

颗粒物质表面波动的简单模型

缪国庆, 隋 磊, 魏荣爵

(近代声学国家重点实验室, 南京大学声学研究所, 南京 210093)

中图分类号: 0424 文献标识码: A

Simple model for surface wave in granular materials

MIAO Guoqing, SUI Lei, WEI Rongjue

(State Key Lab of Modern Acoustics and Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

实验表明, 垂直振动下的颗粒物质呈现类似流体的行为, 例如隆起、对流、分层及表面波动^[1]。将颗粒物质置于容器内。在外加激励下, 容器作垂直振动。当无量纲的激励加速度振幅 $\alpha = 4^2 f^2 A / g < 1$ 时(其中 A 为激励振幅, f 为激励频率, g 为重力加速度), 颗粒呈压紧状态, 并随着容器一起振动, 颗粒层表面是平坦的。当 $\alpha > 1$ 时, 在每个振动周期的部分时间内, $\sin 2ft < -1$, 颗粒层与容器底面分离并自由飞行, 颗粒层厚度增加, 但表面仍保持平坦, 这就是所谓“热膨胀”现象。随着 α 的进一步增加, 至某一临界加速度 α_c , 颗粒层厚度增加到 h_0 (称之为临界动态平衡厚度), 颗粒层表面将出现波形图案。颗粒物质行为的复杂性给理论研究带来很大困难, 迄今所用的理论方法主要有分子动力学模型^[2], 连续流体动力学模型^[3,4], 序参量模型等。他们从不同侧面对颗粒物质的动力学行为给以一定的解释。

鉴于颗粒物质表面波动具有与粘滞流体类似的色散关系, 本文采用类似薄层粘滞流体的连续模型描述垂直激励下颗粒薄层的运动。通过稳定性分析导出色散关系, 对非线性问题作数值计算, 并与实验相对照。取容器作为参照系, 假设容器以 $A \sin 2ft$ 的形式作垂直振动, 取坐标系固定于容器上, z 轴垂直向上, x 轴沿容器长度方向。在这一坐标系中作用在颗粒层上的外力是 $-g + 4^2 f^2 A \sin 2ft$, 但是与真实流体的区别是, 在真实流体内, 由这一作用力产生的压力梯度始终存在, 而在颗粒层内这一压力梯度只在颗粒层与容器底相碰撞时才存在。在颗粒层自

由飞行阶段, 压力梯度消失。此时, 外力只对颗粒层的平动起作用。由于颗粒层与容器底部碰撞过程中, 能量通过颗粒间的相互碰撞而耗尽, 因此, 我们将颗粒层与容器的碰撞考虑为完全非弹性颗粒与振动面碰撞的一维运动。并将颗粒层的运动分为两部分, 一部分是颗粒层“内自由度”的运动(在自由落体坐标系中), 包括颗粒层内的运输与表面波动等, 另一部分是颗粒层质心相对于容器的平动。对于“内自由度”的运动, 我们应用类似于薄层粘性液体一维理论。用局部层厚 $h(x, t)$ 及水平速度 $v(x, t)$ 两个变量, 连续性方程是:

$$\frac{h}{t} + \frac{1}{x}(hv) = 0 \quad (1)$$

动量守恒方程是:

$$\frac{v}{t} + u \frac{v}{x} = -\eta(t) \frac{h}{x} + \frac{2v}{x^2} \quad (2)$$

其中, $\eta(t)$ 为加速度, η 称为等效粘滞系数。自由飞行期间, 颗粒层质心相对于容器底面的高度 $h_c(t)$ 满足下述方程:

$$\frac{2h_c}{t^2} = -g + 4^2 f^2 A \sin(2ft + \phi_0) \quad (3)$$

其中, ϕ_0 满足 $4^2 f^2 A \sin \phi_0 = g$ 。于是颗粒层自由面相对于容器的运动为:

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{在碰撞期间} \\ h(x, t) - h_c(t) & \text{在自由飞行期间} \end{cases} \quad (4)$$

此处, $h_c(t)$ 被近似视作颗粒层底面相对于容器底面的高度(薄层近似)。

由于问题的非线性, 我们首先研究颗粒层振动的不稳定性。按线性稳定性理论, 设 $h(x, t) = h_0 + \delta h(x, t)$, 其中 $\delta h(x, t)$ 为颗粒层厚度涨落, 设 $\delta h(x, t) = \delta h_k(t) e^{ikx} + c.c.$, 其中 $\delta h_k(t)$ 是波振幅, k 为波矢量, $c.c.$ 为复共轭。我们取激励加速度为完全非弹性颗粒

收稿日期: 2000-01-21, 修订日期: 2000-05-15

作者简介: 缪国庆(1945-), 男, 副教授, 从事物理声学。

与振动面碰撞的第一临界加速度 $\ddot{x}_c = (\omega^2 + 1)^{1/2}$, 相应的临界速度为 $v_c^2 = 2fA \sqrt{1 - (1/\ddot{x}_c)^2}$, 故碰撞是瞬时的。(t) 可以一系列脉冲代替

$$(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_c^s (t - jT) \quad (5)$$

其中 T 是外驱动周期。略去非线性项, 由式(1)(2) 得到满足的方程为:

$$\frac{2}{t^2} = (t)h_0 \frac{2}{x^2} + \frac{3}{tx^2} \quad (6)$$

碰撞时刻, 脉冲给出条件 $\dot{x}^+ - \dot{x}^- = \dot{x}_c h_0 \frac{2}{x^2}$, 及 $x^+ = x^-$, 其中上标“+”与“-”相应于撞击时刻的后沿与前沿。由方程(6), 并结合冲击条件, 我们得到

$$k(T) = (k) k(0) \quad (7)$$

其中

$$(k) = \left[1 + \frac{h_0 v_c^s}{\ln \frac{h_0 v_c^s +}{h_0 v_c^s -}} \right] e^{-k^2 T} - \frac{h_0 v_c^s}{\ln \frac{h_0 v_c^s +}{h_0 v_c^s -}} \quad (8)$$

不稳定性的条件是 $(k) > 1$ 。对于正的 k , 仅当 $(k) < -1$ 才能满足 $(k) > 1$ 。这意味着每一次碰撞, 颗粒层运动的相位改变 π , 每两个驱动周期, 颗粒运动重复一次。这与实验观察一致, 亦与液体中的法拉第波动类似。起始不稳定性由条件 $(k) = -1$ 决定。并由此给出色散关系:

$$k = 2 \left[\ln \frac{h_0 v_c^s +}{h_0 v_c^s -} \right]^{-1/2} (\omega/f)^{1/2} \quad (9)$$

图1是近期我们关于颗粒物质表面波动色散关系的实验结果。实验使用0.2mm直径的石英砂。容器被抽成真空, 以消除隙隙气体对颗粒运动的影响, 以B&K振动仪器作为振动激励与控制系统。调节激励频率与振幅, 记下最先出现的条纹状波形的波长, 从而得到实验色散关系。结果表明, 约25Hz以下, $\lambda \sim 1/f^{0.8}$, 而25Hz以上, $\lambda \sim 1/f^{0.5}$ 。这与文献[2]类似。色散关系(9) $\sim 1/f^{0.5}$ 与25Hz以上实验结果相符。为了解释波长对于频率的标度关系 $\lambda \sim 1/f^n$ 随频率变化, 我们实验测量了水及机油的色散关系, 结果是: 对于水, $\lambda \sim 1/f^2$, 对于机油, $\lambda \sim 1/f$ 。(20 Hz时水的粘滞系数为0.01泊, 而机油则大于10泊)。这表明粘性愈大, n -值愈小, 从而说明颗粒物质的等效粘滞系数随频率增加而增加, 而液体的粘滞系数则与频率无关, 这是颗粒物质与液体输运特性的一个重要区别。粘性及碰撞速度对色散关系的影响有待进一步研究。

我们通过数值求解方程(1)(2)研究系统的非线性行为。以 h_0 作为长度标度, 以 $\omega = (h_0/g)^{1/2}$ 作为时间标度。数值计算中, 并不取为冲击, 而取为断

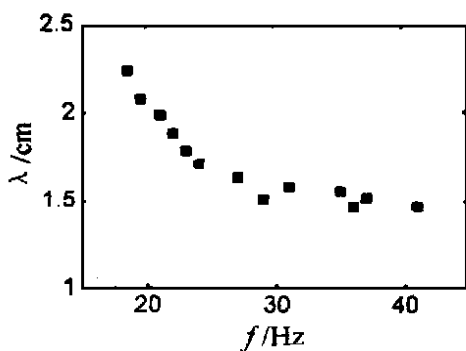


图1 实验测量得到的色散关系

续的正弦函数, 因为颗粒层并非真正的完全非弹性单粒子, 并非所有粒子都同时与容器碰撞及同时与容器分离。图2所示为数值计算结果。对于周期波图案, 我们取随机噪声(数值为随机数)作为初始条件, 然后演化成周期性驻波。从图(2)中可见, 波的时空行为都具有明显的非线性。另外, 我们试图寻找局域次谐波激发(oscillon), 但未找到稳定的局域激发, 这与实验相符。在窄长容器中只看到间隙不稳定的二维局域激发。

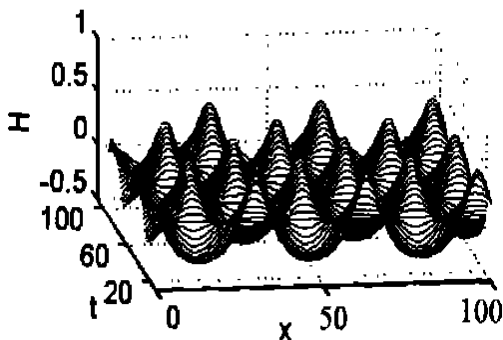


图2: 数值计算得到的波动的时空变化

本文工作得到国家重点基础研究专项经费及国家自然科学基金的资助。

参考文献:

- [1] H. M. Jaeger, et al. [J]. Phys. Today, 1996, 49(4): 32-38.
- [2] C. Bizon, M. D. Shattuck, et al. [J]. Phys. Rev. Lett., 1998, 80(1): 57-60.
- [3] E. Cerda, F. Melo, and S. Rica. [J]. Phys. Rev. Lett., 1997, 79(23): 4570-4573.
- [4] J. Eggers and H. Riecke. [J]. Phys. Rev. E, 1999, (4): 4476-4483.