

固体板中 SH 型板波的二阶和频积累波发生*

邓明晰*

(重庆后勤工程学院, 重庆 400016)

摘要: 当各向同性固体板中传播的 SH 型板波模式包含两个频率成分时, 板材的非线性将导致二阶和频及差频声波的发生。本文在二阶近似条件下对此问题进行了研究, 得到如下结论: 1) 二阶差频声波不具有随传播距离积累增长的性质; 2) 两个 SH 型板波模式的阶数和频率满足一定关系时, 二阶和频声波可以具有随传播距离积累增长的性质; 3) 二阶和频积累波声场呈对称性质。本文还给出了满足边界条件和初始条件的二阶和频积累波解的解析表达式。

关键词: SH 型板波; 和频; 积累效应

中图分类号: O422.7 文献标识码: A

Generation of second-order sum frequency cumulative waves of SH plate modes in an isotropic plate

DENG Ming-xi

(Logistical Engineering University, Chongqing 400016, China)

Abstract: Generation of second-order sum frequency and difference frequency acoustic waves due to the bulk nonlinearity of the plate material will occur once SH plate modes propagating in an isotropic plate include two frequencies. An approach based on second-order approximation is described for studying the generation of second-order acoustic waves, which arise from the cross-interaction of the partial bulk waves of two SH plate modes with different frequencies. One can draw the following conclusions: 1) second-order difference frequency acoustic waves must not have the character of cumulative growth; 2) second-order sum frequency acoustic waves may have the character of cumulative growth once some conditions between the excitation frequencies and the order numbers of two SH plate modes are satisfied; 3) the fields of second-order sum frequency cumulative waves retain the symmetry character. The present article also gives out the analytical expressions of second-order sum frequency cumulative waves, which satisfy the boundary and initial conditions of excitation.

Keywords: SH plate modes; sum frequency; cumulative effect

1 引言

边界自由的固体板是一种最简单的声波导, 许多实际的声波导都可用它来作近似。一般在边界自由的固体板中可以独立地传播兰姆波模式或 SH 型板波模式, 两种模式都具有色散性质。用换能器在固体板中激发兰姆波模式或 SH 型板波模式, 已广泛应用于声传感技术、声电子学和声无损检测等领域。当固体板中传播的声波模式具有较强的声能量

时, 势必要考虑由板材非线性所引发的二阶效应。在二阶近似下, 由于固体板中传播的声波模式具有色散性质, 只有在一定条件下板中二次谐波才具有空间积累性质^[1-3]。

一般地说, 实际激发声源所包含的频率不只一个, 当其具有两个以上频率时, 在二阶近似条件下, 板中除有二次谐波外, 还存在二阶和频及差频声波。即使二次谐波不具有随传播距离积累增长的性质, 频率不同的基波模式相互作用所产生的二阶和频及差频声波, 还是有可能具有积累性质的。鉴于人们对具有积累效应的二阶声波表现出的浓厚兴趣, 本文将对二阶和频及差频声波具有积累

* 收稿日期: 99-07-23; 修订日期: 99-08-30

南京大学近代声学国家重点实验室开放基金资助

作者简介: 邓明晰(1965-), 男, 副教授。

性质的情形进行研究, 给出相应的积累波之解。为简化分析过程, 本文仅对各向同性固体板中 SH 型板波模式的情形进行探讨, 并作如下假定: 固体板材是非色散的; 不考虑三阶以上效应; 二阶声波与基波之间无能量交换。

2 基本理论

对板材无色散且各向同性的固体板建立坐标如图 1 所示, 根据研究导波所采用的部分波叠加处理方法^[4], SH 型板波模式由满足边界条件的位移矢量垂直于传播方向的两个切变体声波(部分波)构成。考虑到两个切变体声波沿固体板表面满足相位匹配条件, 所对应的两个波矢量沿 oz 轴的分量在数值上应相等, 构成频率为 f_i 阶数为 l 的 SH 型板波模式[简记为 (f_i, l)]的两个切变体声波形式上可表示为^[1,4]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{f_i, l, T1} &= u_{f_i, l, T1x} \exp\{j\mathbf{K}_{f_i, l, T1} \cdot \mathbf{r}_1 - j\omega t\} \\ \mathbf{u}_{f_i, l, T2} &= u_{f_i, l, T2x} \exp\{j\mathbf{K}_{f_i, l, T2} \cdot \mathbf{r}_2 - j\omega t\} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

且存在如下关系:

$$\left. \begin{aligned} K_{f_i, l, T} &= \mathbf{K}_{f_i, l, Ti} = \omega / c_T \\ \mathbf{K}_{f_i, l, Ti} \cdot \mathbf{r}_i &= k_{f_i, l} z + (-1)^{i-1} \alpha_{f_i, l, T} k_{f_i, l} y \\ k_{f_i, l} &= K_{f_i, l, T} \sin \theta_{f_i, l, T} = \omega / c_{f_i, l} \\ \alpha_{f_i, l, T} k_{f_i, l} &= K_{f_i, l, T} \cos \theta_{f_i, l, T}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在式(1)(2)中, 各物理量的下标 (f_i, l) 表示该量对应于 (f_i, l) 模式, $\mathbf{u}_{f_i, l, T1}$ 和 $\mathbf{u}_{f_i, l, T2}$ 表示位移矢量, $u_{f_i, l, T1}$ 和 $u_{f_i, l, T2}$ 是位移矢量的振幅, $\omega = 2\pi f_i$, $K_{f_i, l, T}$ 是波矢 $\mathbf{K}_{f_i, l, Ti}$ 对应的波数, c_T 为固体板材的横波声速, $c_{f_i, l}$ 为 (f_i, l) 模式的相速度, \hat{x} 为 ox 轴的单位矢量。

据边界条件 $T_{yx}(\pm d) = 0$, 得色散关系 $2\alpha_{f_i, l, T} k_{f_i, l} d = \pi l, l = 1, 2, 3, \dots$, 可将其变形为:

$$c_{f_i, l} = 4f_i d \cdot c_T / \sqrt{(4f_i d)^2 - (l \cdot c_T)^2} \quad (3)$$

很显然, 固体板中要存在 (f_i, l) 模式, 必须

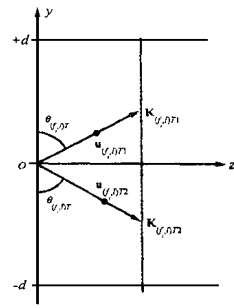


图 1 各向同性固体中 (f_i, l) 模式的部分波位移场 $f_i d > (l \cdot c_T) / 4$ 。在固体板中两个切变体声波的位移振幅存在关系: $u_{f_i, l, T1} = (-1)^l u_{f_i, l, T2}$ 。当 l 为奇数或偶数时, SH 型板波模式的位移场分别具有反对称或对称性质。

采用逐级近似法得到各向同性固体介质的二阶波动方程为^[5]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2} - (\kappa + 4\mu/3) \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) + \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{(2)}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{u}^{(1)}$ 、 $\mathbf{u}^{(2)}$ 分别为基波和二阶声波对应的位移矢量, ρ 为板材质量密度, κ, μ 为二阶弹性常数。考虑不同频率的两个 SH 型板波模式 (f_1, m) 和 (f_2, n) , 此时基波的位移矢量为:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_{f_1, m, T1} + \mathbf{u}_{f_1, m, T2} + \mathbf{u}_{f_2, n, T1} + \mathbf{u}_{f_2, n, T2} \quad (5)$$

因各个 SH 型板波模式自作用产生的二阶效应已作过探讨, 本文仅讨论不同频率的基波模式间的非线性相互作用。式(5)对应的基波位移矢量取实部才有实际意义, 将其实部代入式(4)右端的驱动项 $\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)})$, 可得到和频及差频驱动项。为简便起见, 驱动项形式上仍以指数形式表示(物理上的驱动项应取其实际部), 略去因子 $\exp[j - (\omega \pm \omega) t]$ 后的驱动项形式上可表示为^[1-3]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}^{(1)}) = \sum_{p, q=1, 2} \left\{ \begin{aligned} &F_{f_1 \pm f_2, m, n, pq}^{(DL)} \mathbf{K}_{f_1 \pm f_2, m, n, pq}^0 \\ &+ (-1)^{p-1} F_{f_1 \pm f_2, m, n, pq}^{(DT)} [\hat{x} \times \mathbf{K}_{f_1 \pm f_2, m, n, pq}^0] \end{aligned} \right\} \exp[j\mathbf{K}_{f_1 \pm f_2, m, n, pq} \cdot \mathbf{r}_p] \quad (6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}(f_1 \pm f_2, m, n) p q &= \mathbf{K}(f_1, m) T_p \pm \mathbf{K}(f_2, n) T_q \\ \mathbf{K}(f_1 \pm f_2, m, n) p q \quad \mathbf{r}_p &= [k(f_1, m) \pm k(f_2, n)] z + \\ [(-1)^{p-1} \alpha_{f_1, m} T k(f_1, m) \pm (-1)^{q-1} \alpha_{f_2, n} T k(f_2, n)] y \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

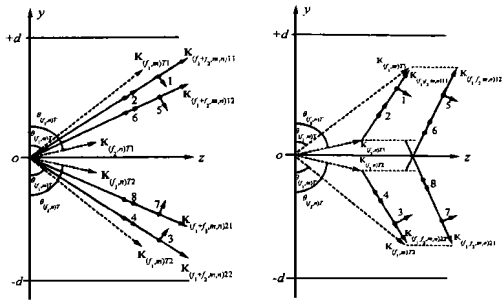
式(6)(7)中,下标 $(f_1 \pm f_2, m, n) p q$ 表示相应物理量与部分波 $\mathbf{u}(f_1, m) T_p$ 、 $\mathbf{u}(f_2, n) T_q$ 的和频及差频作用有关, $\mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^0$ 是波矢 $\mathbf{K}(f_1 \pm f_2, m, n) p q$ 对应的单位矢量。由式(6)可知,对于和频与差频情形,分别存在4个横波及4个纵波驱动项,将式(6)代入式(4),得到二阶和频及差频驱动波的位移矢量(见图2),其形式为:

$$\left. \begin{aligned} u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DL)} &= \frac{u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DD)} \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^0}{[c_L^2 \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} \quad \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} - (\omega \pm \omega_2)^2]} \exp[j\mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} \cdot \mathbf{r}_p] \\ u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DL)} &= \frac{F_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DL)}}{[c_L^2 \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} \quad \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} - (\omega \pm \omega_2)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

和

$$\left. \begin{aligned} u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DT)} &= (-1)^{p-1} (\hat{x} \times \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}) u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DT)} \exp[j\mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} \cdot \mathbf{r}_p] \\ u_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DT)} &= \frac{F_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{(DT)}}{[c_T^2 \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} \quad \mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q} - (\omega \pm \omega_2)^2]} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中 c_L 为板材介质的声纵波速度。



(a) 和频

(b) 差频

- 1— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 11}^{(DT)}$, 2— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 11}^{(DL)}$, 3— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 22}^{(DT)}$,
4— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 22}^{(DL)}$, 5— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 12}^{(DT)}$, 6— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 12}^{(DL)}$,
7— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 21}^{(DT)}$, 8— $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) 21}^{(DL)}$

图2 二阶和频及差频驱动波位移场;

要使固体板中的二阶和频及差频声波具有空间积累增长性质,只有相应的和频及差频驱动波的位移矢量发生“共振”才有可能,这就要求式(8)(9)分母必须等于零。据此得^[1]:

$$\left. \begin{aligned} (\omega \pm \omega_2)^2 \left[\frac{c_T^2}{c_Q^2} - 1 \right] &= \pm 2\omega\omega_2 \\ [\cos(\theta_{f_1, m} T - \theta_{f_2, n} T) - 1], \quad p = q \quad (10) \\ (\omega \pm \omega_2)^2 \left[\frac{c_T^2}{c_Q^2} - 1 \right] &= \pm 2\omega\omega_2 \\ [-\cos(\theta_{f_1, m} T + \theta_{f_2, n} T) - 1], \quad p \neq q \quad (11) \end{aligned} \right\}$$

式(10~11)中下标 $Q = T, L$ 表示相应物理量对应于横波和纵波,“±”中的“+”和“-”分别对应和频及差频情形。考虑式(10)(11)中的横波情形,其左端等于零,据此得到 $\theta_{f_1, m} T = \theta_{f_2, n} T$ 和 $\theta_{f_1, m} T + \theta_{f_2, n} T = \pi$ 。当 $\theta_{f_1, m} T = \theta_{f_2, n} T$ 时, $F_{(f_1 \pm f_2, m, n) p q}^{DT} = 0$;另一方面,由式(3)可以推得 $c(f_{i,l}) > cT$,因此有 $\theta_{f_{i,l}} < \pi/2$,考虑两个不同频率的模式 (f_1, m) 和 (f_2, n) ,必然有 $\theta_{f_1, m} T + \theta_{f_2, n} T < \pi$ 与由式(11)推得的 $\theta_{f_1, m} T + \theta_{f_2, n} T = \pi$ 的情形不符。因此,二阶驱动横波一定不会发生“共振”。

接下来讨论式(10)(11)对应的纵波情形。因 $c(f_{i,l}) > cT$,有 $\sin\theta_{f_{i,l}} T < 1$ 和 $\cos\theta_{f_{i,l}} T < 1$ ($i = 1, 2; l = m, n$),则 $\cos[\theta_{f_1, m} T \pm \theta_{f_2, n} T] \leq 1$ 必然成立。对于式(10)(11)中的差频情形,式(10)(11)的左端和右端分别小于零和大于等于零,式(10)(11)不成立。因此,二阶差频驱动纵波一定不会发生“共振”,二阶和频驱动纵波才可能有“共振”现象发生。二阶和频驱动纵波发生“共振”条件如下:

$$\left. \begin{aligned} (\omega + \omega_2)^2 \left[\frac{c_T^2}{c_L^2} - 1 \right] &= 2\omega\omega_2 \\ [\cos(\theta_{f_1, m} T - \theta_{f_2, n} T) - 1], \quad p = q \quad (12) \\ (\omega + \omega_2)^2 \left[\frac{c_T^2}{c_L^2} - 1 \right] &= -2\omega\omega_2 \\ [\cos(\theta_{f_1, m} T + \theta_{f_2, n} T) + 1], \quad p \neq q \quad (13) \end{aligned} \right\}$$

本文下面将主要探讨满足“共振”条件的二阶和频积累波的发生问题。具有空间积累性质的二阶和频驱动纵波(其位移矢量以 $\mathbf{u}_{(f_1+f_2, m, n) p q}^{(DL)}$ 表示)之解可表示为^[3]:

$$\left. \begin{aligned} u_{(f_1+f_2, m, n) p q}^{(DL)} &= u_{(f_1+f_2, m, n) p q}^{(DL)} \left[\frac{z}{d} \sin\theta_{f_1+f_2, L} + (-1)^{p-1} \frac{y}{d} \cos\theta_{f_1+f_2, L} \right] \\ &\times \mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n) p q}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n) p q} \cdot \mathbf{r}_p] \\ u_{(f_1+f_2, m, n) p q}^{(DL)} &= \frac{jF_{(f_1+f_2, m, n) p q}^{(DL)} \times d}{4(k + 4\mu/3) K_{(f_1+f_2, m, n)}}, \quad p, q = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)中 $K_{(f_1+f_2, m, n)}$ 是波矢 $\mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n) p q}$ 对应

的波数且有 $K_{(f_1+f_2, m, n)} = (\omega + \omega) / c_L$, $\theta_{f_1+f_2, L}$ 是 $\mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq}$ 与 oy 轴的夹角, 其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq} \mathbf{r}_p &= [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}]z + (-1)^{p-1} \cdot \\ &\quad \alpha_{f_1+f_2, m, n} L [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}]y \\ K_{(f_1+f_2, m, n)} \sin \theta_{(f_1+f_2)L} &= k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} \\ K_{(f_1+f_2, m, n)} \cos \theta_{(f_1+f_2)L} &= \alpha_{f_1+f_2, m, n} L [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}] \\ &= \alpha_{(f_1, m)} T k_{(f_1, m)} \pm \alpha_{(f_2, n)} T k_{(f_2, n)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)中‘±’的‘+’和‘-’分别对应 $p = q$ 和 $p \neq q$ 情形。

在固体板的上下两个表面, 二阶和频声波的应力等于零。在板中, 和频声波的应力包括两部分, 一是由 (f_1, m) 和 (f_2, n) 模式的部分波非线性相互作用产生的二阶和频应力(非线性虎克定律); 二是源于二阶和频驱动波根据虎克定律得到的二阶和频应力。通常, 仅考虑上述两种应力并不能满足固体板上下表面处二阶和频应力为零的边界条件, 还须在固体板中引入二阶和频自由波。因驱动波和自由波沿 oz 轴应满足相位匹配条件, 二阶和频自由波的位移矢量解在形式上可表示为(见图3)^[3, 6]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{p,r}^{(F)} &= \mathbf{u}_{p,r}^{(FQ)} + \mathbf{u}_{p,r}^{(FP)} \\ \mathbf{u}_{p,r}^{(FC)} &= u_{Tp}^{(FC)} \left[\frac{z}{d} \cos \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} + (-1)^p \frac{y}{d} \sin \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} \right] \\ &\quad \times \mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq} \mathbf{r}_p] \\ \mathbf{u}_{p,r}^{(FP)} &= u_{Tp}^{(FP)} \mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq}^0 \exp[j\mathbf{K}_{(f_1+f_2, m, n)pq} \mathbf{r}_p], \quad p, q = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{p,r}^{(F)} &= \mathbf{u}_{p,r}^{(FQ)} + \mathbf{u}_{p,r}^{(FP)} \\ \mathbf{u}_{p,r}^{(FC)} &= u_{Tp}^{(FC)} \left[\frac{z}{d} \cos \theta_{(f_1+f_2)L} + (-1)^p \frac{y}{d} \sin \theta_{(f_1+f_2)L} \right] \times \\ &\quad (-1)^{(p-1)} (\hat{x} \times \mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}^0) \exp[j\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L} \mathbf{r}_p] \\ \mathbf{u}_{p,r}^{(FP)} &= (-1)^{(p-1)} u_{Tp}^{(FP)} (\hat{x} \times \mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}^0) \exp[j\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L} \mathbf{r}_p], \quad p = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中, 和频横波波矢 $\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}$ 的波数 $K_{(f_1+f_2)L} = (\omega + \omega) / c_T$, $\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}^0$ 是沿 $\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}$ 的单位矢量, 式(16)(17)中的 $\mathbf{u}_{p,r}^{(FC)}$ 和 $\mathbf{u}_{p,r}^{(FP)}$ 表示和频自由积累波, $\mathbf{u}_{p,r}^{(FP)}$ 和 $\mathbf{u}_{p,r}^{(FP)}$ 表

示和频自由平面波, 图3给出了和频自由波的声场, θ_{-T} 是 $\mathbf{K}_{(f_1+f_2)L}$ 与 oy 轴的夹角, 且有:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{K}_{(f_1+f_2)L} \mathbf{r}_p &= [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}]z + (-1)^{p-1} \\ &\quad \alpha_{f_1+f_2, m, n} L [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}]y \\ K_{(f_1+f_2)L} \sin \theta_{(f_1+f_2)L} &= k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} \\ K_{(f_1+f_2)L} \cos \theta_{(f_1+f_2)L} &= \alpha_{f_1+f_2, m, n} L [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}] \\ \alpha_{f_1+f_2, m, n} &= \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2 / [\omega_1 \sin \theta_{(f_1, m)L} + \omega_2 \sin \theta_{(f_2, n)L}]^2 - 1}{\quad} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

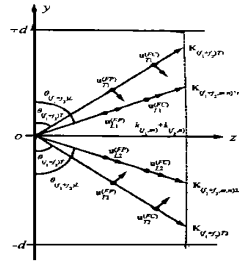


图3 固体板中二阶和频自由波的位移场

据二阶和频应力在边界 $y = \pm d$ 处为零的边界条件, 可得下面两组矩阵方程^[3, 6]:

$$[M] \begin{bmatrix} u_{T1}^{(FC)} \cos \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} + u_{(f_1+f_2, m, n)r}^{(DL)} \sin \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} \\ u_{T1}^{(FC)} \cos \theta_{f_1+f_2} \\ u_{T2}^{(FC)} \cos \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} + u_{(f_1+f_2, m, n)2s}^{(DL)} \sin \theta_{(f_1+f_2, m, n)L} \\ u_{T2}^{(FC)} \cos \theta_{f_1+f_2} \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

和

$$j[M] \begin{bmatrix} u_{L1}^{(FP)} \\ u_{T1}^{(FP)} \\ u_{L2}^{(FP)} \\ u_{T2}^{(FP)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sigma_{yz}(+d) \\ \sigma_{yz}(-d) \\ \sigma_{yy}(+d) \\ \sigma_{yy}(-d) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式(19)(20)中的系数矩阵 $[M]$ 在附录中给出, 式(20)右端的二阶和频应力矩阵来源于二阶和频驱动波, 以及由式(16)(17)给出的二阶和频自由积累波(在计算二阶和频应力时, 不包含变量 z 的应力项一律移到式(20)的右端); 式(19)中, 当 $p = q$ 时, $r = 1, s = 2$; 当 $p \neq q$ 时, $r = 2, s = 1$ 。由系数矩阵 $[M]$ 的形式可知, 一般地, $M \neq 0$, 式(19)只能有零解, 由式(20)可求解出二阶和频自由平面波。

当 $M = 0$ 时, 总的二阶和频声波(包括二阶和频驱动波和二阶和频自由波)沿传播方向(即 oz 轴方向)无积累性质。要使二阶和

频声波沿传播方向具有空间积累性质, 式(19)应有非零解, 这就要求 $M = 0$ 。式(19)的 $[M]$ 与固体板中由兰姆波边界条件得到的系数矩阵有相同形式 ($\sin\theta_{f_1+f_2}T$ 、 $\cos\theta_{f_1+f_2}T$ 、 $\sin\theta_{f_1+f_2}L$ 和 $\cos\theta_{f_1+f_2}L$ 的形式由式(15)(18)给出)。当 $M = 0$ 时, 由式(19)可推得^[3]:

$$\left. \begin{aligned} & u_{L1}^{(FC)} \cos\theta_{f_1+f_2}L + u_{(f_1+f_2, m, n)}^{(DL)} \text{lr} \sin\theta_{f_1+f_2}L \\ & = \pm [u_{L1}^{(FC)} \cos\theta_{f_1+f_2}L + u_{(f_1+f_2, m, n)}^{(DL)} 2s \sin\theta_{f_1+f_2}L] \\ & u_{T1}^{(FC)} = \pm u_{T2}^{(FC)}, r = 1, s = 2 \text{ 或 } r = 2, s = 1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

即固体板中的二阶和频积累波位移动场具有对称或反对称性质。据 $F_{(f_1+f_2, m, n)pq}^{(DL)}$ 的形式并结合 $u_{(f_i, l)T1} = (-1)^l u_{(f_i, l)T2}$ ($i = 1, 2; l = m, n$), 得到: $u_{(f_1+f_2, m, n)1r}^{(DL)} = (-1)^{m \pm n} u_{(f_1+f_2, m, n)2s}^{(DL)}$ 。当 m 与 n 同时为奇数或偶数时, $m \pm n =$ 偶数, 可得 $u_{(f_1+f_2, m, n)1r}^{(DL)} = u_{(f_1+f_2, m, n)2s}^{(DL)}$, 结合式(21), 有 $u_{L1}^{(FC)} = u_{L2}^{(FC)}$ 和 $u_{T1}^{(FC)} = u_{T2}^{(FC)}$; 当 m 与 n 分别为奇数和偶数时, $m \pm n =$ 奇数, 有 $u_{(f_1+f_2, m, n)1r}^{(DL)} = -u_{(f_1+f_2, m, n)2s}^{(DL)}$, 结合式(21), 可得 $u_{L1}^{(FC)} = -u_{L2}^{(FC)}$ 和 $u_{T1}^{(FC)} = -u_{T2}^{(FC)}$ 。

要使二阶和频波具有积累性质, 式(12)或(13)与 $M = 0$ 须同时成立。

据 $2\alpha_{(f_i, l)T} k_{(f_i, l)} d = \pi l$ 和式(15), 得:

$$\begin{aligned} & \alpha_{f_1+f_2, m, n} L (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}) d \\ & = \alpha_{(f_1, m)T} k_{(f_1, m)} T d \pm \alpha_{(f_2, n)T} k_{(f_2, n)} T d \\ & = (m \pm n) \pi l \quad (22) \end{aligned}$$

鉴于 $[M]$ 与固体板中由兰姆波边界条件得到的系数矩阵相似, 据 $M = 0$ 可得相应的色散关系^[3,4], 将色散关系结合式(22), 得:

$$\begin{aligned} & \cos[\alpha_{f_1+f_2} T (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}) d] = 0, \\ & m \pm n = \text{奇数} \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{或} \\ & \sin[\alpha_{f_1+f_2} T (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}) d] = 0, \\ & m \pm n = \text{偶数} \quad (24) \end{aligned}$$

对式(23)或(24)进行计算时, 对于确定的模

式阶数 m 和 n , 可给出变量 f_{1d} 与 f_{2d} 间的关系曲线; 此外, 式(12)或(13)也可给出 f_{1d} 与 f_{2d} 间的变化曲线, 两组曲线的交点参数保证了固体板中能够发生二阶和频积累波。由交点处的 f_{1d} 、 f_{2d} 及 SH 模式的阶数 m 、 n , 可得到二阶和频积累波的相速度 $c_{(f_1+f_2, m, n)}$ (注: $c_{(f_1+f_2, m, n)} = (\omega + \omega) / [k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)}]$)。

鉴于 $[M]$ 的形式与固体板中由兰姆波边界条件确定的系数矩阵完全类似, 当式(12)或(13)与(23)或(24)同时满足时, 激发源位于 $z = 0$ 面, 有初始条件 $u_{(f_1+f_2)z=0}^{(2C)} = 0$ ($u_{(f_1+f_2)z}$ 是和频驱动积累波与和频自由积累波的位移矢量沿 oz 轴的分量)。确定满足边界条件和初始条件的和频自由积累波的解析解的过程参见文献[1~3], 本文直接给出有关结论, 具体过程不再赘述。和频自由积累波与和频驱动积累波存在关系:

$$\left. \begin{aligned} & u_{T1}^{(FC)} = \Gamma_T u_{(f_1+f_2, m, n)12}^{(DL)}, u_{T2}^{(FC)} = \Gamma_T u_{(f_1+f_2, m, n)21}^{(DL)} \\ & u_{L1}^{(FC)} = \Gamma_L u_{(f_1+f_2, m, n)12}^{(DL)}, u_{L2}^{(FC)} = \Gamma_L u_{(f_1+f_2, m, n)21}^{(DL)} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

当 $m \pm n$ 为奇数, 在由式(19)和 $u_{(f_1+f_2)z=0}^{(2C)} = 0$ 确定式(25)中的 Γ_T 和 Γ_L 时, 考虑到式(23)成立, 此时不能确定出有意义的常数 Γ_T 和 Γ_L , 即具有反对称性质的二阶和频积累波不存在; 在式(24)成立时(此时 $\sin\theta_{f_1+f_2}T = 0$), 可确定出 Γ_T 和 Γ_L (见附录), 即只有对称的和频积累波才能发生。

通过具体的数值计算说明固体板中发生二阶和频积累波的条件, 板材选为铁, 其横波和纵波声速分别为 $3.303 \times 10^3 \text{ m/s}$ 和 $6.073 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。具体计算表明, 当式(15)中的 $p = q$ 时, 式(12)与(24)给出的两组 f_{1d} 、 f_{2d} 曲线无交点, 即式(12)与(24)不能同时满足; 对于式(15)中的 $p \neq q$ 情形, 式(13)与式(24)给出的两组 f_{1d} 、 f_{2d} 曲线相交, 如图4所示, 图中的横纵轴单位: 10^3 m/s , 虚线和实线分别

对应于式(13)和(24),图中交点对应的坐标是二阶和频积累波的发生条件。对于图4中的一个交点 P , $(m, n) = (9, 11)$, $(f_1 d, f_2 d) = (12.3, 9.3)$, 因此有 $c_{(f_1, m)} = 4.145$, $c_{(f_2, n)} = 15.39$ 和 $c_{(f_1+f_2, m, n)} = 6.047[f_i d (i = 1, 2)]$ 和相速度的单位均为 10^3 m/s 。

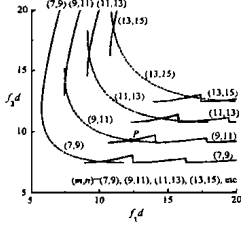


图4 二阶和频积累波的发生条件

固体板中二阶和频积累波解(包括驱动积累波和自由积累波)可表示为:^[3]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{(f_1+f_2)}^{(2C)} = & \sum_{p, q=1}^2 \sum_{\substack{DL \\ u_{(f_1+f_2, m, n)} pq}} \left[\begin{aligned} & (-1)^p (-\cos \theta_{(f_1+f_2)} L + \Gamma_L \sin \theta_{(f_1+f_2)} L) \frac{y}{d} \\ & + (\sin \theta_{(f_1+f_2)} L + \Gamma_L \cos \theta_{(f_1+f_2)} L) \frac{z}{d} \end{aligned} \right] \\
 & \times \mathbf{K}(f_1+f_2, m, n) p q \exp(j \mathbf{K}(f_1+f_2, m, n) \cdot \mathbf{r}_p) \\
 & + \sum_{p, q=1}^2 \sum_{\substack{DL \\ \Gamma^T u_{(f_1+f_2, m, n)} pq}} \left[\cos \theta_{(f_1+f_2)} T \frac{z}{d} \right] \\
 & \times (-1)^{p-1} (\mathbf{x} \times \mathbf{K}(f_1+f_2) T_p) \exp(j \mathbf{K}(f_1+f_2) \cdot \mathbf{r}_p), \quad p, q
 \end{aligned} \quad (26)$$

至此,固体板中伴随基波传播所发生的二阶和频积累波(包括和频驱动积累波与和频自由积累波)的位移场就被完全确定。根据式(14)(21)可知,当基波模式 (f_1, m) 和 (f_2, n) 具有相同对称性质时(m 和 n 同时为奇数或偶数, $m \pm n$ 为偶数), $\mathbf{u}_{(f_1+f_2)}^{(2C)}$ 具有对称性质。

鉴于二阶和频积累波的位移场只能呈对称分布(此时和频自由平面波的位移场也呈对称性质, $u_{L1}^{(FP)} = u_{L2}^{(FP)}$, $u_{T1}^{(FP)} = u_{T2}^{(FP)}$), 容易证明式(20)中 $\sigma_{yz}(\pm d) = 0$, $\sigma_{yy}(+d) = \sigma_{yy}(-d)$, 由式(20)(24)得:^[11]

$$jM_{31}(R_{L+} + R_{L-})u_{L1}^{(FP)} + jM_{32}(R_{L+} + R_{L-})u_{T1}^{(FP)} = -\sigma_{yy}(+d) \quad (27)$$

在式(27)中,有两个未知数而方程只有一个,不能完全确定出二阶和频自由平面波的位移振幅。但由于前面求解出的二阶和频积累波具有积累增长性质,在固体板中占主导地位,

不能完全确定出和频自由平面波的位移场并不重要。

3 结束语

据本文的分析可得如下结论:由固体板中频率不同的两个SH型板波模式相互作用所发生的二阶差频声波不具有积累增长性质;当满足一定条件时,即使两个SH型板波模式对应的部分波自作用所发生的二次谐波不具有积累性质,但由两个模式的部分波相互作用得到的二阶和频声波仍是有可能具有积累增长性质的,这种性质由二阶和频驱动波(纵波)的“共振”所引起;在固体板中,具有积累增长性质的二阶和频声波的位移场只能呈对称分布,当两个SH型板波模式的阶数同时为奇数或偶数时,二阶和频积累波的位移场分布是对称的。本文还尝试给出了满足边界条件和初始条件的二阶和频积累声波(位移场)的解析表达式,所采用的分析方法和过程,为理解固体板中二阶和频积累波的发生,在理论上具有重要意义。

参考文献

- [1] 邓明晰. 固体板中SH型板波的“共振”二次谐波发生[J]. 声学学报, 1998, 23: 439-446.
- [2] Deng Mingxi. Cumulative second-harmonic generation accompanying nonlinear shear horizontal mode propagation in a solid plate [J]. Journal of Applied Physics, 1998, 84: 3500-3505.
- [3] Deng Mingxi. Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate [J]. Journal of Applied Physics, 1999, 85: 3051-3058.
- [4] Auld B A. Acoustic fields and waves in solids [M]. John Wiley & Sons, Inc., 1973, (2).
- [5] Zarembo L K and Krasilnikov V A. Introduction to nonlinear acoustics [M]. (Russ.), M. Nauka, 1966.
- [6] Zhou S and Shui Y. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves at an interface. Journal of Applied Physics. 1992, (72): 5070-5080.

附录

式(6)中的各个二阶和频及差频驱动项分别如

下:

$$\begin{aligned}
 (DL) \quad k(f_1 \pm f_2, m, n)_{pp} = & \left\{ \begin{aligned} & (\mu + A/4) [K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \cos \delta_1 \pm K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \cos \delta_2] \\ & \pm (\kappa + \mu/3 + A/4 + B) \{ (K(f_1, m) T_p \quad K(f_2, n) T_p) K(f_1, \pm f_2, m, n) \} \\ & \times u(f_1, m) T_p u(f_2, n) T_p \end{aligned} \right\} \\
 (DT) \quad k(f_1, \pm f_2, m, n)_{pp} = & - \left\{ \begin{aligned} & (\mu + A/4) (-K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \sin \delta_1 \pm K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \sin \delta_2) \\ & \times u(f_1, m) T_p u(f_2, n) T_p \end{aligned} \right\} \\
 (DL) \quad k(f_1, \pm f_2, m, n)_{pq} = & - \left\{ \begin{aligned} & (\mu + A/4) [K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \cos \beta_1 \pm K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \cos \beta_2] \\ & \pm (\kappa + \mu/3 + A/4 + B) \{ (K(f_1, m) T_p \quad K(f_2, n) T_p) K(f_1, \pm f_2, m, n) \} \\ & \times u(f_1, m) T_p u(f_2, n) T_p \end{aligned} \right\} \\
 (DT) \quad k(f_1, \pm f_2, m, n)_{pq} = & - \left\{ \begin{aligned} & (\mu + A/4) [-K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \sin \beta_1 \pm K(f_1, m) T^2 K(f_2, n) T \sin \beta_2] \\ & \times u(f_1, m) T_p u(f_2, n) T_p \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

在上述驱动项中, A 和 B 是三阶弹性常数, δ_1 、 δ_2 分别是波矢 $\mathbf{K}_{(f_1, m) T_p}$ 、 $\mathbf{K}_{(f_2, n) T_p}$ 与 $\mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n)_{pp}}$ 之间的夹角, β_1 、 β_2 分别是波矢 $\mathbf{K}_{(f_1, m) T_p}$ 、 $\mathbf{K}_{(f_2, n) T_q}$ 与 $\mathbf{K}_{(f_1 \pm f_2, m, n)_{pq}}$ 之间的夹角。

式(19)(20)中的系数矩阵 $[M]$ 为:

$$\begin{bmatrix} M_{11}R_{L+} & M_{12}R_{T+} & -M_{11}R_{L-} & -M_{12}R_{T-} \\ M_{11}R_{L-} & M_{12}R_{T-} & -M_{11}R_{L+} & -M_{12}R_{T+} \\ M_{31}R_{L+} & M_{32}R_{T+} & M_{31}R_{L-} & M_{32}R_{T-} \\ M_{31}R_{L-} & M_{32}R_{T-} & M_{31}R_{L+} & M_{32}R_{T+} \end{bmatrix}$$

其中, $M_{11} = 2\mu \cos \theta_{f_1+f_2} L$

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= [\alpha_{f_1+f_2}^2 T - 1] \mu \sin \theta_{f_1+f_2} T \\
 M_{31} &= [(\kappa + 4\mu/3) \alpha_{f_1+f_2}^2 L + \kappa - 2\mu/3] \sin \theta_{(f_1+f_2) L} \\
 M_{32} &= -2\mu \cos \theta_{f_1+f_2} T \\
 R_{L+} &= \exp[j\alpha_{f_1+f_2} L (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} d)] \\
 R_{L-} &= \exp[-j\alpha_{f_1+f_2} L (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} d)] \\
 R_{T+} &= \exp[j\alpha_{f_1+f_2} T (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} d)] \\
 R_{T-} &= \exp[-j\alpha_{f_1+f_2} T (k_{(f_1, m)} + k_{(f_2, n)} d)]
 \end{aligned}$$

当 $m \pm n$ 为偶数时, $\sin \theta_{f_1+f_2} T = 0$, 式(28)中的

常数 Γ_T 和 Γ_L 为:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_T &= [M_{31}(R_{L-} + R_{L+})] / [M_{32}(R_{T-} + R_{T+})] \cdot \cos \theta_{f_1+f_2} T \sin \theta_{f_1+f_2} L, \\
 \Gamma_L &= \cos \theta_{f_1+f_2} L / \sin \theta_{f_1+f_2} L
 \end{aligned}$$

书评与书讯

《章奎生建筑声学论文选集》编印出版

上海市声学学会常务理事章奎生高工(教授级)在华东建筑设计研究院从事建声专业工作已有36年多,98年初华东建筑设计院与上海民用建筑设计院合并成立上海现代建筑设计(集团)有限公司后,两院声学组也合并,章工就在集团所属科技发展中心声学组任组长,目前在集团和中心的关心支持下正在筹备组建“章奎生建筑声学设计事务所”。

99年10月,现代建筑设计集团为了总结设计经验,活跃学术气氛,发展建筑科技,决定为集团内的院士、大师及技术专家共五位同志各编印出版一本专集。“章奎生建筑声学论文选集”就是现代集团第一本编印出版的论文专集,并请我国著名科学家马大猷先生为本书写了序言。

这本建声论文集共选择了章奎生从1962年至1999年间先后编写发表的共42篇论文,约计40万字,共400页。其中约一半论文为剧院、会议厅、电影院、体育馆、演播厅、录音厅等各类厅堂建筑声学设计与研究总结;而另一半论文则为各类环境噪声和工业噪声控制、动力设备降噪工程、空间吸声体及系列化消声器设计研究和应用以及综述性文章等。论文选集汇总了章工从事建筑声学、噪声控制专业以来所积累的大量丰富宝贵的实际经验,具有较高的参考价值,可供从事厅堂音质与噪声控制专业工作设计、科研技术人员参考借鉴。如需订购,请同上海市石门二路258号现代建筑设计集团技术部联系。(邮编200041)。

[本刊讯]