

应用三次 B 样条函数插值的边界元法计算结构振动声辐射问题*

张胜勇 陈心昭

(合肥工业大学 合肥 · 230009)

本文通过在边界元方法中采用三次 B 样条函数作为插值形函数, 对结构振动声辐射的计算进行了研究。并以脉动球作为算例, 对其辐射声场中的有关声场参数进行了计算。通过将计算结果与理论解进行比较, 结果表明: 即使在边界剖分比较粗的情况下, 利用该方法计算结构振动声辐射问题在较宽的振动频率范围内, 也能给出良好的计算精度。

关键词: 声辐射, 边界元方法, B 样条函数。

Calculation on the acoustic radiation problem caused by vibrating body by boundary element method using cubic b-spline interpolating function

ZHANG Shengyong CHEN Xinzhaoh

(Hefei University of Technology, Hefei · 230009)

In this paper, a study of the calculation on the acoustic radiation problem caused by vibrating body is presented, based on the boundary element method using cubic B-spline interpolating function. Taking a pulsating sphere as an example, some parameters in its sound field are calculated. The conclusion from the comparison between the calculating results and the analytic solutions shows that the calculating precision is satisfied in a wide range of vibrating frequencies by the method proposed here for the acoustic radiation problem caused by vibrating body, in spite of the coarse division of the boundary surface.

Key words: acoustic radiation, BEM, B-spline function

1 前言

随着科学技术的发展, 控制噪声污染已成为环境保护的重要内容。如果在结构的设计阶段就能够计算出辐射噪声的大小, 那么, 就可以进行低噪声优化设计, 以期最大限度地降低结构振动引起的噪声。

但是, 对于大多数工程实际问题, 结构振动引起的声辐射无法用解析解的形式予以解

决, 因而利用各种数值方法求解结构振动声辐射就成为人们解决这类工程问题的主要方法。边界元方法由于具有降维、适应无限域问题等特点, 因而成为解决结构振动声辐射问题的一种有效的方法。在振动体表面振动速度已知的情况下, 利用 Helmholtz 方程, 通过对振动体边界表面的剖分、插值、数值求积等的处理运算, 就可以计算出振动体辐射声场中的声场参数(如声场中某一点的声压、媒质

* 本课题为国家自然科学基金资助课题

第一作者: 张胜勇, 男, 1964 年 11 月生, 讲师

收稿日期: 96-12-16; 修回日期: 97-3-10

质点的振动速度、声强等),从而以数值解的形式解决了结构振动声辐射的计算问题。

2 计算结构振动声辐射的三次 B 样条插值边界元法

结构振动在理想流体介质中引起的小振幅简谐声波的声辐射问题可通过如下边界元法公式予以计算:

其中: P 是分析域内边界上任一点; $\Phi(p)$ 为 P 点的速度势函数; $\partial\Phi/\partial n$ 为 Φ 在边界 Γ 上的法向导数,由已知振动体表面振速决定; $c(P)$ 为奇性系数; Φ^* 为基本解,本文采用 ξ 点处单位点源在自由空间 X 点处产生的速度势函数作为基本解,则对于三维声辐射,

$$\Phi^*(X,\xi)=\frac{e^{-jk\sqrt{r(X)-r(\xi)}}}{4\pi\sqrt{r(X)-r(\xi)}}$$

相应的速度势函数梯度计算公式为:

$$\nabla\Phi(x)=\int(\nabla\Phi^*\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\nabla\frac{\partial\Phi^*}{\partial n})d\Gamma\quad(2)$$

如果用速度势函数及其梯度来表示声场中某点处的声压 P 和质点振速 $\vec{V}$, 那么,

$$P=j2\pi f\rho\Phi;\quad\vec{V}=-\nabla\Phi\quad(3)$$

至此,已经扼要地列出了利用边界元方法计算结构振动声辐射的有关列式。但是,工程中绝大多数声辐射问题无法用解析解的形式求解,所以还需要在此基础上通过几何剖分和变量插值,把无限自由度问题化为有限自由度问题后才好做数值分析工作。

几何剖分的原则跟有限元法相同,插值方法也跟有限元法中的一样,本文采用目前应用较多的三次 B 样条函数插值。

在空间问题中经过几何变换,将原边界上的歪扭网格映射为 $\eta-\xi$ 平面上的矩形网格。如图 1 所示。则 (q_1,q_2) 结点处的二维三次 B 样条插值形函数值表示为:

$$N_{q_1q_2}(\eta,\xi)=N_{q_1}(\eta)\cdot N_{q_2}(\xi)\quad(4)$$

其中, $N_{q_1}(\eta)$ 和 $N_{q_2}(\xi)$ 分别是在 η 和 ξ 方向

的一维三次 B 样条插值形函数。

对于一维三次 B 样条插值,设经过几何变换将原边界曲线映射为单位结点距的 η 直线,如图 2 所示,其结点数为 $m+1$,编号为 $q=0,1,2,\dots,m$; 网格数为 m ,编号为 $c=0,1,2,\dots,m-1$ 。则 q 结点处的三次 B 样条基函数 $\Psi_q(\eta)$ 可表示为:

$$\Psi_q(\eta)=\begin{cases}(2+\eta-q)^3 & \eta=c-q-2\text{ 网格}\\(2+\eta-q)^3-4(1+\eta-q)^3 & \eta=c-q-1\text{ 网格}\\(2-\eta+q)^3-4(1-\eta+q)^3 & \eta=c=q\text{ 网格}\\(2-\eta+q)^3 & \eta=c=q+1\text{ 网格}\\0 & \eta\leq\text{以上网格}\end{cases}$$

$$q=-1,0,1,2\dots m,m+1\quad(5)$$

其中 $q=-1$ 和 $q=m+1$ 结点是为满足端导控制而虚设的结点。

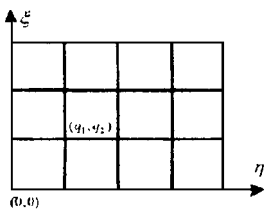


图 1 二维 B 样条插值的矩形网格

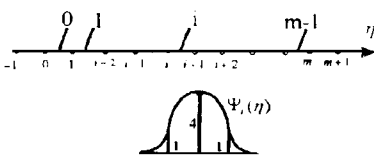


图 2 一维三次 B 样条基函数曲线

本文所用三次 B 样条基函数是标准 B 样条函数的 6 倍,则 $\Psi_q(\eta)$ 具 1-4-1 特性:

$$\Psi_q(\eta)=\begin{cases}1 & \eta=c-q-1\\4 & \eta=c-q\\1 & \eta=c-q+1\\0 & \eta=\text{其他整数}\end{cases}\quad(6)$$

通过将基函数 $\Psi_q(\eta)$ ($q=-1,0,1,2\dots m,m+1$) 进行线性组合,就可求取一维三次 B 样条插值形函数 $N_q(\eta)$ ($q=0,1,2\dots m$)。

$$\{N_q\}_{m+1}=\{\Psi_q\}_{m+3}[G]_{(m+3)\times(m+1)}\quad(7)$$

其中, $[G]$ 为待定的系数矩阵。在边界端点($q = 0$ 和 $q = m$) 导数未知的情况下, 为了保证插值的效果, 可根据实际情况, 将端导数通过 Lagrange 插值, 由 L 个内点函数值 $f(i)$ 来计算端导数。例如对于左端点, 可取:

$$f_{,n}(0) = \sum_{i=1}^L L_{i,n}(0) \cdot f(i) \tag{8}$$

从而求出左端的端导数, 对右端点可如法泡制。结合 $\Psi_q(\eta)$ 的 1-4-1 特性和相应的端控条件, (7) 式中的待定系数矩阵 $[G]$ 可由下列矩阵去除首末两列后求得:

$$A_{(m+3) \times (m+3)}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & g & f & e & d & c & b & a \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= [a_{-1} \ a_0 \ a_1 \cdots a_m \ a_{m+1}] \tag{9}$$

其中系数 $a \sim f$ 由不同的端控条件决定, 这样就求得了一维三次 B 样条插值形函数, 代入式 (4) 就可以对空间问题所对应的二维边界变量进行插值。

在实际计算中, 由于将不规则的实际振动体表面通过几何变换转换为规则的平面网格, 因而就应计入 Jacobian 因子的影响, 对于二维三次 B 样条插值, Jacobian 因子可由下式求取:

$$J = \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \tag{10}$$

其中:
$$\vec{\tau}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \sum_{q_1=-1}^{m_1} \sum_{q_2=-1}^{m_2} r_{q_1} \frac{dN_{q_1}}{d\eta} N_{q_2}$$

$$\vec{\tau}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{d\xi} = \sum_{q_1=-1}^{m_1} \sum_{q_2=-1}^{m_2} r_{q_1} \frac{dN_{q_1}}{d\xi} N_{q_2}$$

式中 r_q 表示 q 结点的位矢, m_1 和 m_2 分别是 η 和 ξ 方向上的结点数。

三次 B 样条函数插值之所以效果好, 其原因是: 它是属于高光滑度的直到二阶导数都连续的函数; 其根据实际工程问题而设置

的端控是计算稳定性的重要保证; 它的最高幂次为三次, 不会随着分段数的增加而增加。

由于 Φ^* 、 $\partial\Phi^*/\partial n$ 在边界 Γ 上的积分仅具有弱奇性, 因此, 边界 Γ 通过几何剖分和边界量的三次 B 样条插值后, 边界积分方程 (1) 即可表示为如下的离散形式:

$$c_p \Phi_p + \sum_{q=1}^m \Phi_q \sum_{e=1}^n \int_e \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \right)_p N_{q_1} N_{q_2}$$

$$\cdot \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \ d\eta d\xi = \sum_{q=1}^m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_q \sum_{e=1}^n \int_e \Phi_p^* N_{q_1} N_{q_2}$$

$$\cdot \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \ d\eta d\xi \quad (p = 1, 2, \dots, m) \tag{11}$$

其中: m 为边界 Γ 上结点 q 的总数, n 为边界 Γ 上单元 e 的总数, Γ_e 为边界 Γ 上的 e 单元网格, $N_{q_1} N_{q_2}$ 为 q 结点处的二维三次 B 样条插值函数。 e, Γ_e 分别是实际振动体边界上的 e, Γ_e 在几何变换后的平面上的对应量, 将 (11) 式写成矩阵形式:

$$[A_{pq}] \{ \Phi_q \} = [B_{pq}] \{ (\partial \Phi / \partial n)_q \} \tag{12}$$

$$A_{pq} = \sum_{e=1}^n \int_e \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_p N_{q_1} N_{q_2} \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \ d\eta d\xi + \delta_{pq} c_p \tag{13}$$

$$B_{pq} = \sum_{e=1}^n \int_e \Phi_p^* N_{q_1} N_{q_2} \vec{\tau}_1 \times \vec{\tau}_2 \ d\eta d\xi$$

则在振动体边界上的结点振速 $\{ (\partial \Phi / \partial n)_q \}$ 已知的情况下, 通过求系数矩阵 $[A_{pq}]$ 、 $[B_{pq}]$, 就可求出边界结点上的速度势函数 $\{ \Phi_q \}$, 从而求出边界 Γ 上的声压值。而分析域内有关的声场参数也可用类似的方法求取。

公式 (13) 中的积分采用标准二维 Gaussian 格式进行数值求积, 而对于式中出现的弱奇性奇异积分, 本文采用文献 [1] 中的极坐标变换法进行处理, 具体方法从略。

3 算 例

在工程问题的研究中, 常常用具有解析解的模型, 来检验方法的有效性。作者采用脉动球声辐射作为算例, 用本文提出的方法计算脉动球表面声压及其辐射声场中任一点的声压和质点振速, 并与解析解进行比较, 借以证明本方法的有效性。具体参数如下: 脉动球

半径 $r = 0.1\text{m}$, 表面振动速度 $v = 1\text{m/s}$, 声速 $c = 341\text{m/s}$, 空气密度 $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$ 。

如图 3 所示, 脉动球表面分为 24 个网格, 结点数 为 20, 将剖分后的球面进行几何变换, 成为规则的网格, 插值和数值求积皆在该网格内进行。

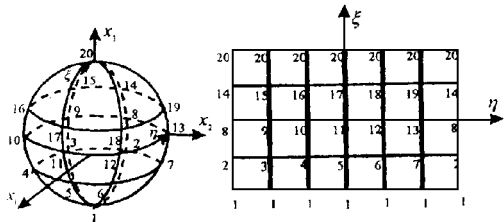


图 3 球表面的剖分及几何变换

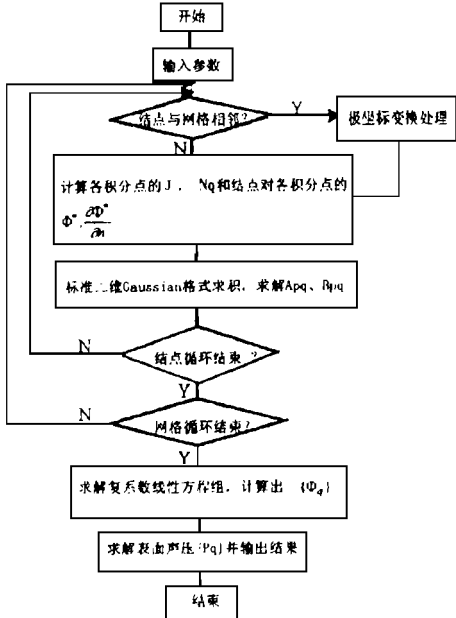


图 4 边界表面声压的计算程序框图

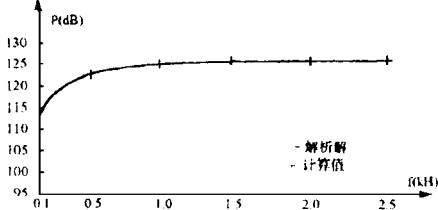


图 5 球表面声压计算值与解析解比较

不失一般性, 选取 $P(5, 0, 0)$ 点作分析域内的计算点。振动体表面声压计算程序见图

4。辐射声场内任一点声压和质点振速的计算程序框图类似图 4。边界表面声压计算值与解析解的结果见图 5, 点 $P(5, 0, 0)$ 处声压和质点振速的计算结果和解析解见表 1、2。

表 1 点 $P(5, 0, 0)$ 处的声压值(N/m^2)

频率(Hz)	计算结果	解析解
500	$5.209+ j(-1.824)$	$5.238+ j(-1.821)$
1000	$-1.854+ j(-6.915)$	$-1.805+ j(-6.963)$
1500	$-7.699+ j(-0.049)$	$-7.696+ j(-0.048)$
2000	$-2.577+ j7.400$	$-2.590+ j7.462$
2500	$6.278+ j5.093$	$6.154+ j5.108$

表 2 点 $P(5, 0, 0)$ 处的质点振速值(m/s)

频率(Hz)	计算结果	解析解
500	$0.01263+ j(-0.00473)$	$0.01270+ j(-0.00473)$
1000	$-0.00471+ j(-0.01685)$	$-0.00460+ j(-0.01697)$
1500	$-0.01887+ j0.00002$	$-0.01881+ j-0.00002$
2000	$-0.00620+ j0.0812$	$-0.00623+ j0.0827$
2500	$0.01540+ j0.01238$	$0.01509+ j0.01242$

从图 5 以及表 1 和表 2 的比较结果可见, 利用三次 B 样条函数插值的边界元法计算结构振动声辐射是一种切实有效的方法。

4 结 论

边界元方法具有降维、适应无限域问题等特点, 适合于求解结构振动声辐射问题, 因采用具有良好插值效果的三次 B 样条插值函数, 使本文提出的方法即使在边界剖分较粗的情况下, 对结构振动声辐射的计算在较宽的振动频率范围内也能给出良好的计算精度。算例的结果证实了这种方法的有效性。

参考文献

- 1 王有成. 工程中的边界元方法. 中国水利水电出版社, 1996. 6
- 2 C. A. Brerria. Boundary element techniques theory and application in Engineering. Springer-Verlag 1984
- 3 P. M. 莫尔. 理论声学. 科学出版社, 1984
- 4 刘钊. 机床噪声分析中的边界元方法的研究. 合肥工业大学博士论文, 1994