

# 广义兰姆波的积累二次谐波发生研究

邓明晰<sup>\* 1</sup>, 廖建中<sup>2</sup>

(1. 后勤工程学院, 重庆 400016; 2. 四川压电与声光技术研究所, 重庆, 400060)

摘要: 借助色散导波的部分波分析方法、二阶微扰理论及界面的声非线性反射处理技术, 本文对声波导中广义兰姆波的积累二次谐波发生进行了理论研究。结果表明, 在一定条件下, 源于声波导介质的体非线性、由广义兰姆波的部分波非线性相互作用所发生的二次谐波具有随传播距离积累增长的性质, 文中给出了广义兰姆波的积累二次谐波发生所要满足的条件, 并求解出相应的积累二次谐波之解析式。

关键词: 广义兰姆波; 积累效应; 二次谐波

中图分类号: Q422.7 文献标识码: A

## Generation of cumulative second harmonic of generalized Lamb wave propagation

DENG Ming-xi<sup>1</sup>, LIAO Jian-zhong<sup>2</sup>

(1. Logistics Engineering University, Chongqing 400016;

2. Sichuan institute of piezoelectric and acoustooptic technology, Chongqing 400060)

**Abstract:** Cumulative second-harmonic generation of generalized Lamb wave propagation in a solid waveguide has been theoretically analyzed in this article. It is based on the partial wave analysis method of dispersive guided wave, second-order perturbation approximation and nonlinear reflection of acoustic waves at an interface. That the second harmonic, under certain conditions, may retain the cumulative growth effect along with the propagation distance is found. The existence condition of cumulative second-harmonic generation and the corresponding analytical expression of cumulative second harmonic are obtained.

**Key words:** generalized Lamb wave; cumulative effect; the second harmonic

### 1 引言

广义兰姆波存在于半无限大固体介质和有限厚度固体层构成的声波导中, 其相应的声能量被约束在固体层内以及固体层-半无限大固体介质构成的界面附近<sup>[1]</sup>。近年来, 人们在进行声传感和声无损检测技术研究时, 广泛采用到广义兰姆波; 对于地学研究领域, 因地球可视为一分层结构, 在接近地球表面区域传播的声波有相当部分可作为广义兰姆

波进行处理。迄今为止, 人们对广义兰姆波的线性性质进行了深入分析, 但对其二次谐波性质进行研究, 还几乎未涉及到。在非线声学领域, 人们对具有积累性质的二次谐波尤其感兴趣。考虑到广义兰姆波在实际应用中经常遇到, 探讨其积累二次谐波的发生是很有意义的, 如在工程或地学研究领域, 当广义兰姆波满足一定条件时, 其相应的二次谐波可具有积累性质, 二次谐波的振幅随传播距离积累增长, 从而形成锯齿波, 这可以导致出

\* 收稿日期: 99-03-25; 修订日期: 99-06-08

作者简介: 邓明晰(1965-), 男, 副教授

现“断裂”现象。本文在研究广义兰姆波的积累二次谐波发生时,主要借助于二阶微扰理论和色散导波的部分波分析方法,以及界面的非线性反射处理技术<sup>[2]</sup>,同时假定二次谐波的能量远小于基波能量,且两者间无能量耦合。

## 2 基本理论

传播广义兰姆波的声波导结构如图 1 所示,厚度为  $d$  的固体层和半无限大固体介质分别用  $M_1$  和  $M_2$  表示,  $M_1$  和  $M_2$  各向同性且无色散。据声波导中色散导波的部分波分析方法,广义兰姆波可视为由 6 个部分波构成; 2 个横波和 2 个纵波在  $M_1$  的上下两个界面来回反射并沿  $OZ$  轴传播, 1 个横波和 1 个纵波在  $M_2$  内沿  $OZ$  轴传播但沿负  $OY$  轴呈衰减性质(见图 1); 据相位匹配条件, 6 个部分波的波矢沿  $OZ$  轴的分量在数值上相等。为清楚起见,在  $M_1$  和  $M_2$  内的所有物理量分别用下标(1)和(2)予以区分。构成广义兰姆波的 6 个部分波在形式上可表为<sup>[1,3,4]</sup>:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{(m)Ln} = u_{(m)Ln} \mathbf{K}_{(m)Ln}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n - j\omega t] \\ \mathbf{u}_{(m)Tn} = u_{(m)Tn} (-1)^n (\mathbf{x} \times \mathbf{K}_{(m)Tn}^0) \exp[j\mathbf{K}_{(m)Tn} \cdot \mathbf{r}_n - j\omega t] \end{cases} \quad (1)$$

且有关系

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n = k_{(m)z} z + (-1)^n \alpha_{(m)L} k_{(m)y} y \\ \mathbf{K}_{(m)Tn} \cdot \mathbf{r}_n = k_{(m)z} z + (-1)^n \alpha_{(m)T} k_{(m)y} y \\ k_{(m)} = \omega c = \frac{K_{(m)L} \sin \theta_{(m)T} \sin \theta_{(m)T}}{c_{(m)L}^2 / c_{(m)L}^2 - 1}, \alpha_{(m)L} = \frac{c_{(m)L}^2}{c_{(m)L}^2 - 1}, \alpha_{(m)T} = \frac{c_{(m)L}^2}{c_{(m)T}^2 - 1} \end{cases}$$

在式(1)和(2)中,  $m=1$  和 2 分别对应  $M_1$  和  $M_2$ , 当  $m=1$  时,  $n=1,2$ ; 当  $m=2$  时,  $n=1$ ;  $\mathbf{K}_{(m)Ln}^0$  和  $\mathbf{K}_{(m)Tn}^0$  分别是波矢  $\mathbf{K}_{(m)Ln}$  和  $\mathbf{K}_{(m)Tn}$  对应的单位矢量,  $\mathbf{x}$  是沿  $ox$  轴的单位矢量,  $c_{(m)L}$  和  $c_{(m)T}$  分别表示纵波和横波声速,  $K_{(m)L} = \omega c_{(m)L}$ ,  $K_{(m)T} = \omega c_{(m)T}$ , 因 6 个部分波应满足相位匹配条件, 有  $k = k_{(1)} = k_{(2)}$ 。

对于图 1 给出的声波导结构, 相应的边界条件包括: 在  $y=d$  处法向和切向应力为

零; 在  $y=0$  处法向和切向应力连续、沿  $OY$  和  $OZ$  轴的位移分量连续。据此边界条件得如下矩阵方程<sup>[1]</sup>:

$$[M(\omega, k)] \begin{bmatrix} u_{(1)L1} \\ u_{(1)T1} \\ u_{(1)L2} \\ u_{(1)T2} \\ u_{(2)L1} \\ u_{(2)T1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

其中  $6 \times 6$  系数矩阵  $[M(\omega, k)]$  在附录中给出。要使式(3)有非零解, 必须  $M(\omega, k) = 0$ , 据此可得到广义兰姆波的色散关系。因  $[M(\omega, k)]$  形式复杂, 一般很难给出色散关系的解析式, 通常只能经过较为复杂的数值计算才能得到色散曲线。

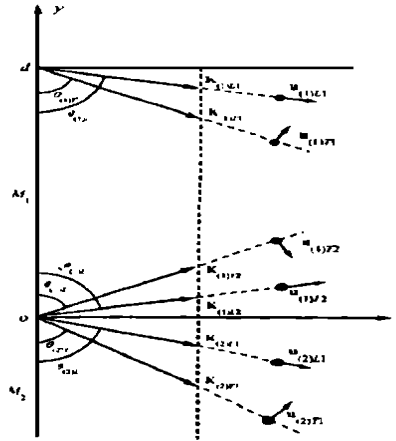


图 1 对声波导建立坐标系及广义兰姆波的部分波声场

各向同性固体介质中以位移矢量为变量的二阶波动方程如下<sup>[3]</sup>:

$$\rho_{(m)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{(m)}^{(2)}}{\partial t^2} - [\kappa_{(m)} + 4\mu_{(m)}/3] \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_{(m)}^{(2)} + \mu_{(m)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_{(m)}^{(2)}) = F[\mathbf{u}_{(m)}^{(1)}] \quad (4)$$

式(4)中位移矢量  $\mathbf{u}$  的上标(1)和(2)分别表示基波和二次谐波, 下标  $(m) = (1), (2)$  分别代表声波导的  $M_1$  和  $M_2$ 。  $\kappa_{(m)}, \mu_{(m)}$  为  $M_1$  或  $M_2$  的二阶弹性常数,  $\rho_{(m)}$  为密度, 式(4)右端是源于介质体非线性、由基波非线性相互作用所产生的二阶驱动项。

对于声波导的  $M_1$  和  $M_2$ , 基波声场分别

为  $\mathbf{u}_{(1)}^{(1)} = \sum_{n=1} [\mathbf{u}_{(1)Tn} + \mathbf{u}_{(1)Ln}]$  和  $\mathbf{u}_{(2)}^{(1)} = \mathbf{u}_{(2)T1} + \mathbf{u}_{(2)L1}$ 。将  $\mathbf{u}_{(1)}^{(1)}$ 、 $\mathbf{u}_{(2)}^{(1)}$  分别代入式(4)右端的  $F[\mathbf{u}_{(m)}^{(1)}]$  ( $m=1, 2$ ) 中, 得到  $M_1$  中的 14 个二阶驱动项(与固体板中兰姆波的情形类似)和  $M_2$  中的 4 个二阶驱动项, 形式上分别表示为 [略去因子  $\exp(-2j\omega)$ ]<sup>[4]</sup>:

$$F[\mathbf{u}_{(1)}^{(1)}] = \sum_{l,n=1} (-1)^l [\hat{x} \times (\mathbf{K}_{(1)Tl}^0 + \mathbf{K}_{(1)Ln}^0)] F_{(1)Tl-Ln}^{(DT)} \exp[j(\mathbf{K}_{(1)Tl} + \mathbf{K}_{(1)Ln}) \cdot \mathbf{r}_1] + \sum_{n=1} \mathbf{K}_{(1)Ln}^0 F_{(1)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(1)Ln} \cdot \mathbf{r}_n] + \sum_{n=1} \mathbf{K}_{(1)Tn}^0 F_{(1)Tn-Tn}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(1)Tn} \cdot \mathbf{r}_n] + \sum_{l,n=1} (\mathbf{K}_{(1)Tl}^0 + \mathbf{K}_{(1)Ln}^0) F_{(1)Tl-Ln}^{(DL)} \exp[j(\mathbf{K}_{(1)Tl} + \mathbf{K}_{(1)Ln}) \cdot \mathbf{r}_l] + \hat{z} F_{(1)L1-L2}^{(DL)} \exp(j2kz) + \hat{z} F_{(1)T1-T2}^{(DL)} \exp(j2kz) \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} &= \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} \left[ \sin\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^n \cos\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \mathbf{K}_{(m)Ln}^0 \exp[2j\mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n] \\ \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} &= \frac{[4\mu_{(m)} + 3K_{(m)} + 2A_{(m)} + 6B_{(m)} + 2C_{(m)}]}{4[K_{(m)} + 4\mu_{(m)}/3]} \left[ \frac{K_{(m)L}}{k} \right]^2 (kd)^2 \left[ \frac{\mathbf{u}_{(m)Ln}^2}{d} \right] \end{aligned} \right. \quad (7)$$

其中  $m=1, n=1, 2; m=2, n=1; A_{(m)}, B_{(m)}$  和  $C_{(m)}$  为  $M_1$  或  $M_2$  的三阶弹性常数。式(7)表明, 驱动二次谐波表现出随传播距离线性积累增长的性质(称  $\mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)}$  为驱动积累二次谐波)。

当广义兰姆波在声波导中传播时,  $M_1$  和  $M_2$  介质的体非线性导致了相应区域内驱动二次谐波的发生。一般说来, 仅由驱动二次谐波还不能满足声波导的二阶边界条件, 还须在  $M_1$  和  $M_2$  内引入伴随基波传播的自由二次谐波(也就是式(4)对应齐次波动方程的通解)<sup>[2]</sup>。在  $M_1$  和  $M_2$  内, 驱动二次谐波的位移矢量在  $YZ$  面内, 在其中引入的自由二次谐波的位移矢量也应在  $YZ$  面内。为满足相位匹配条件, 驱动二次谐波和自由二次谐波所对应的波矢在  $OZ$  轴上的分量应相等。

在确定自由二次谐波解的形式时, 鉴于声学技术

$$F[\mathbf{u}_{(2)}^{(1)}] = \mathbf{K}_{(2)L1}^0 F_{(2)L1-L1}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(2)L1} \cdot \mathbf{r}_1] + \mathbf{K}_{(2)T1}^0 F_{(2)T1-T1}^{(DL)} \exp[j2\mathbf{K}_{(2)T1} \cdot \mathbf{r}_1] + (\mathbf{K}_{(2)T1}^0 + \mathbf{K}_{(2)L1}^0) F_{(2)T1-L1}^{(DL)} \exp[j(\mathbf{K}_{(2)T1} + \mathbf{K}_{(2)L1}) \cdot \mathbf{r}_1] + [(\mathbf{K}_{(2)T1}^0 + \mathbf{K}_{(2)L1}^0) \times \hat{x}] F_{(2)T1-L1}^{(DL)} \exp[j(\mathbf{K}_{(2)T1} + \mathbf{K}_{(2)L1}) \cdot \mathbf{r}_1] \quad (6)$$

其中  $\hat{z}$  为  $oz$  轴单位矢量。式(5)(6)表明,  $F[\mathbf{u}_{(1)}^{(1)}]$  包括横波驱动项 4 项, 纵波驱动项 10 项,  $F[\mathbf{u}_{(2)}^{(1)}]$  包括横波驱动项 1 项, 纵波驱动项 3 项;  $F$  的上标“DT”和“DL”分别表示横波和纵波驱动项,  $F$  下标中的  $L_n, T_n$  ( $n=1, 2$ ) 表示非线性相互作用的部分波  $\mathbf{u}_{(m)Ln}, \mathbf{u}_{(m)Tn}$ 。将式(5)(6)代入式(4), 得到  $M_1$  的 14 个和  $M_2$  的 4 个驱动二次谐波。在这些驱动二次谐波中, 只有  $M_1$  中的  $\mathbf{u}_{(1)L1}, \mathbf{u}_{(1)L2}$  和  $M_2$  中的  $\mathbf{u}_{(2)L1}$  自作用产生的驱动二次谐波(以  $\mathbf{u}_{(1)L1-L1}^{(DL)}, \mathbf{u}_{(1)L2-L2}^{(DL)}$  和  $\mathbf{u}_{(2)L1-L1}^{(DL)}$  表示)才具有空间积累性质, 其解表示如下<sup>[2,4]</sup>:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} &= \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} \left[ \sin\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^n \cos\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \mathbf{K}_{(m)Ln}^0 \exp[2j\mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n] \\ \mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)} &= \frac{[4\mu_{(m)} + 3K_{(m)} + 2A_{(m)} + 6B_{(m)} + 2C_{(m)}]}{4[K_{(m)} + 4\mu_{(m)}/3]} \left[ \frac{K_{(m)L}}{k} \right]^2 (kd)^2 \left[ \frac{\mathbf{u}_{(m)Ln}^2}{d} \right] \end{aligned} \right. \quad (7)$$

驱动积累二次谐波  $\mathbf{u}_{(m)Ln-Ln}^{(DL)}$  具有空间积累性质, 在  $M_1$  和  $M_2$  中引入的自由二次谐波也应包括积累波部分, 据界面声的非线性反射处理技术和相位匹配条件, 给出自由二次谐波横波和纵波的形式解如下(见图 2)<sup>[2,4]</sup>:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(F)} &= \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FP)} \\ \left[ \cos\theta_{mT} \frac{z}{d} + (-1)^{n-1} \sin\theta_{mT} \frac{y}{d} \right] \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FC)} + \left[ \cos\theta_{mT} \frac{z}{d} + (-1)^{n-1} \sin\theta_{mT} \frac{y}{d} \right] \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FP)} \right\} \times \\ & (\mathbf{x} \times \mathbf{K}_{(m)Tn}^0) \exp[j2\mathbf{K}_{(m)Tn} \cdot \mathbf{r}_n] \\ \mathbf{u}_{(m)Ln}^{(F)} &= \mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FC)} + \mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FP)} \\ \left[ \cos\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^{n-1} \sin\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FC)} + \left[ \cos\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^{n-1} \sin\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FP)} \right\} \times \\ & \mathbf{K}_{(m)Ln}^0 \exp[j2\mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n] \end{aligned} \right. \quad (8)$$

式(8)(9)满足式(4)对应的齐次波动方程, 其中  $m=1, n=1, 2; m=2, n=1; \mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FC)}$  和  $\mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FC)}$  表示自由积累二次谐波,  $\mathbf{u}_{(m)Tn}^{(FP)}$  和  $\mathbf{u}_{(m)Ln}^{(FP)}$

为自由平面二次谐波。

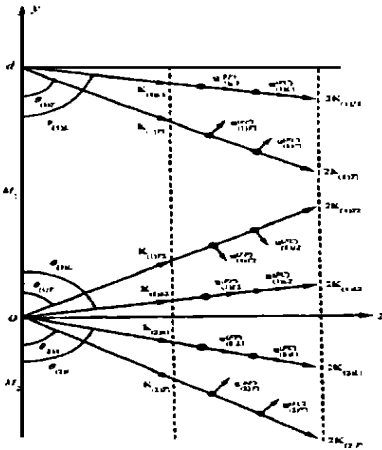


图2  $M_1$  和  $M_2$  中的自由二次谐

在  $M_1$  和  $M_2$  中的二阶应力包括两部分, 其一是组成广义兰姆波的部分波经非线性虎克定律产生的应力, 其二是驱动二次谐波和自由二次谐波经线性虎克定律得到的应力。广义兰姆波的二阶边界条件要求: 在  $y = d$  处二阶应力为零, 在  $y = 0$  处二阶应力和沿  $OY, OZ$  轴的二阶位移分量连续, 据此得如下矩阵方程<sup>[2,4]</sup>:

$$[M(2\omega, 2k)] \times \begin{bmatrix} u_{(1)}^{(FC)} L_1 \cos\theta_{(1)} L + u_{(1)}^{(DL)} L_1 - L_1 \sin\theta_{(1)} L \\ u_{(1)}^{(FC)} T_1 \cos\theta_{(1)} T \\ u_{(1)}^{(FC)} L_2 \cos\theta_{(1)} L + u_{(1)}^{(DL)} L_2 - L_2 \sin\theta_{(1)} L \\ u_{(1)}^{(FC)} T_2 \cos\theta_{(1)} T \\ u_{(2)}^{(FC)} L_1 \cos\theta_{(2)} L + u_{(2)}^{(DL)} L_1 - L_1 \sin\theta_{(2)} L \\ u_{(2)}^{(FC)} T_1 \cos\theta_{(2)} T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ d \end{pmatrix} + [M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} u_{(1)}^{(FP)} L_1 \\ u_{(1)}^{(FP)} T_1 \\ u_{(1)}^{(FP)} L_2 \\ u_{(1)}^{(FP)} T_2 \\ u_{(2)}^{(FP)} L_1 \\ u_{(2)}^{(FP)} T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y^{(2)}(0) \\ u_z^{(2)}(0) \\ T_{yz}^{(2)}(0) \\ T_{yy}^{(2)}(0) \\ T_{yz}^{(2)}(d) \\ T_{yy}^{(2)}(d) \end{bmatrix} \quad (10)$$

式(10)中的系数矩阵  $[M(2\omega, 2k)]$  形式上与  $[M(\omega, k)]$  类似, 只需将  $[M(\omega, k)]$  的  $kd$  换为  $2kd$  即得  $[M(2\omega, 2k)]$ 。式(10)右端的应力  $T_{yz}^{(2)}(0), T_{yy}^{(2)}(0), T_{yz}^{(2)}(d)$  和  $T_{yy}^{(2)}(d)$  包括广义

兰姆波部分波经非线性虎克定律产生的二阶应力、不具有积累性质的驱动二次谐波经线性虎克定律产生的二阶应力, 以及积累二次谐波由线性虎克定律产生的不包括因子“ $z/d$ ”的二阶应力; 位移分量  $u_y^{(2)}(0)$  和  $u_z^{(2)}(0)$  则来源于驱动二次谐波。式(10)在任意位置都应成立, 据此有<sup>[2,4]</sup>:

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} u_{(1)}^{(FC)} L_1 \cos\theta_{(1)} L + u_{(1)}^{(DL)} L_1 - L_1 \sin\theta_{(1)} L \\ u_{(1)}^{(FC)} T_1 \cos\theta_{(1)} T \\ u_{(1)}^{(FC)} L_2 \cos\theta_{(1)} L + u_{(1)}^{(DL)} L_2 - L_2 \sin\theta_{(1)} L \\ u_{(1)}^{(FC)} T_2 \cos\theta_{(1)} T \\ u_{(2)}^{(FC)} L_1 \cos\theta_{(2)} L + u_{(2)}^{(DL)} L_1 - L_1 \sin\theta_{(2)} L \\ u_{(2)}^{(FC)} T_1 \cos\theta_{(2)} T \end{bmatrix} = 0 \quad (11a)$$

和

$$[M(2\omega, 2k)] \begin{bmatrix} u_{(1)}^{(FP)} L_1 \\ u_{(1)}^{(FP)} T_1 \\ u_{(1)}^{(FP)} L_2 \\ u_{(1)}^{(FP)} T_2 \\ u_{(2)}^{(FP)} L_1 \\ u_{(2)}^{(FP)} T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y^{(2)}(0) \\ u_z^{(2)}(0) \\ T_{yz}^{(2)}(0) \\ T_{yy}^{(2)}(0) \\ T_{yz}^{(2)}(d) \\ T_{yy}^{(2)}(d) \end{bmatrix} \quad (11b)$$

与兰姆波情形相类似,  $M(\omega, k = 0)$  确定出广义兰姆波的色散曲线。一般地, 由  $M(\omega, k) = 0$  并不能推得  $M(2\omega, 2k) = 0$ , 因此式(11a)只能有零解, 此时广义兰姆波的二阶谐波不具有与传播距离有关的积累性质。

通常人们对具有积累性质的二次谐波发生问题感兴趣, 鉴于此, 本文仅研究广义兰姆波的二阶谐波具有积累性质的情形。要使式(11a)有非零解, 必须存在关系式  $M(2\omega, 2k) = 0$ 。即要使广义兰姆波的二阶谐波具有积累性质, 必须  $M(\omega, k) = 0$  和  $M(2\omega, 2k) = 0$  同时满足<sup>[4]</sup>。

## 2.1 广义兰姆波的积累二次谐波发生条件

鉴于广义兰姆波是一种色散导波, 通常由  $M(\omega, k) = 0$  并不能得到  $M(2\omega, 2k) = 0$ 。因此, 寻找  $M(\omega, k) = 0$  和  $M(2\omega, 2k) = 0$  同时成立的条件就至关重要。因广义兰姆波的色散关系形式复杂, 通常不能得到解析

式, 下面采用数值方法来定量确定积累二次谐波发生的条件。

设构成图 1 所示声波导的  $M_1$  是玻璃、 $M_2$  是铁, 相应的介质参数为:  $\rho_{(1)} = 4463 \text{kg/m}^3$ 、 $\kappa_{(1)} = 41.1 \text{GPa}$ 、 $\mu_{(1)} = 21.7 \text{GPa}$  和  $\rho_{(2)} = 7700 \text{kg/m}^3$ 、 $\kappa_{(2)} = 172 \text{GPa}$ 、 $\mu_{(2)} = 84 \text{GPa}$ 。图 3 中的虚线是据  $M(\omega, k) = 0$  计算得到的广义兰姆波色散曲线, 实线是据  $M(2\omega, 2k) = 0$  计算出的二倍频广义兰姆波色散曲线, 虚线和实线的交点同时满足  $M(\omega, k) = 0$  和  $M(2\omega, 2k) = 0$ , 因此在这些交点处, 广义兰姆波的二次谐波具有空间积累性质。图 3 中  $c_{(1)R}$  为  $M_1$  的瑞利波速度。

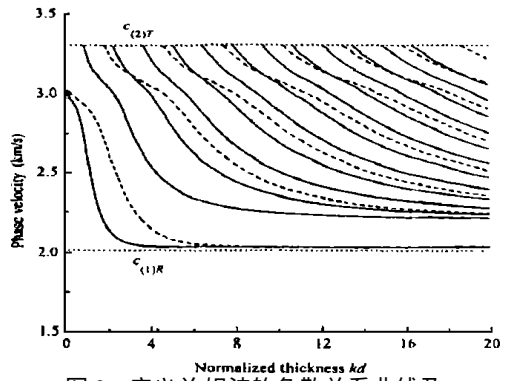


图 3 广义兰姆波的色散关系曲线及积累二次谐波的发生条件

## 2.2 积累二次谐波的解

当声波导中存在积累二次谐波时, 据式 (11a) 中的任意 5 个方程, 可解得:

$$\begin{bmatrix} u_{(1)L1}^{(FC)} \cos \theta_{(1)L} + u_{(1)L1-L1}^{(DL)} \sin \theta_{(1)L} \\ u_{(1)L2}^{(FC)} \cos \theta_{(1)L} + u_{(1)L2-L2}^{(DL)} \sin \theta_{(1)L} \\ u_{(1)T2}^{(FC)} \cos \theta_{(1)T} \\ u_{(2)L1}^{(FC)} \cos \theta_{(2)L} + u_{(2)L1-L1}^{(DL)} \sin \theta_{(2)L} \\ u_{(2)T1}^{(FC)} \cos \theta_{(2)T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{bmatrix} \cos \theta_{(1)T} u_{(1)T1}^{(FC)} \quad (12)$$

其中  $E_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  是由式 (11a) 中任意 5 个方程确定的常数, 式 (12) 又可变形为:

$$\begin{bmatrix} u_{(1)L1}^{(FC)} \\ u_{(1)L2}^{(FC)} \\ u_{(1)T2}^{(FC)} \\ u_{(2)L1}^{(FC)} \\ u_{(2)T1}^{(FC)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \cos \theta_{(1)T} u_{(1)T1}^{(FC)} / \cos \theta_{(1)L} - \sin \theta_{(1)L} u_{(1)L1-L1}^{(DL)} / \cos \theta_{(1)L} \\ E_2 \cos \theta_{(1)T} u_{(1)T1}^{(FC)} / \cos \theta_{(1)L} - \sin \theta_{(1)L} u_{(1)L1-L2}^{(DL)} / \cos \theta_{(1)L} \\ E_3 u_{(1)T1}^{(FC)} \\ E_4 \cos \theta_{(1)T} u_{(1)T1}^{(FC)} / \cos \theta_{(2)L} - \sin \theta_{(2)L} u_{(2)L1-L1}^{(DL)} / \cos \theta_{(2)L} \\ E_5 \cos \theta_{(1)T} u_{(1)T1}^{(FC)} / \cos \theta_{(2)T} \end{bmatrix} \quad (13)$$

在  $M_1$  和  $M_2$  中, 将驱动积累二次谐波和自由积累二次谐波对应的位移矢量沿  $oz$  轴分解, 得到沿  $oz$  轴方向的位移分量 [略去因子  $\exp(2jkz - 2\omega t)$ ], 以  $u_{(1)z}^{(2)}$  和  $u_{(2)z}^{(2)}$  表示:

$$u_{(1)z}^{(2)} = \sum_{n=1}^2 \left[ \begin{aligned} & \sin^2 \theta_{(1)L} u_{(1)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(1)L}ky] + \\ & \sin \theta_{(1)L} \cos \theta_{(1)L} u_{(1)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(1)L}ky] + \\ & \cos^2 \theta_{(1)T} u_{(1)Tn}^{(FC)} \exp[(-1)^n j\alpha_{(1)T}ky] \end{aligned} \right] \left( \frac{z}{d} \right) + \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \left[ \begin{aligned} & -\sin \theta_{(1)L} \cos \theta_{(1)L} u_{(1)Ln-Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(1)L}ky] \\ & + \sin^2 \theta_{(1)L} u_{(1)Ln}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(1)L}ky] \\ & + \sin \theta_{(1)T} \cos \theta_{(1)T} u_{(1)Tn}^{(FC)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{(1)T}ky] \end{aligned} \right] \left( \frac{y}{d} \right) \quad (14)$$

$$\text{和 } u_{(2)z}^{(2)} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta_{(2)L} u_{(2)L1-L1}^{(DL)} \exp[-2j\alpha_{(2)L}ky] \\ + \sin \theta_{(2)L} \cos \theta_{(2)L} u_{(2)L1}^{(FC)} \exp[-2j\alpha_{(2)L}ky] \\ + \cos^2 \theta_{(2)T} u_{(2)T1}^{(FC)} \exp[-2j\alpha_{(2)T}ky] \end{bmatrix} \left( \frac{z}{d} \right) +$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\theta_{2L}\cos\theta_{2L}u_{(2)L1}^{(DL)}\exp[-2j\alpha_{2L}ky] \\ +\sin^2\theta_{2L}u_{(2)L1}^{(FC)}\exp[-2j\alpha_{2L}ky] \\ +\sin\theta_{2T}\cos\theta_{2T}u_{(2)T1}^{(FC)}\exp[-2j\alpha_{2T}ky] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y \\ d \end{pmatrix} \quad (15)$$

在激发源处, 积累二次谐波应等于零(初始条件)。为使问题简单起见, 设激发源是一线源, 位于  $M_1$  的  $y = \xi$  和  $z = 0$  处, 据  $u_{(1)z}^{(2C)}|_{\text{激发源}} = 0$  和式(14)得<sup>[4, 5]</sup>:

$$\sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} -\sin\theta_{1L}\cos\theta_{1L}u_{(1)Ln}^{(DL)}\exp[(-1)^n 2j\alpha_{1L}kd(\xi/d)] \\ +\sin^2\theta_{1L}u_{(1)Ln}^{(FC)}\exp[(-1)^n 2j\alpha_{1L}kd(\xi/d)] \\ +\sin\theta_{1T}\cos\theta_{1T}u_{(1)Tn}^{(FC)}\exp[(-1)^n 2j\alpha_{1T}kd(\xi/d)] \end{bmatrix} = 0 \quad (16)$$

根据式(13)和(16), 解得:  $u_{(1)T1}^{(FC)} = (-1)(\xi) \sum_{n=1}^2 (-1)^{n-1} u_{(1)Ln}^{(DL)} \exp[(-1)^n 2j\alpha_{1L}kd(\xi/d)]$  (17)

将式(17)代入(13), 即得到各个待求的自由积累二次谐波。同理, 若线激发源位于  $M_2$  的  $y = \xi$  和  $z = 0$  处, 据  $u_{(2)z}^{(2C)}|_{\text{激发源}} = 0$  和式(15), 得到<sup>[4, 5]</sup>:

$$\sin\theta_{2L}\cos\theta_{2L}u_{(2)L1}^{(DL)}\exp[-2j\alpha_{2L}kd(\xi/d)] - \sin^2\theta_{2L}u_{(2)L1}^{(FC)}\exp[-2j\alpha_{2L}kd(\xi/d)] - \sin\theta_{2T}\cos\theta_{2T}u_{(2)T1}^{(FC)}\exp[-2j\alpha_{2T}kd(\xi/d)] = 0 \quad (18)$$

据式(13)和(18), 解得:

$$u_{(1)T1}^{(FC)} = {}_2(\xi) u_{(2)L1}^{(DL)} \exp[-2j\alpha_{2L}kd(\xi/d)] \quad (19)$$

将式(19)代入(13), 同样得到线激发源位于  $M_2$  时的各处待求自由积累二次谐波。

累二次谐波一起构成了声波导中广义兰姆波的积累二次谐波[以  $u^{(2C)}$  表示],  $u^{(2C)}$  形式上可写为:

上述分析过程给出了激发线源分别位于  $M_1$  和  $M_2$  时的自由积累二次谐波, 与驱动积

$$u^{(2C)} = \sum_{m,n=1}^2 \left\{ \begin{bmatrix} u_{(m)Ln}^{(DL)} \left[ \sin\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^n \cos\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \\ + u_{(m)Ln}^{(FC)} \left[ \cos\theta_{mL} \frac{z}{d} + (-1)^{(n-1)} \sin\theta_{mL} \frac{y}{d} \right] \\ + u_{(m)Tn}^{(FC)} \left[ \cos\theta_{mT} \frac{z}{d} + (-1)^{(n-1)} \sin\theta_{mT} \frac{y}{d} \right] (-1)^n [\hat{x} \times \mathbf{K}_{(m)Ln}^0] \exp[2j\mathbf{K}_{(m)Ln} \cdot \mathbf{r}_n] \end{bmatrix} \right\} \quad (20)$$

在式(20)中,  $u_{(m)Ln}^{(DL)}$  由式(7)确定,  $u_{(m)Tn}^{(FC)}$ 、 $u_{(m)Ln}^{(FC)}$  由式(13-19)给出;  $m = 1, n = 1, 2; m = 2, n = 1$ 。式(20)表明, 广义兰姆波的积累二次谐波具有随传播距离积累增长的性质, 且与激发源的位置密切相关(与  $\xi$  有关)。显然, 式(20)仅在一定传播范围内成立, 此时谐波应远小于基波能量。

波的二次谐波在声波导中传播一定距离后, 积累二次谐波占主导地位, 不能确定自由平面二次谐波并不重要<sup>[2]</sup>。

### 3 结束语

通常, 式(11b)右端不为零, 且有  $M(2\omega, 2k) = 0$ , 即自由平面二次谐波不存在有物理意义之解, 这是本文分析不足之处。但是, 鉴于积累二次谐波随空间积累增长, 广义兰姆

本文采用二阶微扰近似、色散导波的部分波分析方法和界面非线性声反射技术, 对广义兰姆波的积累二次谐波发生问题进行了理论研究。广义兰姆波作为一种色散导波, 通常不会有积累二次谐波发生, 但在一些特殊条件下仍有可能导致积累二次谐波的发生;

寻找广义兰姆波的积累二次谐波发生条件在实际应用中具有重要意义, 本文对此作了数值分析并给出了积累二次谐波发生的条件。此外, 文中还给了了广义兰姆波的积累二次谐波的形式解, 该解对定量研究积累二次谐

波声场具有重要意义。研究结果表明, 积累二次谐波与传播距离呈线性增长关系, 且积累二次谐波的声场与激发源位置密切相关。本文的研究分析过程, 为探讨层状结构声波导中的积累二次谐波发生奠定了基础。

## 附录

式(3)中的系数矩阵 $[M(\omega, k)]$ 如下<sup>[3,4]</sup>:

$$\begin{bmatrix} -\cos\theta_{(1)L} & \sin\theta_{(1)T} & \cos\theta_{(1)L} & -\sin\theta_{(1)T} & \cos\theta_{(2)L} & -\sin\theta_{(2)T} \\ \sin\theta_{(1)L} & \cos\theta_{(1)T} & \sin\theta_{(1)L} & \cos\theta_{(1)T} & -\sin\theta_{(2)L} & -\cos\theta_{(2)T} \\ M_{(1)31} & M_{(1)32} & -M_{(1)31} & -M_{(1)32} & -M_{(2)31} & -M_{(2)32} \\ M_{(1)41} & M_{(1)42} & M_{(1)41} & M_{(1)42} & -M_{(2)41} & -M_{(2)42} \\ M_{(1)31}R_{(1)L-} & M_{(1)32}R_{(1)T-} & -M_{(1)31}R_{(1)L+} & -M_{(1)32}R_{(1)T+} & 0 & 0 \\ M_{(1)41}R_{(1)L-} & M_{(1)42}R_{(1)T-} & M_{(1)41}R_{(1)L+} & M_{(1)42}R_{(1)T+} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$M_{(m)31} = -2\cos\theta_{(m)L}\mu_{(m)}, M_{(m)32} = -[\alpha_{(m)T}^2 - 1]\sin\theta_{(m)T}\mu_{(m)},$$

$$M_{(m)41} = [(\kappa_{(m)} + 4\mu_{(m)}/3)\alpha_{(m)L}^2 + \kappa_{(m)} - 2\mu_{(m)}/3]\sin\theta_{(m)L}, M_{(m)42} = -2\mu_{(m)}\cos\theta_{(m)T},$$

$$R_{(m)L\pm} = \exp(\pm j\alpha_{(m)L}kd), R_{(m)T\pm} = \exp(\pm j\alpha_{(m)T}kd)。$$

式(17)(19)中的常数 $\Theta_{(1)}(\xi)$ 和 $\Theta_{(2)}(\xi)$ 分别为:

$$\Gamma_{(m)}(\xi) = \frac{\sin\theta_{(m)L}\cos\theta_{(m)L} + \tan\theta_{(m)L}\sin^2\theta_{(m)L}}{\Theta_{(m)}(\xi)}, \quad m = 1, 2$$

其中

$$\Gamma_{(1)}(\xi) = \frac{\cos\theta_{(1)T}\sin^2\theta_{(1)L}}{\cos\theta_{(1)L}} \left\{ E^1 \exp[-2j\alpha_{(1)L}kd(\xi/d)] - E^2 \exp[2j\alpha_{(1)L}kd(\xi/d)] + \sin\theta_{(1)T} \{ \exp[-2j\alpha_{(1)T}kd(\xi/d)] - E^3 \exp[2j\alpha_{(1)T}kd(\xi/d)] \} \right\}$$

$$\Theta_{(2)}(\xi) = \frac{\cos\theta_{(1)T}\sin^2\theta_{(2)L}}{\cos\theta_{(2)L}} E^4 \exp[-2j\alpha_{(2)L}kd(\xi/d)] + \cos\theta_{(1)T}\sin\theta_{(2)T} E^5 \exp[-2j\alpha_{(2)T}kd(\xi/d)]$$

参考文献:

- [1] Auld B A. Acoustic fields and waves in solids [M]. New York: John Wiley & Sons Inc., 1973, 2.
- [2] Zhou S and Shui Y. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves at an interface[J]. Journal of Applied Physics, 1992; 72: 5070 ~ 5080.
- [3] 邓明晰. 兰姆波的非线性研究( ) ( ) [J], 声学学报. 1996; 21: 249 ~ 438; 1997; 22: 182 ~ 187.
- [4] Deng Mingxi. Cumulative second-harmonic generation of Lamb mode propagation in a solid plate[J]. Journal of Applied Physics, 1999; 85: 3051 ~ 3058.
- [5] Deng Mingxi. Cumulative second-harmonic generation accompanying nonlinear shear horizontal mode propagation in a solid plate [J]. Journal of Applied Physics, 1998; 84: 3500 ~ 3505.