

# 有对称液层负载时各向异性板中 Lamb 波的传播

严萍, 朱哲民, 杜功焕

(南京大学近代声学国家重点实验室, 声学研究所, 南京 210093)

中图分类号: O422.7 文献标识码: A

## The propagation of Lamb waves in an anisotropic plate bordered with two symmetric liquid layers

YAN Ping, ZHU Zhe-min, DU Gong-huan

(State Key Lab of Modern Acoustics Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

### 1 引言

Lamb 波是固体薄板中传播的一种弹性波, 最初有关 Lamb 波的微传感的理论研究大都只局限在各向同性板材中, 由于在各向异性压电板上可以高效激发 Lamb 波, 灵敏度高, 体积小, 性价比高等特点, 因而各向异性材料有更大的实用性, 实验上已有各向异性压电板传感器的尝试<sup>[1]</sup>, 特别是在生物传感领域, 由于能检测到病毒等, 因而特别具有吸引力。在理论上 S. G. Joshi<sup>[2]</sup>, Chiment<sup>[3]</sup>, Vinay Dayal<sup>[4]</sup> 都对各向异性板中的 Lamb 波进行了理论推导和数值计算, 为了对各向异性材料微传感性的机理有进一步深入了解, 本文研究若干典型的各向异性板, 例如微传感领域常用的 ZnO 等, 有双面对称液层负载时, 板中 Lamb 波的传播, 从弹性波传播理论出发, 结合边界条件, 导得了这些各向异性薄板有对称液层负载时板中 Lamb 波传播的对称与反对称色散方程。当薄板厚度  $2d$  很小时,  $A_0$  模式的 Lamb 波的质量微传感特性也作了讨论。为简单计, 在本文中暂忽略了电学边界条件, 以及液层中的粘滞系数。

### 2 理论

以各向异性材料 ZnO 晶体为例, 为简单计, 先研究当板两面有对称液层负载时对板中 Lamb 波传播的影响。取坐标系如图 1 所示, 板在  $xy$  方向无限延伸, 声波在  $x$  方向传播。设各向异性薄板两面分别

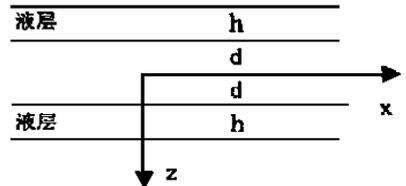


图 1 坐标示意图

有厚度  $h$  的液层负载。运用应力, 应变以及 ZnO 晶体的弹性劲度常数的关系  $\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ , 因为 ZnO 晶体结构的特殊性, 通过计算, 可以发现板中沿  $y$  方向质点位移  $U_2$  与沿  $x$  方向质点位移  $U_1$  和沿  $z$  方向质点位移  $U_3$  解耦, 可以得到  $U_1$  和  $U_3$  的形式解<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \exp[i(k_x x - \omega t)] [M \exp(ik_{zp} z) + N \exp(-ik_{zp} z) + P \exp(ik_{zm} z) + Q \exp(-ik_{zm} z)] \\
 U_3 &= \exp[i(k_x x - \omega t)] \{R_p [M \exp(ik_{zp} z) - N \exp(-ik_{zp} z)] + R_m [P \exp(ik_{zm} z) + Q \exp(-ik_{zm} z)]\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
 k_{zp}^2 &= k_x^2 [-B - (B^2 - 4D)^{1/2}] / 2 \\
 k_{zm}^2 &= k_x^2 [-B + (B^2 - 4D)^{1/2}] / 2 \\
 B &= \left[ \frac{C_{33}}{k_x^2} \left( \frac{C_{11}}{k_x^2} - \frac{\omega^2}{k_x^2} \right) - \frac{C_{13}}{2} \frac{2C_{55} + C_{13}}{k_x^2} \right. \\
 &\quad \left. \frac{C_{55} \omega^2}{k_x^2} \right] \sqrt{\left[ \frac{C_{33} C_{55}}{2} \right]} \\
 D &= \left( \frac{\omega^2}{k_x^2} - \frac{C_{55}}{k_x^2} \right) \left( \frac{\omega^2}{k_x^2} - \frac{C_{11}}{k_x^2} \right) \sqrt{\left[ \frac{C_{33} C_{55}}{2} \right]} \\
 R_p &= \frac{(\omega^2 - C_{11} k_x^2 - C_{55} k_{zp}^2)}{(C_{55} + C_{13}) k_x k_{zp}} \\
 R_m &= \frac{(\omega^2 - C_{11} k_x^2 - C_{55} k_{zm}^2)}{(C_{55} + C_{13}) k_x k_{zm}}
 \end{aligned}$$

收稿日期: 2000-01-20, 修订日期: 2000-05-15

作者简介: 严萍 (1976-) 女, 硕士研究生。

液层中的位移势的形式解为:

$$\begin{aligned} L_1 &= A_1 \sin[k_z(z - (d + h))] \exp[i(k_x x - \omega t)] \\ L_2 &= A_2 \sin[k_z(z + (d + h))] \exp[i(k_x x - \omega t)] \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $k_z = k_L^2 - k_x^2$ 。

以上的形式解要满足的边界条件为: 在固体板与液体的上下界面处法向和切向的应力和法向速度均连续。由此可得到关于  $M$ 、 $N$ 、 $P$ 、 $Q$ 、 $A_1$ 、 $A_2$  等未知量的 6 个方程, 要使方程有解, 即其系数行列式为 0。经过颇为繁复的计算, 可以得到 Lamb 波的对称与反对称两个色散方程:

$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{tg}(k_{zp}d)}{\operatorname{tg}(k_{zm}d)} - \frac{G_m H_p}{G_p H_m} + \frac{\omega^2}{k_z} \operatorname{tg}(k_z h) \\ &\operatorname{ctg}(k_{zm}d) \left( \frac{H_m R_p}{G_m H_p} - \frac{R_m}{G_m} \right) = 0 \\ &\frac{\operatorname{tg}(k_{zm}d)}{\operatorname{tg}(k_{zp}d)} - \frac{G_m H_p}{G_p H_m} + \frac{\omega^2}{k_z} \operatorname{tg}(k_z h) \\ &\operatorname{tg}(k_{zm}d) \left( \frac{H_m R_p}{G_m H_p} - \frac{R_m}{G_m} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $G_{p,m} = R_{p,m} C_{33} k_{z,p,m} + C_{13} k_x$ ,  $H_{p,m} = k_{z,p,m} + k_x R_{p,m}$ 。

### 3 数值计算结果与讨论

为了研究液层负载对 Lamb 波传播的影响, 我们计算了对一定声波频率  $f = 1\text{MHz}$ , 改变液层厚度  $h$  时声速  $c$  的变化。并且分析了  $A_0$  模式在各向异性薄板厚度  $d$  很小时的微传感性。

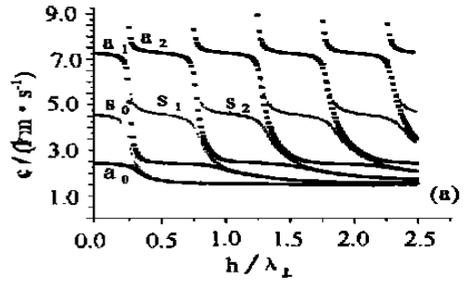
#### 3.1 相速度随液层厚度的变化

图 2 是当 ZnO 晶体的厚度  $2d$  一定时, 按 (3) 式计算的各向异性板中 Lamb 波相速度随液层厚度  $h$  增加时的曲线, 横轴为  $h/\lambda_L$ ,  $\lambda_L$  为液体在水中传播的波长, 纵轴为相速度。(a)、(b) 分别对应于  $d = 1\text{mm}$ ,  $d = 0.5\text{mm}$ , 图 2 表明当  $h$  增加时, 对称模式对反对称模式完全分开, 各自随  $h$  周期变化。也可发现, 各向异性板和各向同性板有很大的相似性。

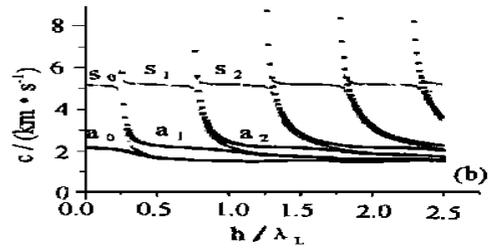
#### 3.2 Lamb 波的微传感

由于反对称模式的相速度随液层厚度变化最明显,  $A_0$  是微传感领域的首选模式, 图 3 是  $A_0$  相速度的相对变化  $h/\lambda_L$  的变化, 图中星形的点对应各向异性薄板  $d = 0.1\text{mm}$ , 倒三角形的点对应于  $d = 0.01\text{mm}$ , 方形的点对应的是  $d = 0.001\text{mm}$ , 由图可见, 对很薄的各向异性板, 当  $h$  不是很大时,  $A_0$  相速度的相对变化与  $h$  近似线性, 而且  $d$  越小, 即板越薄, 由相同液层引起的速度相对变化越大, 例如对  $d$

$= 0.001\text{mm}$  的 ZnO 薄板, 当  $h/\lambda_L = 0.014$  时, 速度相对变化达 20.6%。



(a)  $d = 1\text{mm}$



(b)  $d = 0.5\text{mm}$

图 2 相速度随液层厚度的变化

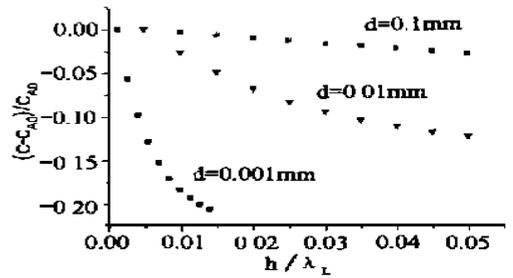


图 3  $A_0$  模式相速度随液层厚度的变化

### 4 结论

根据弹性波在各向异性固体板中传播的理论, 结合边界条件, 研究了常用的 ZnO 及同类的各向异性薄板双面有对称液层负载时板中类 Lamb 波的传播, 导得了 Lamb 波对称模式和反对称模式波矢  $k$  的色散方程。数值计算结果表明, 各向异性板中 Lamb 波的相速度的对称模式和反对称模式各自随负载液层高度呈周期变化, 当液层厚度增加时, 出现

(下转第 120 页)

进入数字示波器,以40MHz进行采样,然后将采样数据送入计算机进行分析处理,其数据处理流程如图2所示。

#### 4 实验结果的分析与讨论

实验所用样品全部取自西安医科大学第一附属医院,在离体20h内全部做完。

对于人体脾组织的回波信号,正常组织和病变组织分别取280点进行处理,对于阶次的选取,采用信息论准则(AIC)法,并参照了 $p$ 应在 $N/3-N/2$ 之间的经验法则,经多次比较后,最终确定其阶次都为 $p=120$ 。图3为用AR倒谱技术所得的人体脾组织回波信号的AR倒谱图,其中3(a)为人体正常脾组织回波信号的AR倒谱图;图3(b)为人体脾增生组织回波信号的AR倒谱图。

从图3(a)中看出,其主极大的位置约为1.08mm,平均值为 $1.08\text{mm} \pm 0.11\text{mm}$ ,即正常脾组织的散射元平均间距为1.08mm,这与文献[5]在连体情况下的实验结果( $1.10\text{mm} \pm 0.14\text{mm}$ )相一致,由于组织摘除后,部分水份丢失,致使组织萎缩,脾小梁间距变小,即散射元平均间距变小。脾组织是一种较为致密的实质性组织,在所研究的小尺度(1cm-2cm)范围内,脾组织中的血管比其它组织(如肝组织)中的少,且其不均匀性起伏小。研究表明,脾组织背向散射的频率依赖关系约为 $f^2$ ,即散射元间距应与肝组织接近。由此可以认为,脾组织中网状支架脾小梁为主要的散射元。由于脾组织的增生,导致脾肿大,使散射元间距增大到1.58mm,平均值为 $1.58\text{mm} \pm 0.08\text{mm}$ ,如图3(b)所示;另外,由于脾增生

组织比正常组织明显变硬,而使它的倒谱最大值也明显大于正常脾组织的倒谱最大值。

上述所得的正常脾与病变脾组织的实验分析结果表明,两种组织的散射元平均间距明显不同,组织病变会导致组织中散射元平均间距相应的变化。因此,本文对脾组织散射元平均间距的估计结果可为临床病变诊断提供有用信息。

依据生物软组织内部存在一定程度的有序结构,由AR倒谱估计其相邻散射元的平均间距,可揭示组织微观结构特征,由此方法估计散射元平均间距作为组织结构的一个特征参数用于组织定征,可以识别病变组织,在临床诊断上有潜在的应用前景。

本文得到同济大学声学所博士生导师刘镇清教授的悉心指导,在此表示感谢!

#### 参考文献:

- [1] Iruault J. M., Ossant F. et al. Time-varying autoregressive spectral estimation for ultrasound attenuation in tissue characterization[J]. IEEE Trans. on UFFC, 1998, 45(3): 650-659.
- [2] Kay S. M.. Modern Spectral Estimation—Theory and Application[M]. Prentice-Hall, 1998.
- [3] 张贤达著. 现代信号处理[M], 北京: 清华大学出版社, 1995.
- [4] Wear K. A., Wagner R. F. et al. Application of autoregressive spectral analysis to cepstral estimation of mean scatterer spacing[J]. IEEE Trans. on UFFC, 1993, 40(1): 50-58.
- [5] Fellingham L. L., Sommer F. G.. Ultrasonic characterization of tissue structure in the in vivo human liver and spleen. [J]. IEEE Trans. on SU., 1984, 31(4): 418-428.

(上接第115页)

对称模式与反对称模式的第2、第3……分支。当板很薄时, $A_0$ 对液层的高度的变化最灵敏,当 $h$ 不大时,速度相对变化与 $h$ 近似呈线性,这可以是Lamb波微质量传感、生物传感的理论基础。本文的方法也适用于正交晶体系,正方晶体系4mm, 422, 42m, 4/mmm, 以及六角晶体系和立方晶体系。

#### 参考文献:

- [1] R. M. White and S. W. Wenzel. Fluid loading of a Lamb-

wave sensor[J], Appl. Phys. Lett, May 1988, 52(20): 1653-1655.

- [2] S. G. Joshi and Y. Jin. Propagation of ultrasonic Lamb waves in piezoelectric plates[J]. Appl. Phys., 1991, 70(8): 4112-4119.
- [3] D. E. Chimenti. Acoustic waves in a piezoelectric plate loaded by a dielectric fluid[C], Symposium of International Workshop on Modern Acoustics, Nanjing 1994.
- [4] Vinay Dayal, Vikram K. Kinra. Leaky Lamb waves in an anisotropic plate[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1989, 85(6): 2268-2276.