

# 复合弯曲超声换能器边缘自由薄板多波节振动分析\*

张 串 阎玉舜

(同济大学声学研究所 上海·200092)

本文讨论了边缘自由条件下轴对称薄板弯曲振动时的频率方程及其求解,并给出了前9个根(泊松比 $\sigma=0.33$ )的精确值和9种振动模式的波节圆半径的计算值。对薄板的高次弯曲振动模式的分析及大圆盘、多波节复合弯曲超声换能器的设计提供了理论计算依据。

关键词: 薄板, 弯曲, 超声换能器

## Analysis of vibration of free-edged thin plate with multi-nodal circles applied to compound flexural ultrasonic transducer

ZHANG Chuan YAN Yushun

(Institute of Acoustics, Tongji University, Shanghai · 200092)

In this paper, the frequency equation of axisymmetric flexural vibrating free-edged thin plate and its solving process are discussed, its nine roots (Poisson's ratio  $\sigma=0.33$ ) and calculating value of nodal circles of nine kinds vibrating modes are given. These provide theoretical calculation basis for analysis of high-mode flexural vibration of plate and design of big round plate and multi-nodal compound flexural ultrasonic transducer.

**Key words:** thin plate, flexural ultrasonic transducer

### 1 前 言

大圆盘、多波节边缘自由向空气辐射的弯曲振动换能器,由于采用带变幅杆的纵向振动复合振子进行中心激励,为空气介质提供很好的阻抗匹配振动系统。所以具有较高的转换效率,因而得到了广泛的应用。80年代末期,国内市场上出现的进口超声料位仪产品多采用这种换能器,见图1。

本文推导了多波节(波节数大于8)边缘自由弯曲薄板振动频率方程,利用微机进行精确求解,为这种换能器的设计提供了依据。

为了得到高的指向性,在上述换能器表面粘贴泡沫塑料环,形成阶梯形相位补偿。但

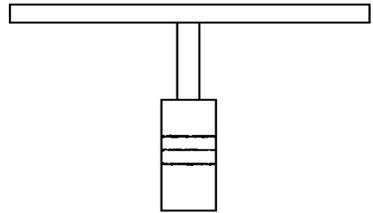


图1 弯曲振动换能器

其耐高温、耐潮湿及机械性能都较差。我们将另文讨论利用穿孔板代替泡沫塑料环进行相位补偿、阻抗变换。最后简述此新型换能器的测试性能及在超声料位仪上的应用。

### 2 边缘自由轴对称薄板弯曲振动分析

\* 第一作者: 张串,女,1970年8月生,硕士

收稿日期: 97-1-29; 修回日期: 97-4-17

## 2.1 频率方程

圆板厚度为  $h$ , 半径为  $a$ 。根据弹性理论, 薄板中心面位移满足方程:<sup>[1]</sup>

$$\nabla^4 W - \gamma^4 W = 0 \quad (1)$$

位移  $W$  在一般情况下是极坐标  $\gamma$  和  $\theta$  的函数。故轴对称振动模式中,  $W$  仅是  $\gamma$  的函数。即函数  $W = W(\gamma)$ , 则方程的通解为:

$$W = A J_0(\gamma r) + B I_0(\gamma r) + C K_0(\gamma r) + F N_0(\gamma r) \quad (2)$$

由于  $r = 0$  时,  $N_0(\gamma r)$  和  $K_0(\gamma r)$  成为无限大, 而圆板在作弯曲振动时在其中心位移应是有限的, 因此须在(2)式中取  $C = F = 0$ , 于是通解成为:

$$W = A J_0(\gamma r) + B I_0(\gamma r) \quad (3)$$

式中  $\gamma^4 = \frac{12\rho(1-\sigma^2)}{Eh^2} \omega^2 \quad (4)$

现在我们讨论自由边界条件薄板振动。因为中心激励, 边缘‘软接触’的情况下, 可以满足边界自由的条件(以往是不多见的)。

边缘自由薄板满足边界条件:

(1) 弯矩  $M_r|_{r=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] |_{r=a} = 0 \quad (5)$

(2) 剪力  $Q_r|_{r=a} = D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right] |_{r=a} = 0 \quad (6)$

式中  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \quad (7)$

$\rho$ : 密度,  $\sigma$ : 泊松比,  $E$ : 杨氏模量,  $\omega$  共振角频率,  $D$ : 弯曲刚度。根据通解和边界条件可以求出板在边缘自由条件下振动的频率方程为:

$$\frac{J_0(\gamma a)}{J_1(\gamma a)} + \frac{I_0(\gamma a)}{I_1(\gamma a)} = \frac{2(1-\sigma)}{\gamma a} \quad (8)$$

令  $\gamma a = \mu$ , 则方程(8)可写为:

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} + \frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)} = \frac{2(1-\sigma)}{\mu} \quad (9)$$

## 2.2 频率方程求解

由(9)式可以看出, 当弯曲圆板的泊松系数给定以后, 可得一系列的根  $\mu_n$ ,  $n$  为正整数, 不同的  $n$  对应不同数目的节圆, 即分别对

应于圆板弯曲振动的不同振动模式。用计算机分别绘出方程(9)两边函数的曲线, 得到一系列交点, 交点横坐标的值即为上述频率方程的根  $\mu_n$ 。当  $\sigma = 0.33$  时如图 2 所示。

根据我们研究的需要, 精确计算了前 9 个  $\mu_n$  值, 也顺便求得了圆板边缘固定和边缘简支时自由振动的  $\mu_n$  值, 见表 1。

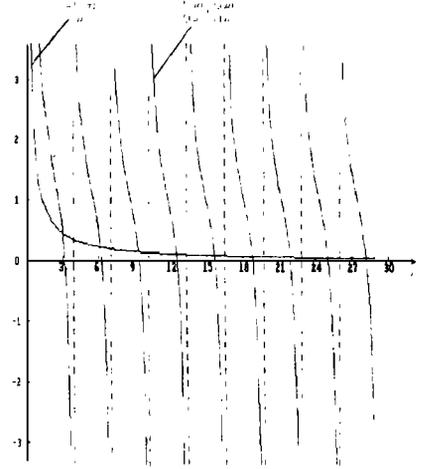


图 2 频率方程求根曲线图

表 1 3种边界条件薄板振动频率方程的前 9 个根

$n$	边缘自由	边缘固定	边缘简支
	$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} + \frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)}$ $= \frac{2(1-\sigma)}{\mu}$	$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}$ $+ \frac{I_0(\mu)}{I_1(\mu)} = 0$	$\frac{J_1(\mu)}{J_0(\mu)}$ $+ \frac{I_1(\mu)}{I_0(\mu)} = \frac{2\mu}{1-\sigma}$
1	3.0114	3.1962	2.2313
2	6.2053	6.3064	5.4547
3	9.3708	9.4394	8.6132
4	12.5251	12.5771	11.7622
5	15.6746	15.7164	14.9079
6	18.8216	18.8565	18.0521
7	21.9671	21.9971	21.1955
8	25.1116	25.1379	24.3385
9	28.2554	28.2789	27.4811

当圆板的材料及尺寸给定后, 其各振动模式的共振频率  $f_n$  和振动板中声速  $c_{板}$  为:

$$f_n = \mu_n^2 h c_{板} / 2 \sqrt{12 \pi a^2} \quad (10)$$

$$c_{板} = \frac{E}{\rho(1-\sigma^2)} \quad (11)$$

例如取  $n = 9$ ,  $\mu_0 = 28.2554$ , 合金铝圆板的厚度  $h = 1.5\text{mm}$ , 半径  $a = 150\text{mm}$ ,  $E = 6.8 \times 10^{10}\text{N/m}^2$ ,  $\rho = 2.7 \times 10^3\text{kg/m}^3$ , 计算得到该圆板振动频率  $f_9 = 13\text{kHz}$ 。

### 2.3. 波节圆半径的计算及测量

根据自由边界条件及求得的  $\mu_n$  值, 用微机求出半径为  $150\text{mm}$ , 厚为  $1.5\text{mm}$  的 9 种振动模板波节圆半径的精确值见表 2, 波节数为 9 时的波节圆的照片见图 3, 位移曲线如图 4。

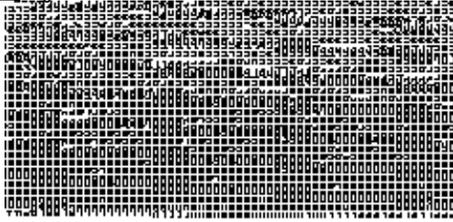


图 3 细砂模拟波节圆照片

表 2 自由边界条件 9 种振动模式波节圆半径 (单位: mm)

振动模式 波节数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	101.9	58.6	38.5	28.9	23.1	19.2	16.4	14.4	12.8
2		126.1	88.6	66.1	52.9	44.0	37.7	33.0	29.5
3			133.9	103.8	82.8	69.0	59.1	51.6	46.0
4				137.9	112.9	93.9	80.5	70.4	62.7
5					140.2	119.1	101.9	89.1	79.2
6						141.8	123.4	107.9	95.9
7							143.0	126.7	112.7
8								143.8	129.3
9									144.5

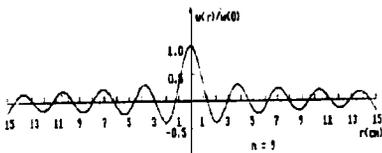


图 4 位移曲线图(波节数为 9)

为了验证上述结果, 分别对半径为  $150\text{mm}$ 、厚度为  $2\text{mm}$  和半径为  $150\text{mm}$ 、厚度

为  $1.5\text{mm}$  的两块板进行了测量。前者记为  $1^\#$ , 振动时存在 8 个波节圆; 后者记为  $2^\#$ , 振动时存在 9 个波节圆。测量结果如表 3 所示。与理论值  $r_{\text{理}}$  基本相符, 由于节圆线本身有一定的宽度, 用钢尺难以精确测量。

表 3 波节圆半径测量与计算值(单位: mm)

1 <sup>#</sup>		2 <sup>#</sup>	
$r_{\text{理}}$	$r_{\text{测}}$	$r_{\text{测}}$	$r_{\text{测}}$
14.4	15	12.8	16
33.0	32	29.5	31
51.6	51	46.0	48
70.4	70	62.7	63
89.1	89	79.2	80
107.9	108	95.9	96
126.7	126	112.7	113
143.8	144	129.3	129
		144.5	144

### 2.4 一维复合振子及振动板的频率

对 4 个一维纵向振动复合振子及加板后的振动系统频率进行了测量, 结果如表 4 所示。与板谐振频率(波节数为 9)的计算值比较, 两者比较接近, 说明系统已经谐振, 振动系统的频率与板的谐振频率一致。

表 4 频率测量(单位: kHz)

编号 频率	1	2	3	4
一维纵向复合振子	13.1	13.4	13.6	13.5
加振动板	13.1	13.1	13.1	13.2
板的谐振频率(计算值)	13.0	13.0	13.0	13.0

## 3 结束语

本文讨论的边缘自由条件下薄板轴对称弯曲振动时的频率方程及其求解, 对薄板的高次弯曲振动模式的分析及大圆盘、多波节超声复合弯曲换能器的设计提供了理论计算依据。

参考文献

1 P. M. 莫尔斯. 振动与声. 科学出版社, 1974