现<sup>[9,10]</sup>,只有槽长和参数选取适当,两个反相孤子之间可以存在复杂而有趣的相互作用和运动。图 1(b) 是  $l \times b \times h = 20 \times 3 \times 2 \text{ cm}^3$ 、 $A = 0.8842 \text{ mm}$  和  $f = 4.85 \text{ Hz}$  时反相孤子的相互作用过程。同样,反相孤子的运动是有一定的驱动参数范围的。我们看到,孤子的振荡在纵向保持同步。进一步的实验还发现,槽长对反相孤子的相互作用影响尤其于对同相孤子的影响。例如,当  $l = 40 \text{ cm}$  时,反相孤子的同步振荡表现为沿槽中心是对称的<sup>[9,10]</sup>。

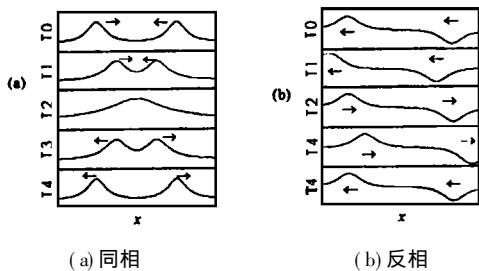


图 1 孤子的相互作用示意图

### 3 数值模拟

由于 PDNLS 方程在数学上具有不可积性。人们一直无法得到严格的双孤子解析解,那么它到底能否描述上述双孤子现象呢?在此,我们试图通过数值模拟来解决这一问题。我们利用有限差分格式来解方程(1),同时引入刚性边界条件。计算误差限制在  $10^{-6}$  范围内,图 2 是针对图 1 两种情形的直接数值模拟结果,其中阻尼系数分别取  $\gamma = 0.47$  和  $0.5892$ 。可以看出,数值结果完全再现了实验观察。这表明 PDNLS 方程确实能够描述双孤子现象的。

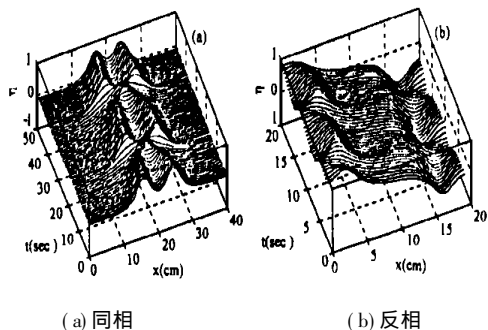


图 2 双孤子相互作用的数值模拟( $\gamma = \text{Im}(\dots)$ )

我们还对各种情形下孤子的稳定区进行了计算。作为例子,图 3 给出了同相双孤子的稳定区<sup>[11]</sup>,其中区域 A 是孤子发生周期批准的参数区域,而在声学技术

区域 B 内孤子在纵向基本上保持静止。

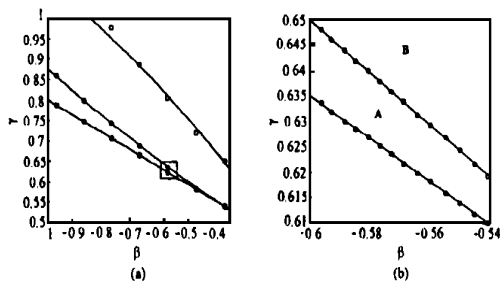


图 3 同相双孤子的稳定区(右图(b)是左图(a)小方块的放大)

大量计算还表明,同相孤子相互作用的基本形式几乎与槽长无关,这说明这一孤子对其相互作用形式是 PDNLS 方程所固有的本征态<sup>[10-11]</sup>。我们认为,实验中所观测到的孤子相互作用对槽长的依赖性源于槽中纵波的强烈影响。与此相对照,槽长对反相孤子的相互作用却有着极大的影响<sup>[10]</sup>。这说明反相孤子的同步振荡现象是孤子-孤子以及孤子-边界共同作用的结果。

### 4 结论

上述工作表明,PDNLS 方程是完全能描述水槽中孤子-孤子的相互作用现象的。既然如此,我们可以肯定,这类现象并非是垂直振动水槽中所特有的,而具有物理普遍性。它们也应该存在于由同一方程所描述的其它非线性共振系统中<sup>[1]</sup>。

另一方面,尽管形式上 PDNLS 方程是 NLS 方程在有阻尼有驱动情况下的直接推广,但我们看到,参量激励孤子在很多方面的表现和特性是不同于标准 NLS 孤子的。例如,同相双孤子构成了一种稳定的束缚态,而 NLS 方程的束缚态是不稳定的。因此,我们认为参量激励孤子既是一种物理孤子,又是一种新型孤子。

#### 参考文献

- 1 M. Bondial, I. V. Barashenkov, and M. M. Bogdan, *Physica D*, 1995; 87: 314 ~ 320
- 2 J. W. Miles, *J. Fluid. Mech.* 1984; 148: 451
- 3 B. Denardo et al. *Phys. Rev. Lett.*, 1992; 68: 1730 ~ 1733
- 4 W. Z. Chen, *Phys. Lett. A*, 1995; 196: 321 ~ 324
- 5 I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, and V. I. Korobov, *Europhys. Lett.*, 1991; 15: 113
- 6 J. Wu, R. Keolian, and I. Rudnick. *Phys. Rev. Lett.*, 1984; 52: 1421 ~ 1424
- 7 X. L. Wang and R. J. Wei, *Phys. Lett A*, 1994;

8 J. R. Yan, X. H. Yan, J. Q. You and J. X. Zhong, Phys. Fluid A 1993; 1651

9 X. L. Wang and R. J. Wei, Phys. Lett. A, 1997; 227: 55 ~ 60

10 X. L. Wang and R. J. Wei, Phys. Rev. Lett. 1997; 78(14): 2744 ~ 2747

11 X. L. Wang, Chin. Phys. Lett 1997; 14(2): 109 ~ 112

# 表面张力对强迫非传播孤子影响的理论分析

缪国庆 魏荣爵

(南京大学声学研究所 近代声学国家重点实验室 南京 · 210093)

由吴君汝<sup>[1]</sup>于1984年在矩形小水槽中发现的强迫非传播孤子,多年来一直为许多学者所重视,由于水表面波孤子形象直观,对它研究的意义已不仅在于水波孤子本身,也为许多领域出现的孤子现象的共性研究提供了一个简单直观的模型, Miles, Larraza 和 Putterman<sup>[2]</sup>首先建立了孤子的基本理论,1990年 Denardo<sup>[3]</sup>发现了纽结孤子。孤子的动力学行为、双孤子及多孤子的相互作用性质等也正在为人们所揭示<sup>[4]</sup>,本文所研究的是早已为人们注意但尚未完全解决的一个基本问题,即表面张力对孤子的影响。实验表明表面张力对孤子的形成及其稳定性具有一定影响, Miles 等<sup>[2]</sup>及国内一些学者<sup>[5]</sup>在理论研究中也注意到表面张力的影响,现有理论研究的基本结果是描述孤子演化的修正的非线性薛定谔方程(NLS)

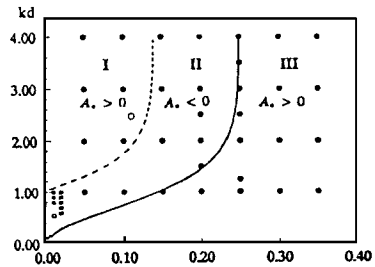
$$i(r_t + r) + B \cdot r_{xx} + (A + A \cdot r^2)r + r^* = 0 \quad (1)$$

式中  $r$  为孤子复振幅,  $r^*$  为复共扼, 非线性项系数  $A$  决定着方程解的性质, 当  $A > 0$  时, 方程具有 sech 型呼吸孤子解, 当  $A < 0$  时, 方程具有 tanh 型纽结孤子解, 计及表面张力的影响, 已有理论给出

$$A = \frac{1}{2} [1 + (1 - T^2)^2 + \frac{1}{2}(1 + 4)^{-1}(1 + T^2)^2 - \frac{1}{4}(T^2 - 4)^{-1}(3 - T^2)^2] + \frac{9}{8} T^2 \quad (2)$$

其中  $T = \tanh kd$ ,  $k = \omega / g$ , 而  $k = \omega / b$ , 为水的表面张力系数,  $d$  为静止水深,  $b$  为水槽宽度,  $\omega$  为水的密度,  $g$  为重力加速度, 图 1 给出在  $kd$ - $A$  参数平面上  $A$  的相图, 由图可见, 在 I 和 II 区域,  $A > 0$ , (1) 式具有呼吸孤子解, 而在 III 区域,  $A < 0$ , (1) 式具有纽结孤子解。在文献<sup>[6]</sup>中已经报导了我们的实验结果

与现有理论的差异(图 1 中同时标出我们及吴君汝、Denardo 的实验结果), 本文试图从理论上作进一步的研究, 根据我们的实验参数, 计算表明, 表面张力位能仅为表面位移位能的 5% 左右, 因此我们将表面张力只作为一个高阶小量进入水波方程组, 从而给出与实验相符的结果。



“ I ”: 呼吸型孤子, “ II ”: 纽结型孤子, “ III ”: 吴君汝的呼吸型孤子, “ ”: Denardo 的纽结型孤子 S

图 1  $kd$ - $A^*$  平面上  $A^*$  的相图及实验测量的孤子分布

设水槽长  $2L$ , 宽  $b$ , 水深  $d$ , 取固着于水槽的坐标系, 描述水波的基本方程是

$$\Delta^2 \phi = 0, \quad \phi = -d \quad z \quad (3)$$

$$x = 0, \quad x = \pm L \quad (4)$$

$$y = 0, \quad y = 0, b \quad (5)$$

$$z = 0, \quad z = -d \quad (6)$$

$$z = z_0 + x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad z = (x, y, t) \quad (7)$$

$$z_0 + (g + z_0) + (\frac{g}{x^2} + \frac{g}{y^2} + \frac{g}{z_0^2}) / 2 = \frac{-\alpha x (1 + \frac{z_0}{y}) + \alpha y (1 + \frac{z_0}{x}) - 2 \alpha y \frac{xy}{y}}{(1 + \frac{z_0}{x} + \frac{z_0}{y})^{3/2}}, \quad (8)$$

其中,  $z_0 = \omega \cos 2 \omega t$ , 为施于水槽的垂直驱动,  $z_0$  为加速度, 将动力学边界条件在  $z = 0$  展开至三级小量, 并设  $z_0 = 0(2)$ ,  $l = 0(1)$ , 根据实验, 考虑只在槽宽