文章编号: 1000-3630(2000) 03-146-02

逆散射法研讨槽中孤子的运动

王本仁

(南京大学声学研究所, 国家近代声学重点实验室, 南京　210093)

中图分类号: O424　　　文献标识码: A

Study on motion of solitons in trough by inverse scattering method

WANG Ben-ren

(State Key Lab of Modern Acoustics, Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

自非线性演化方程出现以来, 许多这类方程存在一种孤立子解。它是广泛感兴趣的一种物理实体。与之相应, 在数学方面求解这类方程的研究也是相伴而行, 如由 Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura 发展出了求解此类方程的逆散射方法。它们使非线性方程的求解问题成为解线性方程的问题, 并且和散射问题的势的求逆相联系。除此之外, 数学方面还发展了如 Backlund 变换、Hirota 方法和多重尺度法等许多方法。

另从孤立子问题本身研究来说, 最近也出现很多令人振奋的进展。长期以来, 人们在研究孤立子时, 总是以这种波形互作用不变性作为它的首要特征, 也就是在这样条件下, 才能将它们看成粒子称为孤立子。但是事物的进展远比人们想像得要快。如光孤子的研究, 已提出将它用于信息编码传输, 在光缆中可远及数千公里。特别是近代在光折变介质中的传输研究, 如文献[1]中又显示出空间孤立子在碰撞中可以聚变(即合并) 和裂变(即再生) 等现象。

我们本想讨论槽中水波的多孤子问题。因为原来的单孤子解似乎还不能很好解释实验中所看到的众多现象[2]。但是高阶孤子数学表达很烦琐, 概念上也不很直观, 因此还是以二孤子为例作一些推演。

对 Larraza 和 Putterman 以及 Miles 所导出的槽中水波的 NLS 方程可变换为[3]:

$$iu_t + u_{xx} + 2\ u\ ^2 u = 0 \tag{1}$$

对它的逆散射解法, 可参看文献[4]。它变换成相应的 Lax 方程可表示为:

$$LF(x, t,\ ) = \ F(x, t,\ ) \tag{2}$$

$$_t F(x, t,\ ) = MF(x, t,\ ) \tag{3}$$

此处 L 和 M 是相应于上述 NLS 方程的 Lax 对。$F(x, t,\ )$ 是相应于 L、M 算符的本征函数, 和　是相应的本征值。但是从逆散射方法而言, F 函数的解本身并非上述 NLS 方程的解。而 L、M 算符可写为:

$$L = i\ _3\ _x + iU(x, t)\ _3 \tag{4}$$

$$M = i2\ _3\ _x^2 + i2U(x, t) - i\{U^2(x, t) - U_x(x, t)\}\ _3 \tag{5}$$

其中 $U(x, t) = \begin{vmatrix} 0 & u(x, t) \\ -u(x, t) & 0 \end{vmatrix}$ 是一个 2×2 矩阵, 而 $_3$ 是个 Pauli 自旋矩阵。

因为我们现要求孤子解, 故要有下列边值条件:

$u \to 0$,　在 $x \to \infty$ 时

对(2) 式的 Lax 方程, 可找出它相应 $F(x, t,\ )$ 的解为:

$$(x,\ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ix} + \int_{-\infty}^{x} e^{-i(x-y)}\ _3 U(y)\ (y,\ )\,dy \tag{6}$$

这是以二分量的积分形式表示的解。可以将(6)式对 x 求导, 再同乘以 $i\ _3$, 整理得:

$L\ (x,\ ) = [i\ _3\ _x + iU(x, t)\ _3]\ (x,\ ) = \ (x,\ )$,

即得证。当 $x \to -\infty$ 时, 则得到相应的 Jost 解。

非线性方程的时间演化也将显现出孤子间互作用的重要特征。由(3)式在 $x \to \infty$ 时, (即 Lax 的第二方程) 可得:

$$_t F(x, t,\ ) = i2\ _3\ _x^2 F(x, t,\ ) \tag{7}$$

这样我们假设含时解 $(x, t,\ ) = h(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ix}$, 将其代入上式, 则经积分得 $h(t) = e^{-i2\ ^2 t}$ 和普解:

收稿日期: 2000-01-21; 修订日期: 2000-05-15
本工作得到国家自然科学基金(No. 19834040) 的资助。
作者简介: 王本仁(1936-) , 男, 教授。

$$(x, t, \ ) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i(\ x+2 \ ^2 t)} +$$

$$\int_{\infty} e^{-i(x-y) \ 3-i2 \ ^2 t} U(y) \ (y, t, \ ) \mathrm{d}y \qquad (8)$$

但是要找出 NLS 方程的解, 需将 $(x, t, \ )$ 和 $U(x, t)$ 中的 $u(x, t)$ 联系起来。这需要求解 Zakharov-Shabat 方程, 将两者的显式解出。这样还有较麻烦的数学运算, 将不再赘述。

通过运算, 比较好的找出了相应于 NLS 方程的多孤子解的问题。当然这还是在上述逆反射方法应用限制的条件范围内。现写出二孤子解的形式, 则有:

$$u_2 = 2(N_2/D_2)$$

$$N_2 = A_1 V_1 \mathrm{sech} \ _1 e^{-i \ _1} + A_2 V_2 \mathrm{sech} \ _2 e^{-i \ _2}$$

$$A_1 = -\{(\ _1 - \ _2)^2 + (v_1^2 - v_2^2)\} + i2(\ _1 - \ _2) v_2 \tanh \ _2$$

$$A_2 = -\{(\ _1 - \ _2)^2 + (v_1^2 - v_2^2)\} + i2(\ _2 - \ _1) v_1 \tanh \ _1$$

$$D_2 = (\ _1 - \ _2)^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 [\tanh \ _1 \tanh \ _2 + \mathrm{sech} \ _1 \mathrm{sech} \ _2 \cos(\ _1 - \ _2)]$$

式中各参量表示如下, 孤子解的本征值 $_1$、$_2$ 为

$$_1 = \ _1 + iv_1, \quad _2 = \ _2 + iv_2$$

和

$$_1 = 2v_1(x - x_{01} + 4 \ _1 t)$$

$$_2 = 2v_2(x - x_{02} + 4 \ _2 t)$$

$$_1 = 2 \ _1 x + 4(\ _1^2 - v_1^2) t + 2 \ _{10},$$

$$_2 = 2 \ _2 x + 4(\ _2^2 - v_2^2) t + 2 \ _{20} \qquad (10)$$

其中 x_{01}、x_{02} 和 $_{10}$、$_{20}$ 是反映初始位置的值。

从上面表示式可以看出, u_2 中的分子的两大项分别相当于两个孤立子。但是在非线性方程中, 它们并不完全独立, 而是要不断的相互作用, 各个孤子各自还要分别运动。

自 u_2 的表式, 如果我们选取本征值的实部 $_1 = \ _2 = \ _0$, 这时两个孤立子将以同样的速度运动, 而保持原来的波形包络不变, 而当 $_0 = 0$ 时, 此时的两个孤子将相当于驻孤子而不运动。这就是水槽中孤子相驻留的情形, 当然它们随时间还有演化的问题。

当我们取 $_1 = \ _2 = 0$ 和 $v_1 = 0.5$、$v_2 = 1$ 这样两个孤立子解时, 则可将两孤子解表为:

$$u_2 = \frac{\frac{3}{4} e^{-i \ _1} (\mathrm{sech} \ _1 + 2 \mathrm{sech} \ _2 e^{-i(\ _2 - \ _1)})}{\frac{5}{4} - [\tanh \ _1 \tanh \ _2 + \mathrm{sech} \ _1 \mathrm{sech} \ _2 \cos(\ _2 - \ _1)]} \qquad (11)$$

若 $x_{10} = x_{20}$, $_{10} = \ _{20}$, 则有 $_1 = x - x_{10}$, $_2 = 2(x - x_{10})$, 和 $_1 = -t + 2 \ _{10}$, $_2 = -4t + 2 \ _{20}$。于是有:

$$_2 - \ _1 = -3t + 2(\ _{20} - \ _{10})$$

可以看出有周期 $T = 2 \ /3$。即每经过时间 T, 波形将完全重复, 使在不同时刻, 仍然可看到不同的波形包络, 只有重复在周期点上, 才有完全相同的构造。

在水槽实验中, 在一定激励和边界条件下, 会出现近三角形的水波包络, 这种包络是否可用如{sech(nx)}系列的波形叠加出来。而{sech(nx)}数列, 并不正交。后籍一 Datafit 的 Fortran 程序, 经运行结果可以拟合得甚好。譬如取等腰三角形参数高 b= 0.5 和底边宽 2a= 2, 在三角形中取 7 个点和 sech x 函数用二项来拟合, 则得出结果为 $0.30197 e^{i} \mathrm{sech} x_1 + 0.78653 \mathrm{sech} x_2$ 这样迭加它们和 波在 7 个点上均方误差值之和为 0.25717×10^{-2}。这也说明, 三角波形的出现可能正是由这样的孤子迭加的结果。

本项 Datafit 程序是由张善杰教授帮助编写出来的, 特致衷心的谢意。

参考文献:

[1] W. Krolikowski & S. A. Holmstrom. [J]. Optics Letters., 1997, 22(6): 369.

[2] R. J. Wei et al. [J]. J. A. S. A., 1990, 88: 469. 缪国庆, 王本仁. [J]. 物理学进展, 1996, 16: 273.

[3] A. Larraza, S, Putterman. [J]. J. Fluid Mech., 1984, 148: 433; J. Miles, ibid., 1984, 148: 451.

[4] 黄念宁. 孤子理论和微扰方法[M]. 上海科技教育出版社, 1996.

科 普 简 讯

据上海市科学技术协会报道, 上海市声学学会理事长向大威教授获“1999 年上海市大众科学奖提名奖”(共 7 名)。向大威理事长关心科普工作, 尽管自己的科研工作繁忙, 他每年在本市的中小学校及社区内做了 10 余次科普报告。听讲者有大中小学生, 也有中小学的学生家长, 讲座内容除日常生活中的声学现象外, 也涉及高科技中的声学应用。如向教授在讲“声纹鉴别”讲座时, 举例亚特兰大奥运会召开时, 其间奥林匹克公园里的爆炸案成为全球关注的热点, 美破案人员对疑犯进行声纹分析, 于是他就深入浅出地讲解声纹原理。语言生动, 风趣幽默, 富于哲理, 常引起满堂笑声, 几乎场场爆满。

科普之花社区遍开, 向大威教授身体力行, 获此奖励, 当之无愧。

上海市声学学会办公室