

# 表面张力对强迫非传播孤子影响的理论分析

缪国庆 魏荣爵

(南京大学声学研究所 近代声学国家重点实验室 南京 · 210093)

由吴君汝<sup>[1]</sup>于1984年在矩形小水槽中发现的强迫非传播孤子,多年来一直为许多学者所重视,由于水表面波孤子形象直观,对它研究的意义已不仅在于水波孤子本身,也为许多领域出现的孤子现象的共性研究提供了一个简单直观的模型, Miles, Larraza 和 Putterman<sup>[2]</sup>首先建立了孤子的基本理论,1990年 Denardo<sup>[3]</sup>发现了纽结孤子。孤子的动力学行为、双孤子及多孤子的相互作用性质等也正在为人们所揭示<sup>[4]</sup>,本文所研究的是早已为人们注意但尚未完全解决的一个基本问题,即表面张力对孤子的影响。实验表明表面张力对孤子的形成及其稳定性具有一定影响, Miles 等<sup>[2]</sup>及国内一些学者<sup>[5]</sup>在理论研究中也注意到表面张力的影响,现有理论研究的基本结果是描述孤子演化的修正的非线性薛定谔方程(NLS)

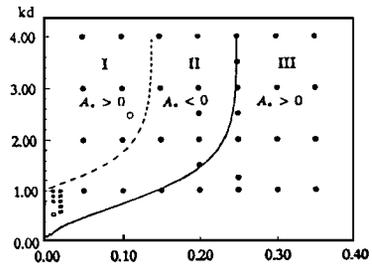
$$i(r_t + \delta r) + B^* r_{xx} + (\beta^* + A^* r^2)r + \gamma^* r^* = 0 \quad (1)$$

式中  $r$  为孤子复振幅,  $r^*$  为复共扼,非线性项系数  $A^*$  决定着方程解的性质,当  $A^* > 0$  时,方程具有 sech 型呼吸孤子解,当  $A^* < 0$  时,方程具有 tanh 型纽结孤子解,计及表面张力的影响,已有理论给出

$$A^* = \frac{1}{2} [1 + (1 - T^2)^2 + \frac{1}{2} (1 + 4\sigma)^{-1} (1 + T^2)^2 - \frac{1}{4} (T^2 - 4\sigma)^{-1} (3 - T^2)^2] + \frac{9}{8} \sigma T^2 \quad (2)$$

其中  $T = \tanh kd$ ,  $\sigma = \alpha k^2 / \rho g$ , 而  $k = \pi / b$ ,  $\alpha$  为水的表面张力系数,  $d$  为静止水深,  $b$  为水槽宽度,  $\rho$  为水的密度,  $g$  为重力加速度,图1给出在  $kd - \sigma$  参数平面上  $A^*$  的相图,由图可见,在 I 和 II 区域,  $A^* > 0$ , (1) 式具有呼吸孤子解,而在 III 区域,  $A^* < 0$ , (1) 式具有纽结孤子解。在文献<sup>[6]</sup>中已经报导了我们的实验结果

与现有理论的差异(图1中同时标出我们及吴君汝、Denardo 的实验结果),本文试图从理论上作进一步的研究,根据我们的实验参数,计算表明,表面张力位能仅为表面位移位能的5%左右,因此我们将表面张力只作为一个高阶小量进入水波方程组,从而给出与实验相符的结果。



“ I ”:呼吸型孤子, “ II ”:纽结型孤子, “ III ”:吴君汝的呼吸型孤子, “ Denardo ”:Denardo 的纽结型孤子 S

图1  $kd - \sigma$  平面上  $A^*$  的相图及实验测量的孤子分布

设水槽长  $2L$ , 宽  $b$ , 水深  $d$ , 取固着于水槽的坐标系,描述水波的基本方程是

$$\dot{\psi}^2 \Phi_z = 0, \quad -d \leq z \leq \eta \quad (3)$$

$$\Phi_x = 0, \quad x = \pm L \quad (4)$$

$$\Phi_y = 0, \quad y = 0, b \quad (5)$$

$$\Phi_z = 0, \quad z = -d \quad (6)$$

$$\Phi_z = \eta_x + \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y, \quad z = \eta(x, y, t) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \Phi_x + (g + z^{\circ\circ}) \eta_x + (\Phi_x + \Phi_y + \Phi_z) / 2 \\ & = \frac{\alpha \eta_{xx} (1 + \eta_x^2) + \eta_{yy} (1 + \eta_y^2) - 2\eta_x \eta_y \eta_{xy}}{\rho (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{3/2}}, \\ & z = \eta(x, y, t) \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $z^{\circ\circ} = \alpha \cos 2\omega t$ , 为施于水槽的垂直驱动,  $z^{\circ\circ}$  为加速度,将动力学边界条件在  $z = 0$  展开至三级小量,并设  $z^{\circ\circ} = 0(\epsilon^2)$ ,  $\alpha \rho = 0(\epsilon)$ , 根据实验,考虑只在槽宽

方向即只有(0, 1)模激发, 而认为孤子是(0, 1)模的纵向调制, 引入多尺度变量

$$x_j = \epsilon^j x, \quad t_j = \epsilon^j t \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (9)$$

并将  $\phi$  及  $\eta$  作微扰展开

$$\phi = \sum_{n=1} \epsilon^n \phi_n, \quad \eta = \sum_{n=1} \epsilon^n \eta_n \quad (10)$$

我们将得到各阶近似的线性化边值问题, 相继求解这些边值问题, 我们将得到各阶近似解, 一阶解为

$$\phi_1 = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} [r(Z+Y) + c.c.] \quad (11)$$

$$\eta_1 = (i\omega/g) [r(Z+Y) - c.c.] \quad (12)$$

其中,  $Z = e^{i(ky - \omega)}$ ,  $Y = e^{-i(ky + \omega)}$

$$\omega^2 = gkT \quad (13)$$

$c.c.$  代表复共轭,  $r$  为慢变量  $x_1, x_2, t_1, t_2, \dots$  的函数, 二阶问题中消除一次谐波久期项的条件为<sup>[7]</sup>

$$2ir_{11} - \sigma\omega = 0 \quad (14)$$

三阶一次谐波的可解性条件为与(1)形式完全相同的方程, 为(0, 1)模的振幅即孤子的演化方程, 此处方程的相应系数为

$$A = \frac{k^3}{4gT(1 + \sigma/4)} (6T^4 - 5T^2 + 16 - 9T^{-2}) \quad (17)$$

$$B = \frac{1}{4k^2(1 + \sigma/4)}, \quad \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega^2}$$

$$Y = \alpha_0 \alpha_0 / g(1 + \sigma/4) \quad (18)$$

因  $\sigma > 0$ , 故  $\sigma$  的出现并不影响  $A$  的符号, 只使  $A$  的数值变小。图 2 为  $kd-\sigma$  平面上  $A$  的相图, 可见, 当  $kd > 1.022$  时,  $A > 0$ , 当  $kd < 1.022$  时,  $A < 0$ 。

当  $A > 0$  时, 方程(1)具有呼吸孤子解

$$r = \frac{(2/A) \left( \overline{Y^2 - \delta^2 - \beta} \right)}{e^{i\psi} \operatorname{sech} \left[ (1/B) \left( \overline{Y^2 - \delta^2 - \beta} \right) x \right]} \quad (19)$$

而当  $A < 0$ , 方程(1)具有纽结孤子解

$$r = \frac{(1/A) \left( \overline{Y^2 - \delta^2 - \beta} \right) e^{i\psi}}{\tanh \left[ (1/2B) \left( \overline{Y^2 - \delta^2 - \beta} \right) x \right]} \quad (20)$$

其中  $\psi = (\pi/2) - (1/2) \cdot \sin^{-1}(\delta/Y)$ , 同时亦将我们及吴君汝、Denardo 的实验结果标在图 2 中, 可见实验与理论相图符合很好, 这说明表面张力对  $kd-\sigma$  平

面上孤子的分布没有影响, 但从(19)(20)两式可见, 欲孤子高度、宽度为实数, 要求  $Y^2 > \delta^2$ , 即  $\alpha > g(1 + \sigma/4) \delta / \omega_0^2$ , 这表明驱动必须足够大, 方能克服阻尼产生孤子, 还表明, 增加表面张力, 要求驱动也要相应增加, 这是可以理解的, 表面张力作为恢复力, 它将阻止孤子振幅的增加。

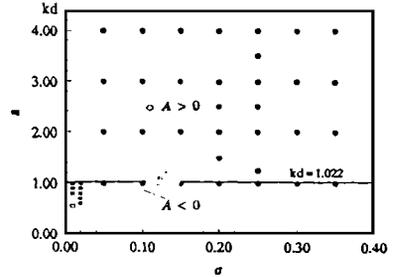


图 2  $kd-\sigma$  平面上  $A$  的相图及与图 1 中相同的实验测量的孤子分布(符号与图 1 中相同)

本文工作得到国家自然科学基金的资助。

#### 参考文献

- 1 Junru Wu, Robert Keolian, and Isadore Rudnick. Phys. Rev. Lett. 1984; 52(16): 1421 ~ 1424
- 2 John. W. Miles, J. Fluid Mech. 1984; 148: 451 ~ 460; A. Larraza, S. Putterman, J. Fluid Mech., 1984; 148: 443 ~ 449
- 3 Bruce Denardo, William Wright, and Seth Putterman. Phys. Rev. Lett. 1990; 64(13): 1518 ~ 1521
- 4 Xinlong Wang and Rongjue Wei. Phys. Rev. Lett. 1997; 78(14): 2744 ~ 2747; Rongjue Wei, Benren Wang, Yi Mao, Xiaoyu Zheng, and Guoqing Miao, J. Acoust. Soc. Am., 1990; 88(1): 469 ~ 472
- 5 周显初, 崔洪农. 中国科学, A 辑, 1992; (12): 1269 ~ 1276; 黄国强, 颜家壬, 戴显喜. 物理学报, 1990; 39(8): 1234 ~ 1242
- 6 Guoqing Miao, Rongjue Wei. Phys. Lett. A, 1996; 220(1~3): 87 ~ 90
- 7 梅强中. 水波动力学. 科学出版社, 1984; 331 ~ 342